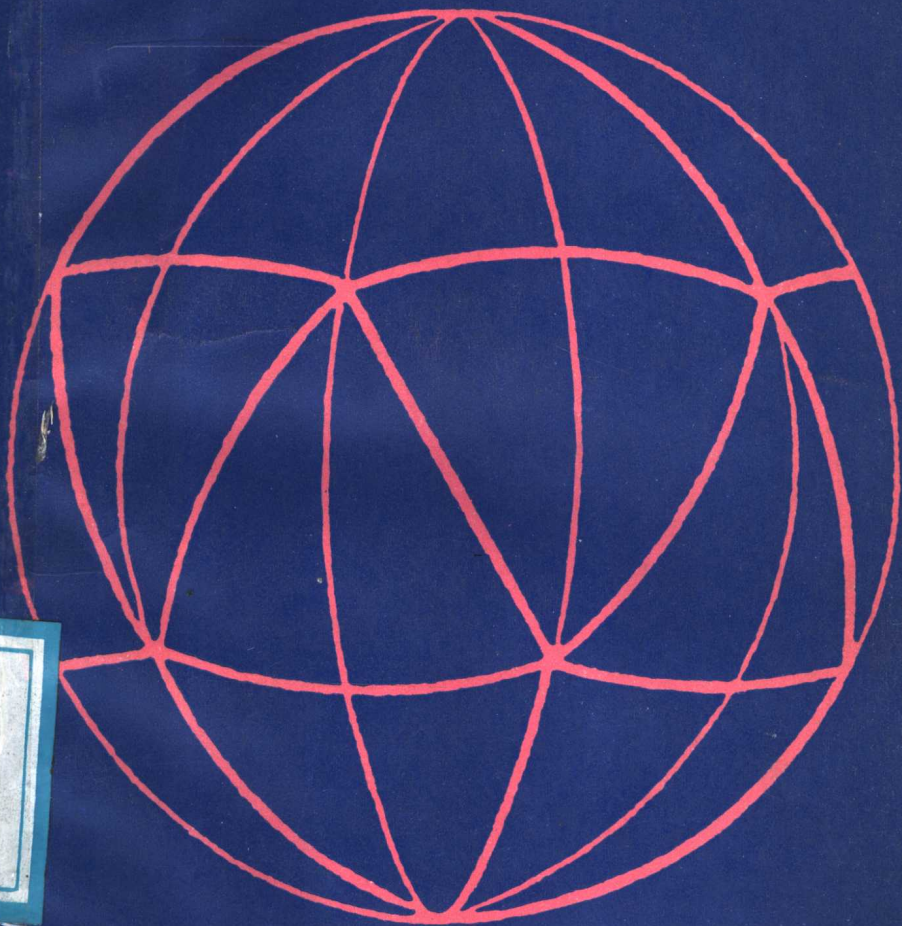


数学图形的奥妙



上海科技教育出版社

数学图形的奥妙

唐尚群

上海科技教育出版社出版、发行

(上海冠生园路393号)

各地新华书店经销 上海东方印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 3 字数 65,000

1987年6月第1版 1987年6月第1次印刷

印数 1—9,000本

统一书号:7487·61 定价:0.47元

前 言

数学游戏具有知识性、趣味性、逻辑性的特点。它既可以扩大青少年知识面，又能启发他们的形象思维和逻辑思维，增强形体概念。数学游戏自古以来花样繁多：有用数学公式计算推导的；有用几何图形拼拼画画的；有填充凑数的等等。本书着重介绍少量有关图论的基本知识和由此引伸出来的许多有趣的游戏内容与方法，为此各章都配有一定数量的习题，读者可以根据文中所述内容就地取材，自己动手制作一些游戏材料进行活动，文后的答案可供解题参考。

图论研究的对象是图。这里所讲的图，并不是指我们日常看到和学到的形形色色的几何图形、地理图形、机械图形和美术艺术图，而是一种别有风味的图形，它仅仅是由点和连接点的线所组成的图形，即线图。它与点的位置、大小以及线的弯直、长短、粗细均无关系。这些点可以代表事物，也可以代表一个区域，还可以代表一个平面，而线则为联系各点之间的桥梁。这些点、线可以在一个平面内（即平面图），也可以不在一个平面内（即空间图形）。对于这样一种线图，我们关心的仅是这个图形有多少个点及多少条连接的线。

