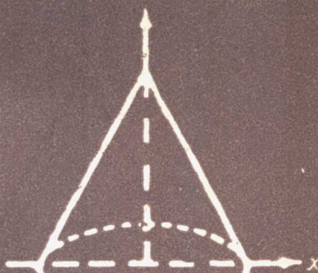
几何难点辅导

Jihe nandian fudao



青海人民出版社

几何难点辅导

王岳庭　陈振宣　夏明德　编著

青海人民出版社

责任编辑　张文选
封面设计　张永方

几何难点辅导

王岳庭 陈振宣 夏明德 编

青海人民出版社出版
（西宁市西关大街96号）
青海省新华书店发行　杭州风光彩印装璜厂印刷

开本：787×1092毫米 1/32　印张：10　字数：225,000
1985年12月第1版　1985年12月第1次印刷
印数：1—22,000

统一书号：13097·59　定价：1.50元

前　　言

由于学习几何的方法与学习代数的方法有所不同，学习几何强调逻辑推理、论证的严密性、几何直观和空间想象能力，加之几何教材中的一些新概念、新方法，初学者往往不易接受，这就使中学几何内容中出现了不少难点．分析这些难点，探索突破难点的途径是大家关注和重视的课题。我们编写这本书的目的，正是为了帮助读者对中学几何教材中比较困难的部分，进行分析和解剖，找出产生难点的原因，提出突破难点的办法，藉以提高自学能力．

本书是按平面几何、立体几何、解析几何的顺序，分专题讲座进行编写的．各讲都精选了一些典型的范例，详细分析解题思路，解剖难点所在，有的还给出了多种解法．在每讲末还编选了少量思考题，并附有提示．

本书是中学生的课外读物，也可供中学数学教师作参考，社会青年作自学参考．

承浙江省中学数学教育研究会副会长、浙江师范大学商永建副教授审阅，特此表示感谢．

编　者

一九八五年十二月

目　　录

第一讲　平面几何中的定值问题

在平面几何中，我们常会遇到如下一类问题：

1．若三角形的底边长度和顶角大小都一定，那么从两底角顶点至其对边所引垂线的两垂足间的距离为定长．

2．由圆的任意直径的两端，至有定长的弦引两条垂线，那么这两条垂线的和或差为定长．

3．由等腰$\triangle ABC$的顶点C引任意直线，交底边AB于D，交$\triangle ABC$的外接圆周于E，那么乘积$CD \cdot CE$是定值．

4．过线段AB上的一点C引任意直线，那么由A、B两点至此直线所引的任意二条平行线之比是一个定值．

5．从$\odot O$外一定点P引$\odot O$的两条切线PA、PB（A、B为切点），在劣弧$\overset{\frown}{AB}$上任取一点C，过C作$\odot O$的切线，分别交PA、PB于D　E，那么

（1）$\triangle PDE$的周长是定值；

（2）$\angle DOE$的大小是定值．

象以上这类问题我们还可以举出不少例子，它们的结论，不外乎要证明某一变动的线段有定长，或者要证明某些变动线段的和、差、积、商（比）保持不变，或者要求证明变动线段过定点、有定向、夹定角等等，这类问题我们统称为“定值问题”，是研究几何图形在变化过程中某些几何量或其运算结果具有某些不变性的一类问题．

§1 难点分析

为什么说平面几何中证明定值问题是个难点呢？分析其原因，主要有以下几方面：

1．可变几何量渗入了几何命题，是定值问题的重要特征．

一般的几何证明题，常常只是研究固定几何量之间的关系．例如在“试证等腰三角形底边中点至两腰的垂线之和等于一腰上的高”这一简单几何证明题中，虽然题设中的等腰三角形可以是任意的，但一经给定，就是固定不变的等腰三角形了，于是题设与结论中的所有几何量，如三角形的各元素、底边的中点及它到两腰的垂线、一腰上的高等等都是固定不变的几何量，结论中要证明的只是两固定线段之和与另一固定线段的相等关系．

但是，如把上述命题改为“试证等腰三角形底边上任一点至两腰垂线之和等于一腰上的高”，这时“底边上任一点”就是可以在一定范围内变动着的点，于是由底边上任一点至两腰的垂线也就随着成为可变的几何量了．渗入了可变几何量之后，问题起了质的变化，在一定程度上增加了证题的难度

