21

高等学校规划教材
GAODENG XUEXIAO GUIHUA JIAOCAI

现代控制理论基础

李少康 主编

西北工业大学出版社

高等学校教材

现代控制理论基础

李少康 主编

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书介绍了现代控制理论最基本的内容，着重讨论了系统的状态空间模型、可控性、可测性和稳定性概念，同时扼要介绍了最优控制问题，另外还介绍了多项式矩阵和矩阵分式，为学习系统多项式矩阵描述和矩阵分式描述奠定必要的数学基础。

本书可作为非自动控制专业高年级本科生和研究生的教材，也可供有关工程技术人员阅读、参考。

图书在版编目（CIP）数据

现代控制理论基础/李少康主编．—西安：西北工业大学出版社，2005.12
ISBN 7-5612-2042-1

Ⅰ．现…　Ⅱ．李…　Ⅲ．现代控制理论　Ⅳ．O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 137652 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号　邮编：710072
电　　话：(029)88493844　88491757
网　　址：www.nwpup.com
印 刷 者：陕西向阳印务有限公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：20.5
字　　数：498 千字
版　　次：2005 年 12 月第 1 版　2005 年 12 月第 1 次印刷
定　　价：28.00 元

前言

实现四个现代化，这是当前大家十分关心的问题。谈到现代化，就离不开机械化和自动化。在科学发达、技术进步的今天，自动化和现代化就好像是双胞胎，各种生产机械、武器装备、科学仪器，凡是现代化的几乎也都是自动化或半自动化的。因此，自动化水平的高低已经成为衡量工农业生产、国防、科学技术现代化程度的显著标志之一。所谓自动化，简单地讲，就是机器能自动模仿或代替人去做各种工作。为了适应现代化工作的需要，就必须掌握自动化技术的基本理论。经典控制理论特别适合分析和处理单输入、单输出的单变量线性定常系统的控制问题，而对于时变系统、复杂的非线性系统以及多输入、多输出系统却显得无能为力，另外经典控制理论有局限性，这表现在它是系统性能的端部描述，仅考虑输入和输出变量，且常是零初始条件。

1960 年前后提出的一种新方法——状态空间法，并逐步形成现代控制理论。用它可以分析设计复杂的、高精度要求的系统，而且常采用对于控制过程来说是直接的时域方法进行系统分析研究，因此，有可能针对由时域给出的性能指标来实现系统的最优控制。这一方法比起经典理论依据复数域、频率域的间接指标来定性地了解和评价系统的品质要直观得多。虽然状态这个概念并不是一种新概念，长期以来就应用于经典力学和其他一些领域中，例如相平面法就是二维状态空间法，但是从经典控制理论发展到现代控制理论并不是方法上、理论上的简单延伸和推广，而是人们认识上的一个飞跃。它使得人们通过直接量测的输入量与输出量进而认识了系统的状态变量之后，就能更深刻、更全面地把握控制系统的运动规律。

现代控制理论包括的内容非常丰富，本书主要介绍其最基本的知识。其中，第一至六章以线性定常系统为例，研究如何建立系统在状态空间的表达式，并以此表达式作为系统的数学模型进而讨论系统的可控性、可观测性及稳定性和极点配置等控制问题；第七章介绍多项式矩阵和矩阵分式；第八至十二章扼要介绍最优控制的有关问题。第一章、第七章以及后续各章在内容上有一定的独立性，可视具体情况适当取舍。

全书由李少康、林燕合编，其中林燕编写了第一章，李少康编写了其余各章并对全书进行了统编。在本书的编写过程中，参阅了国内外大量同类书籍，在此对各位作者表示衷心感谢。

西安工业学院各级领导对本书的出版给予了大力支持和热情帮助，在此表示感谢。

编　者

2005年10月

目录

第一章 矩阵基本知识

阅读本章，读者应具备一定的线性代数知识。

1.1 基本概念和定义

矩阵常用来简化复杂的数学表达式。矩阵表示法并不能减少解数学方程式所需要的工作量，但却常使方程式易于统一处理。

例如：n 个联立代数方程组

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}X_2 + a_{n2}X_2 + \cdots + a_{mi}X_n = b_n \end{cases}$$

可用矩阵方程表示为

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$$

矩阵定义：矩阵是按矩形阵列排列的若干个元素的集合，或者由 $m \times n$ 个元素有次序地排列成 m 行 n 列的表，叫做 $m \times n$ 阶矩阵。

如 $m \times n$ 阶矩阵表示为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

或

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

式中，a_{ij} 叫做矩阵的第 i 行第 j 列元素。

按国家标准规定，以黑体符号表示矩阵。

方阵：行数和列数相同的矩阵叫做方阵。值得注意的是，方阵与行列式是两个不同的概念。n 阶方阵只是由 n^2 个元素排列成的一个正方形的表，而 n 阶行列式却是由 n^2 个数按一定规律进行运算，最后得到一个唯一的数值，即行列式表示一个数值。

