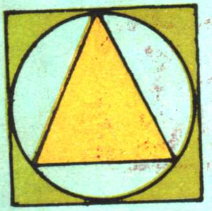
张嘉瑾　张　杰编著



高中数学综合复习

填空选择一百例串讲

复旦大学出版社

高中数学综合复习

填空选择一百例串讲

张嘉瑾　张　杰　编著

复旦大学出版社

内 容 提 要

本书是作者根据教学大纲和多年的教学实践编写而成的。书中以串讲的形式，对一百个具有一定深度与难度的例题进行了分析和解答，将高中数学中的各部分知识有机地结合起来，并尽可能地引伸和发挥。因此，书中实际讲题近六百例。另外，书后还附有适量的综合练习题，以强化例题中所介绍的方法和技巧，便于教师在教学中进行讲评。

本书具有形式新颖、题目小巧灵活等特点，适用于中学生、中学教师和师范院校学生。

高中数学综合复习

填空选择一百例串讲

张嘉瑾　张　杰　编著

复旦大学出版社出版

上海国权路579号

浙江上虞汤浦印刷厂排版

新华书店上海发行所发行　江苏如东印刷厂印刷

开本　787×1092　1/32　印张　12.875　字数　298,000

1989年4月第1版　　1989年4月第1次印刷

印数　1—30,000

ISBN7-309-00244-X/G·44

定价：[redacted]元

3.40

前　　言

如何进一步深刻理解基本概念？怎样熟练、灵活地运用基本技能？在高中综合复习阶段，采取什么样的形式以及选择什么样的例题才能更好地激发学生的学习兴趣？为了解决这些问题，我们在教学中进行了一种新的尝试，即采用填空选择串讲的办法。

所谓串讲，基于下面两个想法：

一、选择、填空题交替出现。选择题多变，填空题小巧，因此，它们各有千秋。一道好的选择题，不一定可以改编成一道好的填空题；而一道精彩的选择题，往往在于选择巧妙的构造和安排。反之，一道填空题，也不是随便可以改编成一道满意的选择题的。这两种题目类型不同，容量不同，内涵不同，考查学生的基点也不同。因此，不能死般硬套，而要根据需要，灵活选取。

二、横向联系，纵向发展；抓住一点，串成一线。从而使基础知识系统化、将基本技能专门化。并且，还根据每题的特点，尽可能地引伸和发挥。这样，将高中阶段的全部数学知识和方法有机地、系统地综合起来。

本书共选一百例。由于对每道题都有不同程度的联想和发挥，因此，实际讲题近六百题。本书选题的宗旨是：小、巧、活，许多题目都是自编或改编的。

书后的综合练习题能帮助读者强化例题中所介绍的方法和技巧，并便于教师在教学中进行讲评。

串讲一百例虽不能分章节，但我们还是力求按照代数——

三角函数——立体几何——解析几何这样的次序讲解。

本书的目的是希望增强学生对基本概念的理解能力，提高学生熟练解题的能力。

由于时间仓促，水平有限，错误和缺点一定不少，请读者指正。

作　者

1988年11月

目　　录

第一部分　例　　题

1. 已知 $M=\{x|x=a^2+2a+4,\ a\in Z\}$，$N=\{y|y=b^2-4b+6,\ b\in Z\}$，则 M、N 之间的关系是…………（　　）

(A) $M\subset N$；　(B) $N\subset M$；　(C) $M=N$；　(D) M 与 N 之间没有任何包含关系。

注：本题及以后各选择题中供选择的四个答案中有且只有一个答案是正确的。

解　取 $a=0$，则 $4\in M$；但 $4\notin N$，若不然，则

$$b^2-4b+6=4,$$

即

$$b^2-4b+2=0,$$

$\therefore$

$$b\notin Z。$$

又取 $b=0$，$6\in N$，但 $6\notin M$，因此，M、N 之间无包含关系。

应选（D）。

联想与发挥：当心题设中的小条件

（1）已知 $M=\{x|x=a^2+2a+4,\ a\in R\}$，$N=\{y|y=b^2-4b+6,\ b\in R\}$，则 M、N 之间的关系是…………（　　）