图论是一个应用极其广泛而又有趣味的数学分支，它不仅在自然科学领域里，甚至在社会科学领域里也有应用。单在数学智力游戏中就有很多难题需要用它来解决。希望通过本书有趣的实例和习题，能诱发你对图论的兴趣，帮助你了解一些有关图论的基本知识，懂得一些有关的数学原理，并希望

你在掌握了一定的知识和实践经验后有所创新。

本书在编写过程中请刘颀康同志审读了全书，葛文元同志对文字作了整理和润色，又得到编辑同志的具体帮助，在此一并致谢，由于编写这类读物对我来说还是一种尝试，疏漏之处在所难免，敬请读者批评与指正。

唐 尚 群

一九八七年二月

目 录

前言

一. 一笔画图	(1)
习题一 (附答案)	(9)
二. 漫游迷宫	(21)
习题二 (附答案)	(22)
三. 染色趣题	(31)
习题三 (附答案)	(34)
四. 平面十二块	(43)
习题四 (附答案)	(48)
五. 分堆问题	(55)
习题五 (附答案)	(63)
六. 渡河游戏	(69)
习题六 (附答案)	(75)
七. 立方块之谜	(82)
习题七 (附答案)	(90)

一. 一笔画图

十八世纪欧洲有一个城市叫肯尼希堡(现为苏联的加里宁格勒), 有一条普雷格尔河横贯肯尼希堡, 而奈发夫岛和另一小岛位于河的中央, 河上共架了七座桥(图1)。居民们经常在河边或岛上散步、休息, 时间久了, 有人就提出这样一个问题: 能否从某一处出发, 沿路经过每一座桥, 既不重复, 又无遗漏, 最后再回到原地呢? 许多人都试过, 但是没有一个人成功。是否有成功的可能性呢? 如果不能成功又是什么道理呢? 这就是有名的肯尼希堡七桥问题。这个谜直到1736年才被瑞士的著名数学家欧拉(Euler 1707—1783)用图论知识解开了, 他是世界上图论理论的伟大创始人。现在, 图论作为数学中一个分支, 已广泛应用于各个领域, 发挥着巨大的作用。

欧拉对肯尼希堡七桥问题得出的结论是“这样行走的要求是不可能实现的!”他是怎么得出这个结论的呢? 欧拉巧妙地将肯尼希堡七桥问题归纳为这样一个线图的问题: 他将陆

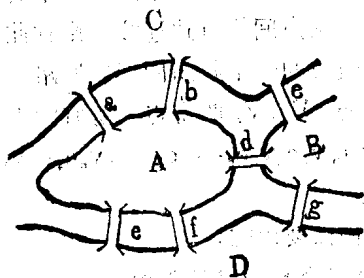


图 1

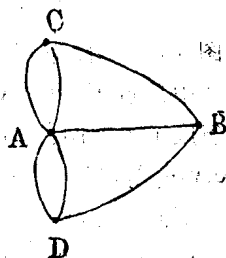


图 2

地与岛看作为点,而将桥看作为线,画成了一个很简单的图形(图2),这就将具体的肯尼希堡七桥问题抽象成了一个数学图形问题。根据前面所说的要求,很显然,行走的路线与岛屿、陆地的大小,桥梁的长短是无关的。故肯尼希堡七桥问题在图2上不可能每一条线不重复地一笔画出来(这里不限制经过点的次数与先后)。欧拉在研究这个问题中提出的一些理论就成为图论的基础,用他的这些理论可以证明“七桥问题”的不可能性。当然,这决非是随便试试而成的,我们知道,就是肯尼希堡七桥要系统地尝试行走,至少需要5040次(即 $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$),欧拉也曾提出过十五座桥的问题,若要系统地尝试,那就要走1307674368000次($15!$),这就成为根本不可能做到的事了。

