第一章 线性代数基本知识

线性代数是制作概率统计天气预报的一种数学工具，主要是用它来分析和提取历史资料中重要预报因子、确定预报方程中的参数以及实现预报方案的计算方法等。同时，近代概率统计的理论和方法，也多用矩阵和向量来叙述，所以线性代数也是学习概率统计的基础。

线性代数主要包括线性方程组的理论和线性空间的理论，但对于气象工作者来说，最重要的是正确地应用这些基本理论来作天气预报，因此，我们把重点放在介绍线性方程组的求解方法和矩阵的计算，并注意到知识的系统性，扼要地介绍有关的概念和结论，但不作严格的数学推导。

§1 行列式

（一）二阶和三阶行列式

例1 解二元一次方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2=1 & ① \\ -2x_1+3x_2=-2 & ② \end{cases}$$

解：用3乘方程①两边得

$$3x_1+6x_2=3 \qquad ③$$

用2乘方程②两边得

$$-4x_1+6x_2=-4 \qquad ④$$

方程③两边分别减方程④两边，消去 x_2 得

$$7x_1=7 \qquad \therefore \quad x_1=1$$

以 $x_1=1$ 代入①得 $x_2=0$。所以原方程组的解为 $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=0 \end{cases}$

为了得到二元一次方程组的求解公式，我们用例1中的求解方法（即所谓加减消去法）来解一般形式的二元一次方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & ⑤ \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & ⑥ \end{cases}$$

为从⑤和⑥中消去x_2，可用a_{22}和a_{12}分别乘⑤和⑥的两边，将所得的两个方程相减，即是

$a_{22}\times$⑤　　$a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_1a_{22}$　　⑦

$a_{12}\times$⑥　　$a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_2a_{12}$　　⑧

⑦－⑧　　$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = (b_1a_{22} - b_2a_{12})$

当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，就得

$$x_1 = (b_1a_{22} - b_2a_{12}) / (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

代入⑤得

$$x_2 = (b_1a_{11} - b_2a_{21}) / (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \qquad (1)$$

式(1)就是二元一次方程组求解公式。

公式(1)有这样的规律：如将方程⑤、⑥中未知数x_1、x_2的系数按原来的次序写成数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

那末，公式(1)中的分母就是：数表左上角的数a_{11}与右下角的数a_{22}的积，减去右上角的数a_{12}与左下角的数a_{21}的积。

代数式　$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$　叫做二阶行列式，用记号表示就是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (2)$$

行列式(2)中的a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}叫这个行列式的元素。四个元素排成两横排和两纵排，横的叫行，纵的叫列，行的顺序是自上而下，列的顺序是自左而右，二阶行列式有两行和两列。元素a_{ij}中第一个足码i表行的序号，第二个足码j表列的序号，

例如：a_{12} 表示它是行列式（2）中第一行第二列的元素。

如果令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}$$

则公式（1）可简写成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D} \tag{3}$$

注意 D_1 是用方程组⑤,⑥的常数列 $\begin{matrix}b\\b_2\end{matrix}$ 来代替 D 中的第一列所得到，D_2 是代替第二列所得到。

例2　解方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2=7\\ x_1-3x_2=-2\end{cases}$$

解：

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=2\cdot(-3)-1\cdot1=7\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 7 & 1\\ -2 & -3\end{vmatrix}=7\cdot(-3)-1\cdot(-2)=-19$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 7\\ 1 & -2\end{vmatrix}=2\cdot(-2)-7\cdot1=-11$$

$$\therefore\ x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-19}{-7}=\frac{19}{7},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-11}{-7}=\frac{11}{7}\ 。$$

设有三元一次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases} \tag{4}$$

和解二元一次方程组一样，利用加减消去法，消去 x_2 和 x_3 后

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{22}-b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}$$

上式分母中的代数式叫三阶行列式，记做

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (5)$$

于是分子中的代数式，就是用（4）的常数列代替 D 的第一列得到的三阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ x_1=\frac{D_1}{D}$$