(A) $M\subset N$；(B) $M\supset N$；(C) $M=N$；(D) M 与 N 之间无包含关系。

将题1中的条件 a、$b\in Z$ 改成 a、$b\in R$ 后，其结果就截然不同了。

解　$\because$　　$M=\{x|x=(a+1)^2+3,\ a\in R\}$，

$\therefore$　　$x\in[3,+\infty)$。

又　　$N=\{y|y=(b-2)^2+2,\ b\in R\}$，

∴　$y\in[2,+\infty)$，即 $N\supset M$。

应选 (A)。

(2) 设 $M=\{x|x=a^2+5a+4,\ a\in Z\}$，$N=\{y|y=b^2-5b+4,\ b\in Z\}$，则 M、N 之间的关系是……………… (　　)

(A) $M\subset N$；(B) $M\supset N$；(C) $M=N$；(D) M 与 N 之间无包含关系。

解略，易知 $M=N$。因此，应选 (C)。

(3) $M=\{x|x=1,\ x\in R\}$，$N=\{(x,y)|x=1,\ y\in R\}$，则 M、N 之间的关系是……………………………………… (　　)

(A) $M\subset N$；(B) $M\supset N$；(C) $M=N$；(D) M 与 N 之间无包含关系。

解　M 中的元素是数轴上的点；N 中的元素是两维空间中的数对；两者无任何包含关系。因此，应选 (D)。

许多学生选了 (A)，出错的原因是对两集合中元素的属性弄不清。

(4) 集合 $M=\{(x,y)|x\in R,\ y>0\}$，集合 $N=\{(x,y)|x\in R;\ y=|x|\}$，则下列关系中正确的是……………… (　　)

(A) $M\subset N$；(B) $M\supset N$；(C) $M=N$；(D) M 与 N 之间无包含关系。

解　应选 (D)。

(5) 已知 $M=\{a|a=2\cos^2\frac{5m\pi}{24}-1,\ m\in N\}$，$P=\{b|b=1-2\sin^2\frac{n\pi}{24},\ n\in N\}$，那么 M 与 P 之间的关系是

……………………………………………………………… (　　)

(A) $M\subset P$；(B) $M\supset P$；(C) $M=P$；(D) M 与

N 之间无包含关系。

解 ∵ $$M=\left\{a|a=\cos\frac{5m\pi}{12}\quad m\in N\right\},$$

$$P=\left\{b|b=\cos\frac{n\pi}{12}\quad n\in N\right\}。$$

显然 $M\subseteq P$，易证 $P\subseteq M$。因此，应选（C）。

2．非空集合 $S\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，并且对于 S 中的元素还必须满足：当 $a\in S$ 时，必有 $6-a\in S$。试问符合这种特点的集合 S 一共有________个？

解法一 把 1 与 5，2 与 4，3 看成是三个大元素，则符合题意的集合 S 一共有

$$C_3^1+C_3^2+C_3^3=7\ (个)。$$

解法二 若 S 是单元素集，则只有 $S=\{3\}$ 适合题意。而满足条件的双元素集仅有两个：$S=\{1,5\}$，$S=\{2,4\}$，三元素集有两个：$S=\{1,3,5\}$，$S=\{2,3,4\}$，四元素集有一个：$S=\{1,2,4,5\}$；另外，全集 $S=\{1,2,3,4,5\}$ 也适合题意

∴ 适合题意的集合共有 7 个。

联想与发挥：子集与包含、真包含

(1) 在自然数集上，满足 $x\in M$，且 $10-x\in M$ 的所有集合 M 的个数是________。

解 ∵ $$10-x\in M,\quad M\subset N,$$

∴ $$10-x\in N,\quad 1\leqslant x\leqslant 9。$$

于是可知

$$M\subseteq\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}。$$

将 M 中的元素分组如下：

$$(1,9),(2,8),(3,7),(4,6),(5)。$$

于是，适合题意的集合 M 的个数为

$C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5=2^5-1=31$（个）。

（2）集合 $A=\left\{n \mid -\frac{1}{2}\leqslant\log_{\frac{1}{n}}2\leqslant-\frac{1}{3},\ n\in Z\right\}$，则集合 A 的子集共有______个。

解 ∵ $$-\frac{1}{2}\leqslant\log_{\frac{1}{n}}2\leqslant-\frac{1}{3},$$

∴ $$4\leqslant n\leqslant 8。$$

又 $$n\in N,$$

∴ A 中共有5个元素，集合 A 的子集共有 $2^5=32$（个）。

（3）已知集合 $P\subset M=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，集合 $Q\subset N=\{b_1,b_2,\cdots b_n\}$，且 $M\cap N=\phi$，则集合 $P\cup Q$ 的个数为下列答案中的……………………………………………………（　）