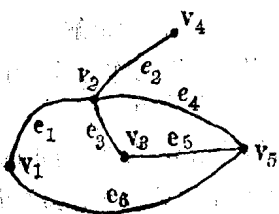


图 3

那么欧拉的这些理论内容是什么呢?先介绍几个名称:点线图 中的点称为顶点 v , 线称为边 e , 连接顶点的边的条数为奇数时称该顶点为奇点, 连接顶点的边数为偶数时称该顶点为偶点, 如果点线图中各个顶点间均有边连接, 则称此点

线图 为连通图, 而由点和边组成的一个封闭图形叫回路。如图3中顶点 V_1, V_2, V_3 叫偶点, V_4, V_5 叫奇点, 所有的点与线组成了连通图, 而由 $v_1e_1v_2e_3v_3e_5v_5e_6$; $v_2e_2v_4e_4v_5e_5$; $v_1e_1v_2e_4v_5e_6$ 等各组成一个回路。

下面的几个结论也是我们需要用的:

1. 任何一个点线图的奇点个数一定是偶数。
2. 点线图可以一笔画成的充分必要条件是: 此图为连通

图，且奇点的个数等于 0 或 2。所谓“一笔画”即一个图形可用笔一笔画到底描出来，而不得将笔提离纸面（且线条不能重并）。

3. 当奇点的个数为 0 时，即所有顶点均为偶点时，一笔画的起点和终点必在同一个顶点上。

4. 当奇点的个数为 2 时，一笔画的起点和终点各在一个奇点上。

5. 连通图若有 $2k$ 个奇点 (k 为自然数)，那么此连通图至少要用 k 笔才能画成。

以上这些结论的证明，限于本书的篇幅，不一一叙述了，读者如有兴趣可阅读其它有关图论的书籍，这里仅以实例作些说明。

例一：分析下面所绘的图形并绘出它们的画法：

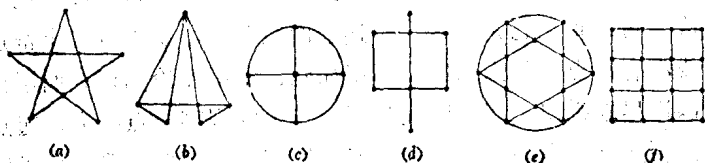


图 4

解：(a) 图有十个顶点，且均为偶点。因此，此图可以一笔画成。十个顶点中任意一个顶点均可作为起点，而且起点就是终点，即起点和终点是在同一个顶点上。

(b) 图有五个偶点，二个奇点。因此，此图可以一笔画成，且起点与终点各在一个奇点上。

(c) 图只有一个偶点，有四个奇点。因此，此图不能一笔画成，若要画成该图，至少需要二笔。

(d) 图有六个偶点，二个奇点。结论同(b)图。

(e) 图均为偶点, 结论同(a)图。

(f) 图有八个偶点, 八个奇点, 至少要四笔才能画成。

下面即为以上各图的一种画法:

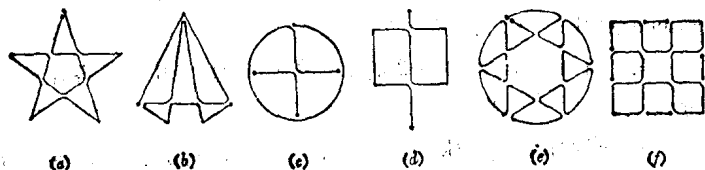


图 5

例二: 图 6 中图 6(a)是一朵花蕾, 能几笔画成呢?

解: 图 6(a)有六个奇顶点, 至少需用三笔方可画出来。图 6(b)就是一种画法。

从上两例中, 我们可以看到: 一个图形是否可以一笔画成, 可以根据它是不是一个连通图以及图中是否有二个奇点或没有奇点而作出判断。不仅如此, 根据图论知识我们还可以详尽地说出一笔画图该从哪一点出发到哪一点结束, 起点是否又是终点等等。对于不能一笔画成的图形, 我们也可以果断地回答出需几笔才能画成, 那些点是换笔处, 这些就不多赘叙了。