同理可得

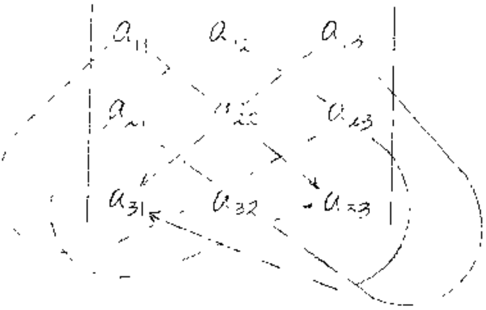
$$x_2=\frac{D_2}{D} \qquad x_3=\frac{D_3}{D}$$

这里的 D_2、D_3 分别表示用（4）的常数列代替 D 的第二列和第三列所得到的行列式。

所以在（4）的未知数的系数组成的三阶行列式 $D\neq 0$ 时，(4) 的解就是

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}, \qquad x_3=\frac{D_3}{D} \qquad (6)$$

计算一个三阶行列式，可以用下面的所谓对角线法则：在下图中，将每条实线上三个元素的积前面放正号，每条虚线上三个元素的积前面放负号，再将这六项相加。



例3 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

解：因系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot2(-2)+(-1)(-5)\cdot1+1\cdot3\cdot3-1\cdot2\cdot1-(-1)\cdot3(-2)$$

$$-2(-5)\cdot3 = 28 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 13 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 47$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

故得方程组的解

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{13}{28}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{47}{28}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{21}{28}.$$

（二）n阶行列式

从解二元、三元一次方程组，我们引入了二阶、三阶行列式。为了讨论n元一次方程组，我们从二、三阶行列式推广到一般的n

阶行列式。

1　排列和逆序数

1，2 有 2!＝2种排列，即（1，2）和（2，1）；

1，2，3 有 3!＝6种排列，即（1，2，3），（1，3，2），（2，1，3），（2，3，1），（3，1，2），（3，2，1）；

照此类推，1，2，3，4 有 4!＝24种排列，1，2，……，n 有 $n!$ 种排列。

现以1，2，3的排列为例，来说明逆序数的概念。排列（1，2，3）是按从小到大的自然顺序排列，如果在一个排列中，某两个数的顺序违背了自然顺序，我们就说这两个数组成一个逆序。例如，排列（3，1，2）中的3，1两个数组成一个逆序。一个排列中逆序的个数，叫这排列的逆序数。所以排列（3，1，2）的逆序数是2，而排列（3，2，1）的逆序数是3。逆序数是奇数的排列叫奇排列，逆序数是偶数的排列叫偶排列。在1，2，3的6个排列中，有一半是奇排列，这三个奇排列是（3，2，1），（2，1，3）和（1，3，2），其余的三个即（1，2，3），（2，3，1），（3，1，2）是偶排列。

一般来说，1，2，……，n 的 $n!$ 排列中有 $\frac{n!}{2}$ 个是奇排列，$\frac{n!}{2}$ 是偶排列。

2、记号 Σ 的用法

Σ 是多个数求和的缩写记号。例如，$1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n$ 可以缩写成 $\sum_{i=0}^{n} a^i$，$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 可缩写成 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$。反过来，$\sum_{i=1}^{n} x_i$ 表示 x_1，x_2，…，x_n 这 n 个数的和。

有讨论需要用的记号了。来表示一个求和的式子。

例3　$(a_{11}+a_{12}+a_{13})+(a_{21}+a_{22}+a_{23})+(a_{31}+a_{32}+a_{33})$

$$=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}+\sum_{j=1}^{3}a_{2j}+\sum_{j=1}^{3}a_{3j}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}$$

例4　$b_{11}x_1^2+b_{12}x_1x_2+b_{21}x_2x_1+b_{22}x_2^2=(b_{11}x_1+b_{12}x_2)x_2=$

$$+(b_{21}x_1+b_{22}x_2)x_2=\left(\sum_{j=1}^{2}b_{1j}x_j\right)x_1+\left(\sum_{j=1}^{2}b_{2j}x_j\right)x_2=$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2}b_{ij}x_j\right)x_i=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}b_{ij}x_ix_j$$