（A）mn；（B）2^{m+n}；（C）$2^{m+n}-2^m-2^n+1$；

（D）$(2^m-2)(2^n-2)$。

解 ∵ M、N 中的元素各不相同，

又 P、Q 分别为 M、N 的真子集，

∴ $P\cup Q$的个数为 $(C_m^0\cdot C_n^0+C_m^0\cdot C_n^1+\cdots+C_m^0\cdot C_n^{n-1})+(C_m^1\cdot C_n^0+C_m^1\cdot C_n^1+\cdots+C_m^1\cdot C_n^{n-1})+\cdots+(C_m^{m-1}\cdot C_n^0+C_m^{m-1}\cdot C_n^1+\cdots+C_m^{m-1}\cdot C_n^{n-2}+C_m^{m-1}\cdot C_n^{n-1})=C_m^0(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^{n-1})+C_m^1(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^{n-1})+\cdots+C_m^{m-1}(C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^{n-2}+C_n^{n-1})=(2^n-1)\cdot(C_m^0+C_m^1+\cdots+C_m^{m-2}+C_m^{m-1})=(2^n-1)(2^m-1)$。

应选（C）。

（4）集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{x\mid x\subseteq A\}$，$C=\{x\mid x\in A,\ x\in N\}$，则 A、B、C 之间的包含或属于关系分别是______。

解 ∵ $$B=\{x\mid x\subseteq A\},$$

$\therefore$ $$B=\{\phi,\{0\},\{1\},\{1,0\}\}。$$

又 $$C=\{x\,|\,x\in A,x\in N\}=\{1\},$$

因此，A、B、C之间的包含或属于关系分别是

$$A\in B,\quad C\in B\quad C\subset A。$$

3. 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，则从 $A\to A$ 的、有且仅有两个元素成自身对应的一一映射共有______种。

解 如图 1 所示，假如 1 与 2 两个元素成自身对应，那么剩下的三个元素构成一一对应的还有 P_3^3 种。但必须除去三个元素中还可能有自身对应的 4 种，因此，选定元素 1、2 以后，适合题意的对应只有两种。于是本题的结果是 $2C_5^2=20$ 种。

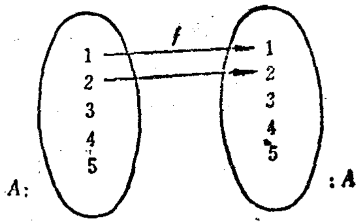


图 1

联想与发挥：改变题设条件

(1) 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，则从 $A\to A$ 的、有且仅有四个元素成自身对应的一一映射共有______种。

解 从 $A\to A$ 的、有且仅有四个元素成自身对应的一一映射不可能存在。

(2) 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，则从 $A\to A$ 的映射共有____种。

解 A 中的每一个元素都有五种不同的对应，所以，从 $A\to A$ 共有 5^5 种不同的映射。

(3) 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，则从 $A\to A$ 的一一映射共有______种。

解 从 $A\to A$ 的一一映射共有 P_5^5 种。

(4) 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{6,7,8\}$，则从 $A\to B$ 的映

射共有________种。

解 A 中的每一元素都有三种不同的对应，因此，从 $A\to B$ 共有 3^5 种不同的映射。

4. 从集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ 到集合 $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\}$ 作一一映射，若 a_1 的像不是 b_1，b_5 的原像不是 a_5，这样的映射共有________种。

在解答这道题之前，我们先看下面两题：

(1) 五人排队，甲不排在队首，乙不排在队尾的排法共有________种。

解 五人任意排成一队共有 P_5^5 种不同的排法；

甲排在队首的排法有 P_4^4 种；

乙排在队尾的排法有 P_4^4 种；

在 $P_5^5-2P_4^4$ 种排法中，甲排在队首同时乙排在队尾时的情况重复了两次，于是满足题设条件的排法共有 $P_5^5-2P_4^4+P_3^3=78$ 种。