2．命题结论的若明若暗，是证明定值问题时感到无从着手的主要因素．

我们如果把上面的题目再改述为“试证等腰三角形底边上任一点至两腰垂线之和为定长”，这个命题就属于通常所说的定值问题了．现在按图1－1写出已知和求证如下：

已知　在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，P为底边BC上任意一

点，$PD\perp AB$，D为垂足．$PE\perp AC$，E为垂足．

求证　$PD+PE=$定长．

虽然求证部分是明确的，但是这里所指的“定长”是多少？用什么来表达这一“定长”；在结论中却是隐含的内容，也就是说结论中还有“暗”的一面，因此，在证题过程中，常会感到茫然，无从入手．

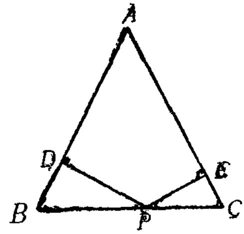


图　1—1

由于定值问题的命题形式，常不明确提出定值是什么，也就是说结论中的隐含部分，往往需要自己进行探求，才能顺利进行结论的证明．所以在证明定值问题时，除要求具有一定的证题能力外，还要求具有一定的探索问题的能力．这种在能力上的更高要求，是定值问题成为学习难点的一个关键原因．

3．定值问题的题设和题断中，有关的几何元素，常比一般的证明题，具有更大的灵活性和复杂性．

首先，每一个定值问题，常需我们回答“定值是什么”和“怎样证明”这两方面的问题，论证上显然比一般证明题要复杂．其次，定值问题的结论中，常需证明几个变动线段的运算结果为定值；对于证明有定角、定向、过定点等问题，则又需先作适当的转化后才成为定值问题而加以解决，这显然又比普通的证明题要复杂且有更大的灵活性．此外，探求定值的方法可以灵活多变，要有一定的熟练程度，才能得心应手地来解决问题，以上各种因素都构成学习中的难

点.

4．教材中定值问题常分散出现，不易系统总结解题规律.

在当前平面几何课本中，对于定值问题只在某些章节中偶然出现，未作题型归类，如果不是有意识地归纳总结，那么就很难系统掌握解题的规律与技巧，这也是形成难点的重要原因.

§2 解决难点的方法

在解定值问题时，若能注意以下几方面的问题，就能化难为易，使问题迎刃而解.

1．根据定值问题的结构特点，要善于分清图形中的定量和变量，这是分析和解决问题的着手点.

定值问题的主要结构特点，在于题设和结论中既有不变的几何量，也有变化着的几何量．在分析题意时，除分清题设和题断外，应着重分清那些是固定不变的几何量，那些是可变的几何量，特别要分析清楚那些隐含着的定量和变量以及变量的限制条件，这样就可以入手有门，思考有路，才能逐步掌握这类题型的解题规律，促进能力的增长.

［**例1**］ 设⊙O_1与⊙O_2相交于A、B，过A引任意直线分别交⊙O_1、⊙O_2于P、Q，求证$\angle PBQ$为定值.

分析 这里⊙O_1、⊙O_2虽然是任意的，但一经选定后例如图1—2中的两圆，就是二个确定的圆了．因此O_1、O_2、A、B都是定点，随之可知公弦AB、$\overset{\frown}{AmB}$、$\overset{\frown}{AnB}$ 以及两圆在交点A、B处的切线等等都是隐含着的确定不变的几何量。

另一方面，直线PAQ是过定点A的任意直线，因而是可变的，而P、Q各是限制在$\odot O_1$的优弧$\overset{\frown}{APB}$和$\odot O_2$的优弧$\overset{\frown}{AQB}$（图1—2）上可变动的点，因此$\angle APB$、$\angle AQB$、$\angle PBQ$都是位置可变的角.

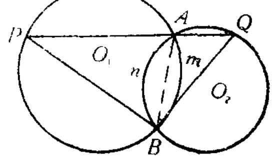


图　1—2

下面我们还要进一步找出这些可变几何量间所隐含着的不变关系. 首先，位置可变的角，即$\angle APB$和$\angle AQB$各为定在$\overset{\frown}{AmB}$和$\overset{\frown}{AnB}$上的圆周角，由于$\overset{\frown}{AmB}$和$\overset{\frown}{AnB}$各为定弧，故变角$\angle APB$和$\angle AQB$的大小各不变，即$\angle APB=$定值，$\angle AQB=$定值，从而$\angle APB+\angle AQB=$定值. 又P、A、Q共线是不变的关系，即P、B、Q三点在变动中始终是三角形的三个顶点，因而$\angle APB+\angle AQB+\angle PBQ=$定值，于是$\angle PBQ$为定值就是显然的事实了.