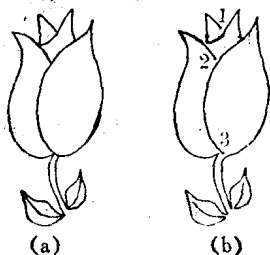


图 6

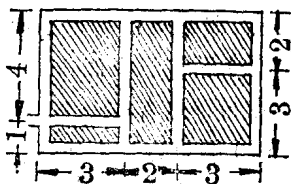


图 7

里告诉你一个比较容易记住的原则，在规划线路增添重复线路时必须满足：

1. 尽量选择最短的线路进行重复。
2. 各条线路不要重复一次以上（即每条线路不要行走二次以上）。

3. 各个闭合回路的重复线路的长度和不能超过原来闭回路长度和的一半。

用这三个原则去检查图 9 中所选择的线路，很明显不是最佳的线路，因右上角的闭回路就不满足第三个原则，即重复线路长度和为 $2+3+2=7$ 超过了原闭回路长度和 $2+3+2+3=10$ 的一半。应该采用如图 10(a) 的重复线路。图 10(b) 就是在这种线路选择的情况下的一种行走最佳线路。要注意第一个原则是“尽量”，而不是“一定”，不信你可试一试。

当然，这种图上作业法有时选择的最佳线路也并非就是唯一的，而且在闭回路较多的情况下要检验所选择的行走路线是否最佳，也要化许多的时间，但是对较简单的行走路线的规划这个方法还是很好的。

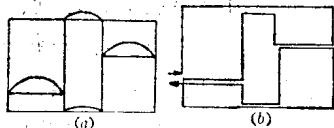


图 10

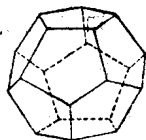


图 11

最后，我们再介绍一个有趣而又很有名的游戏即哈密尔顿周游世界的数学游戏。1859 年英国著名的数学家哈密尔顿 (Hamilton, 1805—1865) 将一个正十二面体的二十个顶点代表城市，各个棱边作为可行走的道路，如图 11。他要求从某一个城市出发，经过其它每个城市恰好一次，然后再回到出发

的城市。一般在立体图 11 上很难找出其走法,为此我们将这个立体图改变成平面图(这个问题对于点只能恰好经过一次,而棱的长短对我们的研究是无关的,因此可适当将一些棱放长,即一些面得到扩大而平压成一个平面),如图 12(a)。由于哈密尔顿游戏并不要求每一条道路都要经过,因此这个问题从平面的线图上就很容易找到解决的方法,如图 12(b)就是一种行走路线,即图中实线所示,当然还有许多方法。从表面上看,它与一笔画图很类似,实质上两者理论是截然不同的,一笔画图是边不重并的连通路或回路,而哈密尔顿游戏是一种点不重并的连通路或回路的趣图。可以一笔画的图不一定有哈密尔顿回路。如图 13(a) 是一个可以一笔画的回路,但它没有哈密尔顿回路,却有哈密尔顿连通路,见图 13(b) 所示。不可以一笔画成的图有的也有哈密尔顿回路,如欧拉七

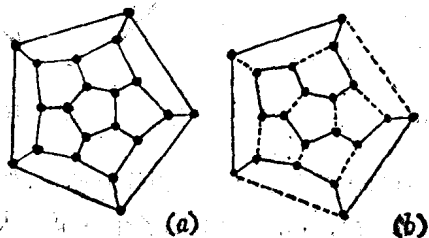


图 12

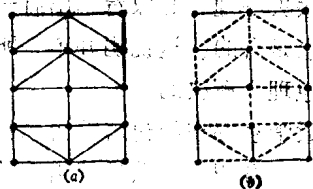


图 13

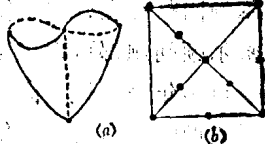


图 14

桥问题(图 14(a));有的却没有哈密尔顿回路或连通路,如图 14(b)。

再举两个例子供大家参考:

例四: 试分析图 15 上各个点是否可能每个点恰好走过一次而又都能走到。

分析: 这是不可能的。我们只要将图上各点用黑白两色间隔表明后即可发现:每个点恰好走过一次而又全都走到,必须满足色点间隔的要求,但是该图上黑色点的数目比白色点的数目多二个,因此是不可能的(这种用不同颜色着点来说明问题的方法又叫染色原理),即此图用哈密尔顿的行走法是无法实现的。

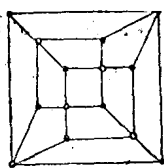


图 15

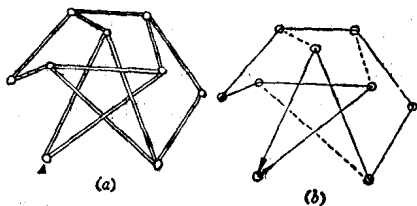


图 16

例五: 图 16(a) 是九个有通路相连的城市,你能由一个城市出发(带有 ▲ 者),恰好经过其它各个城市一次后再回到原地吗?