(2) 0,1,2,3,4五个数组成五位数，若 3 不在个位，则不同的五位数共有________个。

解 与(1)情况相同。0 不在首位，3 不在末位，则可组成的五位数共有 $P_5^5-2P_4^4+P_3^3=78$ 个。

至此，题 4 的结果就一清二楚了，即同样是 78 种。

联想中的联想：改变题设条件

(1) 五人排队，甲不排在队首且不排在队尾的排法共有________种。

解 五人进行全排列是 P_5^5 种。

若甲在首，则有 P_4^4 种排法；若甲在尾，则有 P_4^4 种排法。

因此，适合题意的排法共有 $P_5^5-2P_4^4=72$（种）。

(2) 0,1,2, 3, 4 五个数，可以组成 2 不在百位的五位数____个。

解 适合题意的五位数还是 $P_5^5-2P_4^4+P_3^3=78$ (个)。

5. 已知 $A=\{x|x^2+3x-10<0\}$，$B=\{x||x|=y+1,\ y\in A\}$，则 $A\cap B=$________。

解 $\because$ $A=\{x|x^2+3x-10<0\}=\{x|-5<x<2\}$，

$B=\{x||x|=y+1,y\in A\}=\{x|0<|x|<3\}$

$=\{x|-3<x<3\}$，

$\therefore$ $A\cap B=\{x|-3<x<2\}$。

联想与发挥：集合的交与并

(1) 设 $M=\{z||z-\sqrt{7}|+|z+\sqrt{7}|=8\}$，$N=\{z|z=k(1+i),\ k\in R\}$，则 $M\cap N=$________。

解 由 $\begin{cases}|z-\sqrt{7}|+|z+\sqrt{7}|=8\\ z=k(1+i)\end{cases}$

得 $\sqrt{(k-\sqrt{7})^2+k^2}+\sqrt{(k+\sqrt{7})^2+k^2}=8$，

$\therefore$ $$k=\pm\frac{12}{5},$$

因此 $$M\cap N=\left\{\frac{12}{5}(1+i),-\frac{12}{5}(1+i)\right\}。$$

(2) 设 $M=\{(x,y)||xy|=1,\ x>0\}$，$N=\{(x,y)|\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,ctg}y=\pi\}$，那么下列答案中正确的是……(　)

(A) $M\cup N=M$； (B) $M\cup N=N$； (C) $M\cap N=M$； (D) 以上都不对。

解 由 $|xy|=1$，$x>0$ 得

$xy=1$ $(x>0,y>0)$ 或 $xy=-1$，$(x>0,y<0)$。

考虑集合 N。由

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}x+\operatorname{arc\,ctg}y)=0。$$

得

$$xy=-1。$$

而欲使 $\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,ctg} y=\pi$ 成立，必须有

$$x>0,\quad y<0。$$

$\therefore$ $$M\supset N。$$

应选 (A)。

(3) 已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\log_3(x^2-3)$ 的定义域为 F，函数 $g(x)=\log_3\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3)$ 的定义域为 G，则下列答案中正确的是……………………………………………………( )

(A) $F\cap G=\phi$； (B) $F\cup G=F$；

(C) $F\cap G=G$； (D) $F\cup G=R$。

解 $f(x)$ 的定义域为

$$\begin{cases}x^2-3>0;\\ \log_3(x^2-3)>0,\end{cases}$$

$\therefore$ $$x>2 \quad 或 \quad x<-2,$$

即 $$F=\{x|x>2 \quad 或 \quad x<-2\}。$$

$g(x)$ 的定义域为

$$\begin{cases}x^2-3>0;\\ \log_{\frac{1}{3}}(x^2-3)>0,\end{cases}$$

$\therefore$ $$\sqrt{3}<x<2 \quad 或 \quad -2<x<-\sqrt{3},$$

即 $$G=\{x|\sqrt{3}<x<2 \text{ 或 } -2<x<-\sqrt{3}\},$$

$\therefore$ $$F\cap G=\phi。$$

应选 (A)。

(4) 集合 $A=\{$函数 $y=x^2+2bx$ 的最小值$\}$，集合 $B=\{$函数 $y=2x+b$，$x\in[0,1]$ 的最小值$\}$，$b\in R$，则 $A\cap B=$ ________，$A\cup B=$ ________。

解 由题意可知

$$A=\{x|x=-b^2,\ b\in R\},$$

$$B=\{x|x=b,\ b\in R\},$$

$$\therefore \quad A\cap B=\{0\},\ \{-1\}\text{ 或者 }\phi$$

$$A\cup B=\{x|x=b,\ b\in R\}$$

(5) 设 $M=\{x|x=t^2,\ t\in R\}$，$N=\{x|x=3-|t|,\ t\in R\}$，那么 $M\cap N=$ ________。