从上例可见，善于分析定值问题中的不变几何量和可变几何量，特别是善于发掘那些隐含着的不变量和可变量，提高这方面的分析能力，是突破难点的第一关. 由此我们还可以进一步体会到：解决定值问题的实质，就是要从有关变量中找出不变的关系，明确了这一点，就学到了思考的方法，掌握了解题的起步点，为顺利解题起了消除障碍的开路作用.

2．用不变的几何量表出所要求证的定值，探索出定值是什么，这是解决定值证明题的关键环节.

如前所述，证明定值问题首先要回答“定值是什么”这一隐蔽着的问题，才能使求证部分有明确的内容. 因此，在

学习中掌握探求定值的方法，提高探索能力，这是突破难点学习中的最关键的一环.

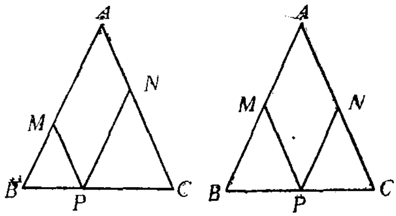
探求定值，常用的有以下诸法：

（1）特殊位置法．要寻求可变几何量在变动中所包含的不变关系，常把变动的图形放在特殊的位置上来进行考察，这样就可利用一些特殊点的特殊关系来求出定值，此法可简称为特殊位置法.

［**例2**］ 由等腰三角形底边上任意一点，分别引平行于两腰的直线与两腰相交得两条有限线段，则此二线段之和为定值：

已知 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，P为BC上任意一点，$PM\parallel AC$交AB于M，$PN\parallel AB$交AC于N（图1—3）.

求证 $PM+PN$为定值.



(a) (b)

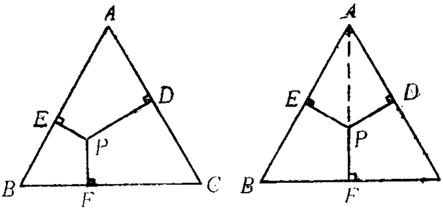
图1—3

分析 因P为BC上的任意点，故如取BC的中点为P，结论应成立，如图1—3（b），设P为BC的中点，$PM\parallel AC$，$PN\parallel AB$，则$PM=\frac{1}{2}AC$，$PN=\frac{1}{2}AB$， $\therefore PM+PN=\frac{1}{2}(AB+AC)=AB$，就是说题中的定值就是一腰之长，于是问题就是要证明$PM+PN=AB$，对于P为BC上的任意点时均成立.

证明 （略）

［**例 3**］ 试证等边三角形内任意一点至三边的距离之和为定值.

已知 $\triangle ABC$中，$AB=BC=CA$，P为$\triangle ABC$内的任意一点，$PD\perp AC$，$PE\perp AB$，$PF\perp BC$（图 1－4 (a)）.



求证 $PD+PE+PF$为定值.

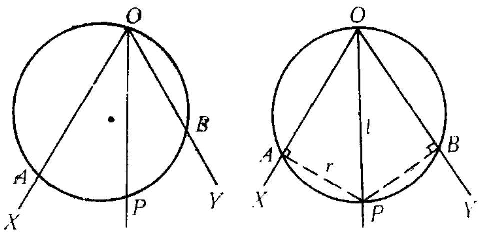
(a) (b)

图 1－4

分析 $\triangle ABC$内的任意一点，当然包含该三角形内的一些特殊点，例如取$\triangle ABC$的重心（同时为外心、内心或垂心）为P，则$PD=PE=PF$（图 1－4 (b)）且 $PF=\frac{1}{3}AF$，$\therefore PD+PE+PF=AF$，也就是说，所求的定值就是$\triangle ABC$的高.

证明 （略）

［**例 4**］ 在定角$\alpha=\angle XOY$（$0<\alpha<\pi$）的平分线上取一点P，过O、F的任意圆周交OX于A，交OY于B，求证：$OA+OB=$定值（图 1－5 (a)）.