3. n阶行列式

在给出n阶行列式定义之前，我们先回顾一下二阶、三阶行列式。根据二阶、三阶行列式的定义，可以看出它们有如下共同的规律：

1° 项数　二阶行列式有2！项，三阶行列式有3！项；

2° 每项的构成　每项所含因子的个数等于行列式的阶数，且各因子位于行列式的不同行和不同列；

3° 每项前的符号　将每项所含因子按行号的自然顺序排列后，如列号的排列为偶排列，则前面带正号，如为奇排列，则带负号。例如，$a_{13}a_{22}a_{31}$ 的行号是按自然顺序排列，列号的排列（3，2，1）是奇排列，所以前面应带负号，即$-a_{13}a_{22}a_{31}$。

现在根据二阶、三阶行列式的上述共同规律，扩充到一般的n阶行列式。

n^2 个数组成的n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

就是$n!$项的代数和；每一项是位于数表中不同行不同列的n个数的积$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}$，这里的（$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_n$）是1，2，…，$n$的一个排列，如果（$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_n$）是偶排列，则在积前面放上正号，如果是奇排列，则放上负号。用式子表示，就是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)} (-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\cdots a_{n\alpha_n}$$

其中$N(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$表示排列（$\alpha_1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_n$）的逆序数；$\sum\limits_{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)}$表示对所有排列（$\alpha_1$，$\alpha_2$，…$\alpha_n$）求和。

（三）行列式的性质

我们不加证明地列出行列式的下列性质，

性质1　对应的行列互换，行列式的值不变。

例如，$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2$，将对应的行列互换得$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$，而$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$，即对应行列互换后的值不变。

性质2　两行（或列）对应元素成比例的行列式的值为0。

例如，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot2\cdot4+1\cdot2\cdot3+1\cdot2\cdot3-1\cdot2\cdot3-1\cdot2\cdot4-1\cdot2\cdot3$$

$$= 0$$

性质3　如果行列式的一行（或列）各元素同乘数k，则所得行列式的值等于原行列式的值的k倍。

例如，

$$\begin{vmatrix} a & kb & c \\ d & ke & f \\ g & kh & i \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

性质 4　如果行列式的一行（或列）各元素都是两数的和的形式，例如，

$$\begin{vmatrix} a & b & c+c' \\ d & e & f+f' \\ g & h & i+i' \end{vmatrix}$$

则

$$\begin{vmatrix} a & b & c+c' \\ d & e & f+f' \\ g & h & i+i' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c' \\ d & e & f \\ g & h & i' \end{vmatrix}$$

推论　行列式的任一行（或列）各元素乘同一常数 k，分别加到另一行（或列）的对应元素上去，行列式的值不变。

例如，将行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

的第二行各元素同乘 3 加到第三行的对应元素上去，得到行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+3d & h+3e & i+3f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

例 6　计算下面的行列式

$$D = \begin{vmatrix} 100 & 99 & 1 & 5 \\ 90 & 89 & 2 & 6 \\ 80 & 79 & 3 & 7 \\ 70 & 69 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

解：

$$D=\begin{vmatrix}99+1&99&1&5\\89+1&89&2&6\\79+1&79&3&7\\69+1&69&4&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}99&99&1&5\\89&89&2&6\\79&79&3&7\\69&69&4&8\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&99&1&5\\1&89&2&6\\1&79&3&7\\1&69&4&8\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1&99&1&5\\1&89&2&6\\1&79&3&7\\1&69&4&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&99&1&4\\1&89&2&4\\1&79&3&4\\1&69&4&4\end{vmatrix}=0$$

例6　利用前面的结论，把下面行列式化成每行至多有一个不等于0的元素的行列式．

$$\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&1&1\\0&2&4\end{vmatrix}$$

解：$$\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&1&1\\0&2&4\end{vmatrix}\xlongequal[\text{用-2乘第一行加到第二行}]{}\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&4&-3\\0&2&4\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{\text{以1乘第1列加到第二列}\\\text{以-2乘第1列加到第三列}}]{}$$

$$=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&4&-3\\0&2&4\end{vmatrix}\xlongequal[\text{以-2乘第3行加到第二行}]{}\begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&-11\\0&2&4\end{vmatrix}\xlongequal[\text{以-2乘第2列加到第三列}]{}$$

$$=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&-11\\0&2&0\end{vmatrix}$$