解 $\because$ M 中最小的元素为 0，N 中最大的元素为 3

$$\therefore \quad M\cap N=\{x|0\leqslant x\leqslant 3,\ x\in R\}。$$

6. 方程 $y^2=px+q$ 与方程 $y=px+q$ ($p\neq 0$) 所表示的曲

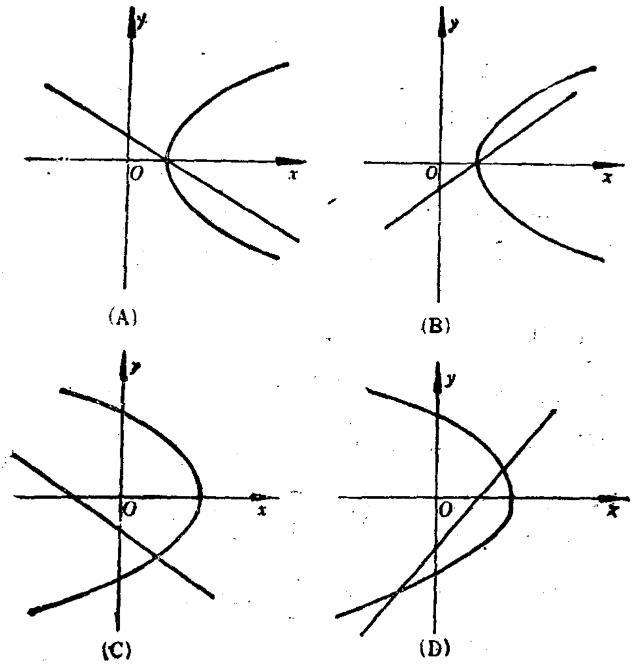


图 2

线可能是图 2 中的……………………………………………( )

解 解这题时，要注意到下面两点：第一，两方程所表示的曲线在 x 轴上交于同一点；因此，排除 (C)、(D)；

第二，若抛物线开口朝右，则直线的斜率大于零。

应选 (B)。

联想和发挥：函数及其图像

(1) 函数 $y=2\sin(\arccos x)$ 的图像是 ……………( )

(A) 半圆； (B) 半椭圆； (C) 射线； (D) 直线。

解 $\because$ $$y=2\sin(\arccos x),$$

$\therefore$ $$y=2\sqrt{1-x^2}。$$

方程表示的图像是 x 轴上方的椭圆。

应选 (B)。

(2) 函数 $y=4^{\log_{16}x^{-2}}$ 的 图 像是图 3 中 的 ………( )

解 易知，函数 $y=4^{\log_{16}x^{-2}}$ 为偶函数，所以它的图像关于 y 轴对称。

应选 (D)。

(3) 极坐标方程 $\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\rho-3}=0$ 所表示 的 图像是图4 中的 ……………………………………………( )

解 $\because$ $$\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\rho-3}=0;$$

$\therefore$ $$\theta=\frac{\pi}{4} \text{ 或者 } \rho=3。$$

但由定义域可知，$\rho\geqslant3$。

应选 (C)。

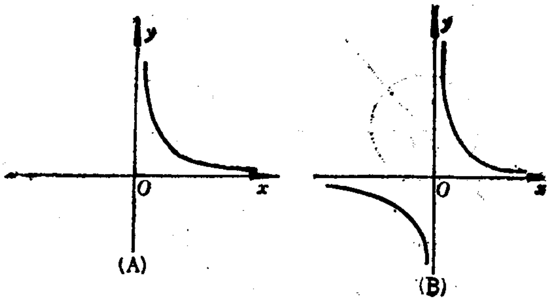


图 3

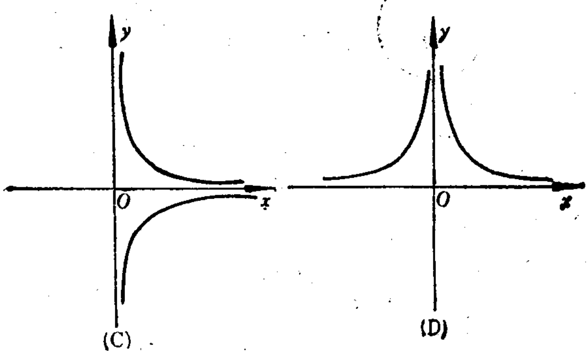


图 3

(4) 极坐标方程 $\begin{cases}\theta=\dfrac{\pi}{4};\\ \sqrt{\rho-3}=0\text{。}\end{cases}$ 所表示的曲线是______。

解 由 $\begin{cases}\theta=\dfrac{\pi}{4};\\ \sqrt{\rho-3}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\theta=\dfrac{\pi}{4};\\ \rho=3,\end{cases}$

∴ 方程表示的曲线是一点 $\left(3,\dfrac{\pi}{4}\right)$。