列矩阵：只有一列的矩阵称为列矩阵，又称为列向量。

$n \times 1$ 阶矩阵又称为 n 维列向量，如

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

行矩阵：只有一行的矩阵称为行矩阵，又称为行向量。

$1\times m$ 阶矩阵又称为 m 维行向量，如

$$\boldsymbol{X}=[X_{11}\quad X_{12}\quad \cdots\quad X_{1m}]=[X_1\quad X_2\quad \cdots\quad X_m]$$

这样常可把矩阵看成是由列向量或行向量所组成的，如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=[\boldsymbol{a}_1\quad \boldsymbol{a}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{a}_n]$$

式中

$$\boldsymbol{a}_i=\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$$

或者

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^* \\ \boldsymbol{a}_2^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m^* \end{bmatrix}$$

式中

$$\boldsymbol{a}_i^*=[a_{i1}\quad a_{i2}\quad \cdots\quad a_{in}]$$

对角矩阵：若一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 除主对角线元素外，其余的元素都是零，就称 $\boldsymbol{A}$ 为对角矩阵，记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

单位阵或幺阵：在对角矩阵中，当主对角线上的元素全等于 1 时，则称此对角矩阵为单位阵（或幺阵），记为

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}=\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1)$$

零阵：指所有元素全等于零的矩阵，例如

$$\boldsymbol{O}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵相等：两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 只有在满足条件 ① 行数和列数分别相等；② 对应的元素都相等时，才是彼此相等的，记为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$$

对称矩阵：如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 对于所有的元素满足条件 $a_{ij} = a_{ji}$，那么方阵 $\boldsymbol{A}$ 称为对称矩阵。

例如 $\begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 5 & 0 & 10 \\ 1 & 10 & -1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ 等均为对称矩阵。

转置矩阵：如果 $n \times m$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行、列互换，那么由此而得的 $m \times n$ 阶矩阵叫做 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵。以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$（或 $\boldsymbol{A}'$）表示，如

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

反号对称矩阵：如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 等于它的转置矩阵的负值，即 $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，那么方阵 $\boldsymbol{A}$ 叫做反号对称矩阵。

不言而喻，对称矩阵有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。

共轭矩阵：如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的复数元素分别用它们各自的共轭复数来替换，那么由此得到的矩阵叫做 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵。用 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 表示，如

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1+\mathrm{j} & -3-3\mathrm{j} & -1+4\mathrm{j} \\ -1+\mathrm{j} & -1 & -2+4\mathrm{j} \end{bmatrix}$$

则

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1-\mathrm{j} & -3+3\mathrm{j} & -1-4\mathrm{j} \\ -1-\mathrm{j} & -1 & -2-4\mathrm{j} \end{bmatrix}$$

逆阵：设有一个方阵 $\boldsymbol{A}$，若存在另一个方阵 $\boldsymbol{B}$ 满足关系式

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$$

则把方阵 $\boldsymbol{B}$ 叫做 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记为

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$$

奇异矩阵：如果方阵所对应的行列式为零，则把该方阵称为奇异矩阵。

非奇异矩阵（满秩矩阵）：如果方阵所对应的行列式不为零，称之为非奇异矩阵。

矩阵的秩：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩是 $\boldsymbol{A}$ 中线性独立的列（或行）向量的最大数目（即列向量或行向量线性无关向量的最大个数），或 $\boldsymbol{A}$ 中包括的最大的非奇异矩阵的阶数，即矩阵所对应的不等于零的子行列式的最大阶数。例如最大阶数为 r，记为

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = r$$

向量线性无关指的是，若

$$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$$

式中，$\boldsymbol{a}_i$ 为 n 维向量；k_i 为常数，且 $i = 1,2,\cdots,m$，仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$ 时，该式成立，则称 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$ 线性无关，否则线性相关。例如

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1, \qquad \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

余子式 M_{ij}：从 $n \times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中去掉第 i 行、第 j 列所得的 $(n-1) \times (n-1)$ 阶矩阵所对

应的行列式叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的余子式 M_{ij}。

余因子式 A_{ij}：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中元素 a_{ij} 的余因子式定义为 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，也就是说方阵中元素 a_{ij} 的余因子式 A_{ij} 是用 $(-1)^{i+j}$ 乘以从 $\boldsymbol{A}$ 中去掉第 i 行和第 j 列后构成的矩阵所对应的行列式。

伴随矩阵：矩阵 $\boldsymbol{B}$，其第 i 行和第 j 列元素等于 A_{ji} 时，称 $\boldsymbol{B}$ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，记为