解: 这个问题是可能存在的。如图 16(b) 就是一条行走路线。这个问题要是用上例方法去处理,好象看不出有一条哈密尔顿回路存在,但是实际上是有的。这说明并不是所有的哈密尔顿问题都可以用染色原理来解决的。

一百多年来,许多国家的数学家都在探讨着哈密尔顿周游世界问题的实质及其求解规律,希望能象欧拉找出一笔画图解决的方法那样,找到一个简单可行的解决方法,但是到现

在还没有找到较理想的结果。哈密尔顿周游世界的问题肯定是图论知识的应用问题，它仍是当前图论工作者重视的一个课题。读者如有兴趣可参阅一些其它有关书籍，作些探讨与研究。

习 题 一

1. 欧拉自行设计的十五座桥问题(图 17)，你能否不重复地恰好从每座桥上经过一次吗？

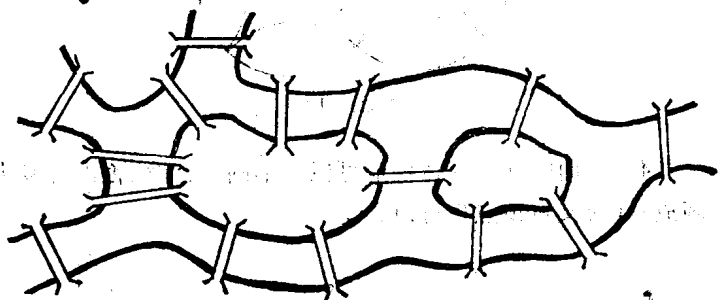


图 17

2. 现在肯尼希堡中又架起了一座桥,如图 18。试问能否从某处出发,既不重复,又无遗漏地经过每座桥呢？

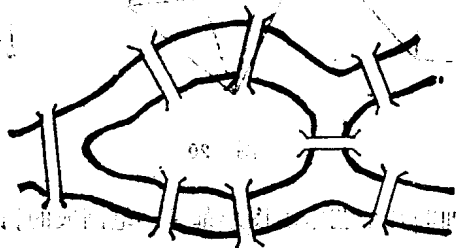


图 18

3. 请你完成下面的一笔画图形：

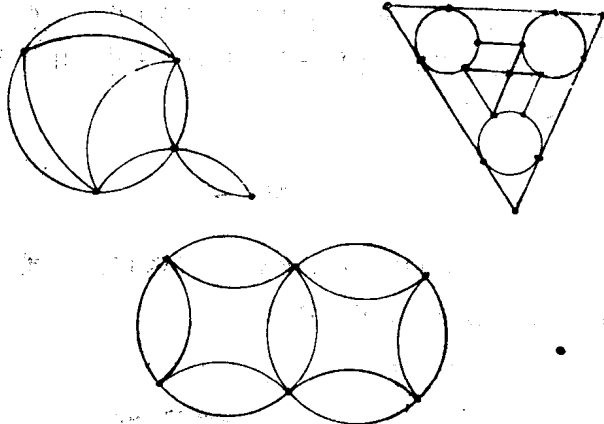


图 19

4. 下面的几个立体图形可以一笔画成，你能否沿着棱边画成吗(交叉过顶点也可以)?