(a) (b)

图 1－5

分析　取过定点O、P的任意圆周中的某一处于特殊位置的圆周，例如以OP为直径的圆周（图1—5(b)），与OX、OY各交于A、B，则$\angle OAP$、$\angle OBP$均为直角．令$OP=l$，$PA=PB=r$，于是$OA=OB=\sqrt{l^2-r^2}$，故$OA+OB=2\sqrt{l^2-r^2}$，由于l、r均为定值，所以$OA+OB$为定值．

证明　（略）

（2）极限位置法

当变量在限制范围内变化而达到临界状态时，因其中某些参与变化的元素处于稳定状态，所以整个变化过程中所蕴含的不变性也就容易显露．在探求定值时，我们就可利用这一特点，把可变几何量移动到极限位置来进行考察，以便求出定值，这种方法简称为极限位置法．

现在仍以上面的例2、例3、例4为例，具体说明应用极限位置法探求定值的方法．

在例2中（图1—3(a)），P是限制在底边BC上运动的点．当P向左运动而达到它的极限位置B（即P与B重合）时，则M向B运动也与B重合，于是$PM=0$；又N向A运动而与A重合，于是PN转化为BA，故在极限位置的情况下，就有

$$PM+PN=0+BA=AB=\text{腰长（定值）}.$$

在例3（图1—4(a)）中，当动点P向边界AB运动而达到AB，又向AB的端点A运动而到达A（P与A重合）时，就有$PE=0$，同时D向A移动而到达A，于是$PD=0$；又PF转化为AF．故在这种极限位置（即P与A重合）的情况下，就有

$$PD+PE+PF=0+0+AF=AF$$
$$=\text{等边}\triangle ABC\text{的高（定值）}.$$

在例4（图1－5(a)）中，当过定点OP的任意圆周向左移动时，B沿圆周向O移动而达到极限位置（即B与O重合）时，此时角的一边OX仍与圆周相交于A，另一边OY就成为圆的切线（图1－6），连结PA，作$PC\perp OA$交OA于C，则有

$$\angle POY=\angle POX=\angle PAO,$$

$$\therefore AP=OP=l,$$

仍令$PC=r$，故 $OA=2OC=2\sqrt{l^2-r^2}=$定值.

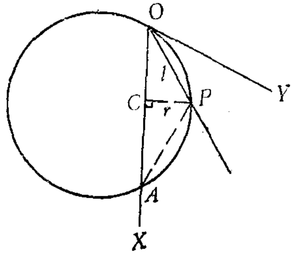


图1－6

通过以上诸例的分析，我们可以看到特殊位置法与极限位置法实质上是密切联系的，它们都是利用了"普遍性寓于特殊性之中"这一基本原理，运用抽象问题具体化的方法来探求定值，以上两种方法是探求定值的基本方法.

3．从普遍性和特殊性的关系上，来理解定值问题进行一般证明的必要性，掌握证明的方法，这是解决定值证明题的论证主体.

在一定条件下，可变几何量在变化过程中所呈现的某种不变性，是一般规律的反映．但在初学定值证明题时，往往通过特殊位置法或极限位置法求出定值后，就认为问题已经解决，这种逻辑思维上的缺陷，必须加以克服.

普遍性常寓于特殊性之中，因此我们应用特殊位置法或极限位置法所求得的定值，它有反映普遍规律的可能性，但不能代替普遍性．如要肯定求出的定值具有普遍性，还必须在一般情况下加以证明．必须明确，当我们应用特殊的方法求得定值后，只完成了这样一个步骤：把定值问题转化为普通的证明题。接着的步骤就是要把这一转化后的普通证明题加

以证明.

在证明过程中，仍需在逻辑思维上善于运用“一般特殊化”与“特殊一般化”这二个过程的统一叙述法. 例如，我们在动点的变化范围内“任取一点P”，P点就是被选定作为一般论证的“模型”，在论证中就可把它当作定点来看待，这就是“一般的特殊化”过程. 以P为代表进行论证所得的结论，本来是带有特殊性的，但由于P是“任取”的，于是它就有权代表变化范围内的一切点，从而所得结论对于变化范围内的一切点都能成立，这样，结论就具有一般性了，这就是“特殊一般化”的过程. 我们必须在论证的思想方法上搞清楚以上的关系，至于论证过程中是否有困难，那就决定于在平时是否能熟练掌握证题的方法、技巧了.

[例 5] 在⊙O的直径AB上，取离中心O等远的二点C、D，则由圆周上任意点P至C、D的距离的平方和为定值.