容易看出，例6的结论带有普遍性，即任何一个行列式都可以化成每行每列最多有一个不等于0的元素的行列式。

(四)行列式按行(列)展开．

当行列式的阶数大于3时，按行列式的定义来计算非常麻烦。比如计算四阶行列式就要计算24项，因此，我们要设法把高阶行列式用低阶行列式来表示。

在n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，把元素a_{ij}所在的第i行和第j列划去，这样所得出的$n-1$阶行列式称为元素a_{ij}的余子式；a_{ij}的余子式前面加上符号$(-1)^{i+j}$称为a_{ij}的代数余子式。

例7　求

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中元素a_{32}的余子式和代数余子式。

解：因a_{32}是D中第三行第二列交叉点上的元素，因此a_{32}的余子式是

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

代数余子式是

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}.$$

例8　在行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

中，第一行各元素的余子式和代数余子式如下：

$a_{11}=1$ 的余子式 $M_{11}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=7$，代数余子式 $A_{11}=(-1)^2M_{11}=7$；

$a_{12}=-1$ 的余子式 $M_{12}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=5$，代数余子式 $A_{12}=(-1)^3M_{12}=-5$；

$a_{13}=-1$ 的余子式 $M_{13}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & -1\end{vmatrix}=1$，代数余子式 $A_{13}=(-1)^4M_{13}=1$。

于是

$$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=11=\Delta$$

$$a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}=2\cdot 7+3(-5)+1\cdot 1=0$$

即第一行各元素与它们的代数余子式的积之和等于原行列式，而第二行各元素与第一行对应元素的代数余子式的积之和等于0。

例8的结论具有一般性，因有下面的

定理1 行列式的任一行（或列）各元素与它们的代数余子式的积之和等于原行列式，而与另一行（或列）的各对应元素的代数余子式的积之和等于0，即是如果

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

则

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=\Delta \qquad (i,j=1,2,\cdots,n) \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=0 \qquad (i\neq j) \tag{8}$$

如果令

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & （当 i=j 时）\\ 0 & （当 i\neq j 时）\end{cases}$$

则公式（7）、（8）可合并成公式

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj}=\delta_{ij}\Delta \qquad (9)$$

公式（7）就是行列式按行（或列）展开的公式。用一次公式（7），计算n阶行列式的问题就归结为计算n个n−1阶行列式的问题，连续用若干次（7），就可把要计算的行列式的阶数逐步降低。如果选用例6中的计算方法，把行列式化成一行（或列）中只有一个不等于0的元素，那末，每用一次公式（7），就把计算一个n阶行列式归结为计算一个n−1阶的行列式。

例9　计算下面行列式的值：

$$\Delta=\begin{vmatrix}5&2&3&3\\2&2&1&2\\3&1&3&2\\3&2&2&3\end{vmatrix}$$

解：先把第二行除第二行3列的元素外都化成0，然后按第二行展开：

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1&-4&3&-3\\0&0&1&0\\-3&-5&3&-4\\-1&-2&2&-1\end{vmatrix}=(-1)^{5}\begin{vmatrix}-1&-4&-3\\-3&-5&-4\\-1&-2&-1\end{vmatrix}=4$$

例10　计算下面行列式的值：

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\0&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&0&a_{33}&a_{34}\\0&0&0&a_{44}\end{vmatrix}$$

解：

$$\Delta=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}&a_{24}\\0&a_{33}&a_{34}\\0&0&a_{44}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}a_{33}&a_{34}\\0&a_{44}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

例10说明，如果一个行列式中位于主对角线（即自左上角至右下角的线）一侧的元素全为0，则这行列式等于主对角线上各元素的乘积。

例11 化行列式

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix}a_{11}+x&a_{12}&a_{11}\\a_{21}&a_{22}+x&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}+x\end{vmatrix}$$