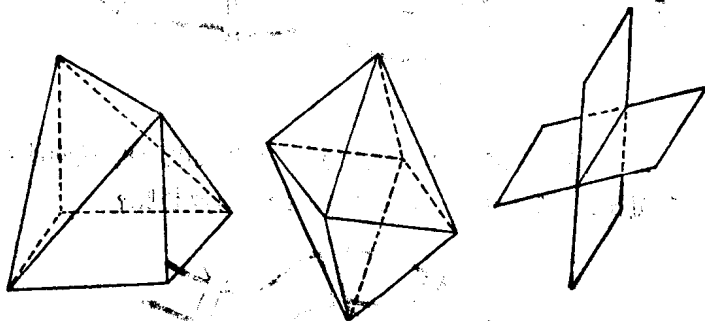


图 20

5. 下面的几个艺术画图形都是一笔画成的，请你动手试一试：

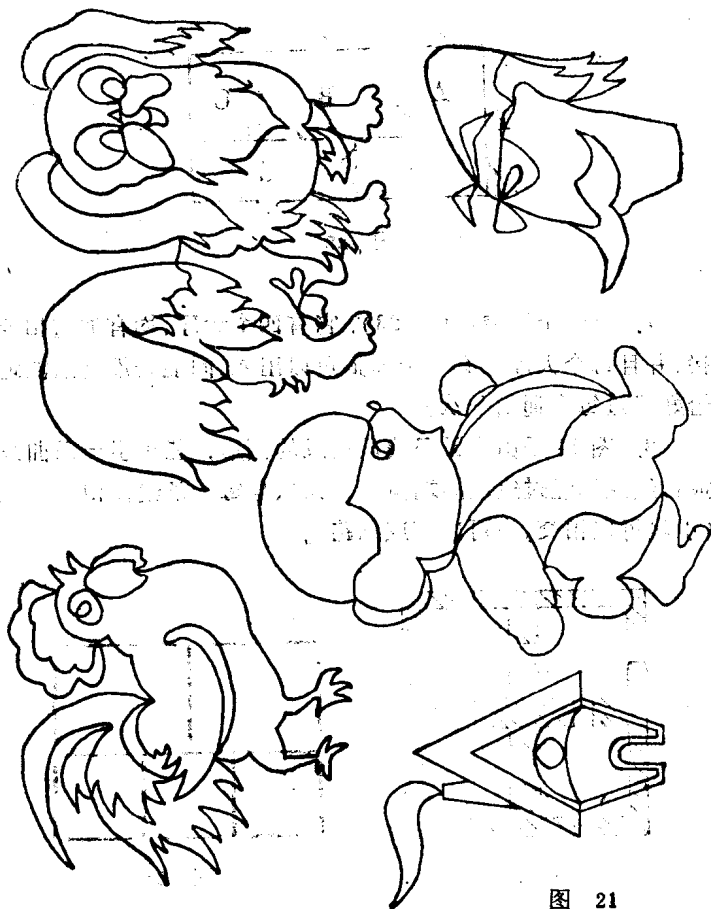


图 21

6. 图 22 是一个展览馆的平面图, 它有五个展览室 (A、B、C、D、E), 开了十三扇不同风格的门, 若参观者希望在参观的同时又能欣赏一下各扇门的特色, 该怎么走?

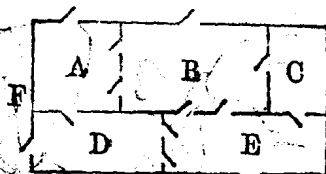


图 22

7. 有一个防空洞(图 23), 它有四个大厅, 均有通道相连接, 并且每个大厅均有一个通道可以出入, 问能否没有遗漏地恰好经过每个通道一次?

8. 图 24 是由十五条线段构成的图形, 能否引一条曲线或折线既不过线段的端点处, 又只与每一条线段相交一次 (引线可以相交, 也可以不成回路)。

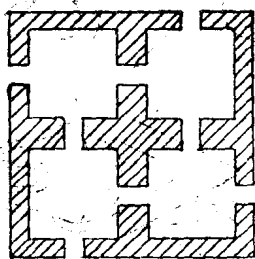


图 23

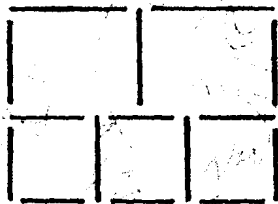


图 24

9. 某个游览胜地(图 25), 各风景区景色秀丽, 游览者们希望不重复地到各处去观赏一下, 他们应该怎样走呢?