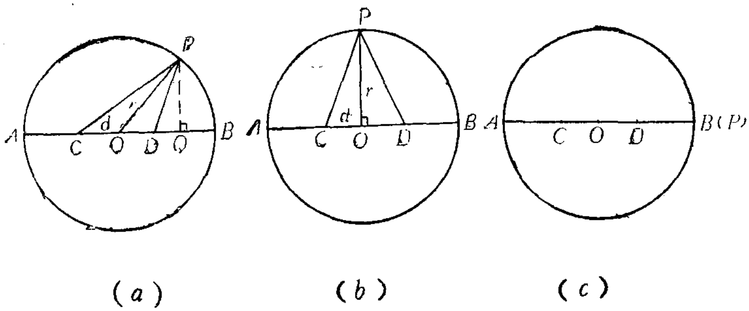


图 1—7

已知 如图 1—7（a），$AB=2r$是⊙O的直径，C、D是AB上的点，且$OC=OD=d$，P为⊙O上的任意点.

求证　PC^2+PD^2为定值.

分析　首先探求定值．如用特殊位置法，可取$\overset{\frown}{AB}$的中点为P（图1－7（b）），显见

$$PC^2+PD^2=(r^2+d^2)+(r^2+d^2)=2(r^2+d^2),$$

因r、d为定值，故PC^2+PD^2为定值.

如用极限位置法，使P沿圆周向B运动到与B重合的极限位置（图1－7（c）），则

$$PC^2+PD^2=BC^2+BD^2=(OB+OC)^2+(OB-OD)^2$$
$$=(r+d)^2+(r-d)^2=2(r^2+d^2)=\text{定值}.$$

上面所求得的定值，是在特殊情况下所求得的，因此须在一般情况下加以证明

证明　如（图1－7（a）），设P为$\odot O$上任意一点．引$PQ\perp AB$交AB于Q，现在要证明

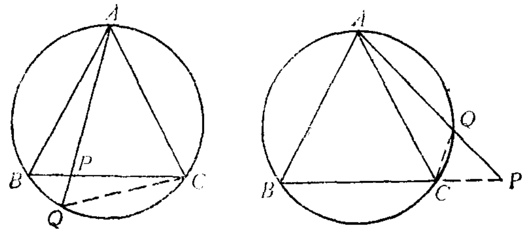
$$PC^2+PD^2=2(r^2+d^2)$$

由　$$PC^2=CQ^2+PQ^2+(2d+DQ)^2+PQ^2$$
$$=4d^2+4d\cdot DQ+DQ^2+PQ^2,$$
$$PD^2=DQ^2+PQ^2,$$
$$r^2=PO^2=OQ^2+PQ^2=(d+DQ)^2+PQ^2$$
$$=d^2+2d\cdot DQ+DQ^2+PQ^2.$$

把前二式相加，并与第三式相比较，就得

$$PC^2+PD^2=2(2d^2+2d\cdot DQ+DQ^2+PQ^2)$$
$$=2[d^2+(d^2+2d\cdot DQ+DQ^2+PQ^2)]$$
$$=2(d^2+r^2)=\text{定值}.$$

［**例6**］　自等腰$\triangle ABC$的顶点A引任意直线，交底边BC（图1－8（a））或其延长线（图1－8（b））于P，交外接圆周于Q　试证$AP\cdot AQ$，为定值.



（a）　　　　（b）

图 1 — 8

分析　当P沿底边BC移动而到达极限位置C时，动点Q也随着沿外接圆周向C移动而到达C．故在P、Q、C重合的极限情况下，有

$$AP\cdot AQ=AC\cdot AC=AC^2=\text{定值}.$$

证明　设过A的任意直线交BC或其延长线于P，交$\triangle ABC$的外接圆周于Q；连结CQ，则在图 1—8(a)的情况有

$$\angle AQC=\angle ABC=\angle ACP;$$

在图 1 — 8（b）的情况有

$$\angle ABC+\angle AQC=\angle ACB+\angle ACP=180^\circ,$$

$$\because \angle ABC=\angle ACB,\quad \therefore \angle AQB=\angle ACP.$$

又在$\triangle APC$和$\triangle ACQ$中，$\angle CAQ$公用，故

$$\triangle APC\backsim\triangle ACQ,\qquad \therefore AP:AC=AC:AQ,$$

$$\therefore AP\cdot AQ=AC^2=\text{定值}.$$

［**例 7**］　若在已知$\triangle ABC$的一边BC上取一点D，则不论D的位置如何，$\triangle ABD$和$\triangle ACD$的外接圆的半径之比为定值．