为x的多项式。

解：

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix}a_{11}+x&a_{12}&a_{13}\\a_{21}+0&a_{22}+x&a_{23}\\a_{31}+0&a_{32}&a_{33}+x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}+x&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}+x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&a_{12}&a_{13}\\0&a_{22}+x&a_{23}\\0&a_{32}&a_{33}+x\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}+x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&0&a_{13}\\a_{21}&x&a_{23}\\a_{31}&0&a_{33}+x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&a_{12}&a_{13}\\0&a_{22}&a_{23}\\0&a_{32}&a_{33}+x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&0&a_{13}\\0&x&a_{23}\\0&0&a_{33}+x\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&0\\a_{21}&a_{22}&0\\a_{31}&a_{32}&x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&0&a_{13}\\a_{21}&x&a_{23}\\a_{31}&0&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&0&0\\a_{21}&x&0\\a_{31}&0&x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&a_{12}&a_{13}\\0&a_{22}&a_{23}\\0&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}x&a_{12}&0\\0&a_{22}&0\\0&a_{32}&x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&0&a_{13}\\0&x&a_{23}\\0&0&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x\end{vmatrix}=x^3+(a_{11}+a_{22}+a_{33})x^2+$$

$$+\left(\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\right)x+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

令

$$\sigma_1=\sum_{i=1}^{3}a_{ii},\quad \sigma_2=\sum_{1\le i<j\le 3}\begin{vmatrix}a_{ii} & a_{ij}\\ a_{ji} & a_{jj}\end{vmatrix},\quad \Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

则

$$\Delta(x)=x^3+\sigma_1x^2+\sigma_2x+\Delta$$

例11可以推广到n阶行列式的情形，即是

$$\begin{vmatrix}a_{11}+x & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}\\ \cdots\cdots & & \ddots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+x\end{vmatrix}=x^n+\sigma_1x^{n-1}+\cdots+\sigma_{n-1}x+\sigma_n \tag{10}$$

其中

$$\sigma_1=\sum_{i=1}^{n}a_{ii};\quad \sigma_2=\sum_{1\le i_1<i_2\le n}\begin{vmatrix}a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2}\\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2}\end{vmatrix},\quad \cdots\cdots$$

$$\sigma_k=\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\begin{vmatrix}a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k}\\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k}\end{vmatrix},\quad \cdots\cdots$$

$$\sigma_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

（五）克莱姆定理

在（一）中，我们用二阶、三阶行列式表示二元一次方程组和三元一次方程组的解，现在我们把它推广到n元一次方程组的情形。

克莱姆定理　如果方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{11}$$

的系数行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

则方程组（11）的解是

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}\ ,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}\ ,\ \cdots,\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$$

其中Δ_i（$i=1, 2, \cdots, n$）表示以（11）的常数列代替△的第i列得到的行列式。

证：设A_{ij}为△中元素a_{ij}的代数余子式。以A_{11}，A_{21}，…，A_{n1}分别乘（11）的第一个、第二个、…第n个方程的两边，然后相加，得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1}\right)x_1+\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i2}A_{i1}\right)x_2+\cdots+\left(\sum_{i=1}^{n} a_{in}A_{i1}\right)x_n=\sum_{i=1}^{n} b_iA_{i1}$$

由公式（7），（8）知道，上式x_1的系数等于△，x_2，x_3，…，x_n的系数都等于0，等式右边恰好是Δ_1按第一列的展开式，所以

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}$$

同理，如果用△中第二列各元素的代数余子式分别乘（11）中的第一、第二、…、第n个方程两边，然后相加，便得到

$$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}$$

照此类推，得

$$x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}\ ,\ \cdots,\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$$

例12　解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2 \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2 \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0 \end{cases}$$

解：系数行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}=-142\neq 0$$

故可用克莱姆定理求解，而

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{vmatrix}=-142\ ,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 11 \end{vmatrix}=-284$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 0 & 11 \end{vmatrix}=-426\ ,\quad \Delta_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=142$$

$$\therefore x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-142}{-142}=1\ ,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-284}{-142}=2\ ,$$