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{adj}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix},\qquad \text{即}\quad b_{ij}=A_{ji}$$

例如，求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

的伴随矩阵。

由于 $A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot a_{22}=a_{22}$； $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot a_{21}=-a_{21}$；

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot a_{12}=-a_{12}$； $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot a_{11}=a_{11}$

故

$$\mathrm{adj}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$$

可见，对于二阶矩阵其主对角线上的元素互换位置，其余元素数值不变，符号反号即构成了原矩阵的伴随矩阵。

正交矩阵：若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 和它的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 满足如下关系式：

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}\quad \text{或}\quad \boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵。

三角矩阵：形如

$$\begin{bmatrix}a_{11} & & * & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & a_{nn}\end{bmatrix}$$

的方阵称为上三角矩阵。式中，* 为任意数。

形如

$$\begin{bmatrix}b_{11} & & 0 & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & * & & b_{nn}\end{bmatrix}$$

的方阵称为下三角矩阵。式中，* 为任意数。

当 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=1$，$b_{11}=b_{22}=\cdots=b_{nn}=1$ 时，分别称为单位上三角阵和单位下三角阵。

矩阵的迹：方阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹定义为主对角线上的元素之和，记为 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}$，即

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

矩阵的范数：范数是一个度量数量大小的量。如同向量的范数一样，矩阵的范数也有许多种定义方法。例如范数可以是最大元素的大小，也可以为矩阵中所有元素模之和。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 常用的范数是

$$\|\boldsymbol{A}\| = [\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})]^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

1.2 基本运算

1. 矩阵的加减法

两个矩阵只有对应行数和列数相等时才能进行加减法运算。此时所构成的新矩阵其元素由该两矩阵对应元素相加减而组成。

2. 矩阵的乘法

标量乘矩阵相当用该标量遍乘矩阵的每个元素，因此有

$$|a\boldsymbol{A}| = a^n |\boldsymbol{A}|$$

式中，$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵。

这与数乘行列式的法则是不相同的。

矩阵乘矩阵，只有第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时两矩阵才能相乘。运算法则是乘积矩阵的第 i 行第 j 列元素值为第一个矩阵第 i 行的元素与第二个矩阵第 j 列的元素对应乘积之和，即

$$\boldsymbol{C}_{m\times p} = \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times p}$$

式中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

例如

$$\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = [0]$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$$

可见，矩阵相乘，一般不满足交换律，即 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$。由矩阵乘法运算规则，很容易证明：

(1) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$。设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，那么

$$\boldsymbol{C}_{n\times n} = \boldsymbol{AB},\quad \boldsymbol{D}_{m\times m} = \boldsymbol{BA}$$

式中

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{ki},\qquad d_{kk} = \sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}$$

则

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}\boldsymbol{C} = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{ki}\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik}\right)=\sum_{k=1}^{m}d_{kk}=$$
$$\mathrm{tr}\boldsymbol{D}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$$

(2) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。设

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB},\quad \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{F},\quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{G},\quad \boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{FG}$$

式中，$\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times p$ 阶矩阵，则

$$e_{ij}=c_{ji}=\sum_{k=1}^{m}a_{jk}b_{ki}$$

$$p_{ij}=\sum_{k=1}^{m}f_{ik}g_{kj}=\sum_{k=1}^{m}b_{ki}a_{jk}$$

可见
$$e_{ij}=p_{ij}$$

即
$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{P}\quad 或\quad (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵，则其积可以是非对称的，这是因为此时

$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{BA}\neq\boldsymbol{AB}$$

如
$$\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}$$

一般说来，矩阵相乘，乘积阵的秩不大于每个因子矩阵的秩，但若用满秩阵乘另一个矩阵 $\boldsymbol{A}$，则乘积阵的秩就等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，另外有 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=\mathrm{rank}(\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}})$。

例如
$$\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

3. 分块矩阵

把一个矩阵进行分块运算不仅使得计算方便，而且矩阵之间的关系更为清楚明了，具有十分重要的理论意义。矩阵分块不但要满足所有子块行数、列数之和，分别等于原矩阵的行数、列数，而且根据不同的运算还应满足其他条件。

矩阵加减法运算时，两矩阵中相应子块应具有相同的行数和列数。

矩阵进行乘法运算时，第一个矩阵所分的子块的列数要与第二个矩阵所分的子块的行数相同，且第一个矩阵的列子块所含列数应等于第二个矩阵相应行子块所含的行数，如

$$\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}\\ \quad p_1\quad\ p_2\end{array}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\\boldsymbol{B}_2\end{bmatrix}\begin{array}{l}q_1\\q_2\end{array}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2\end{bmatrix}$$

式中
$$p_1=q_1,\quad p_2=q_2$$

可见，矩阵分块后每个子块就如同矩阵的元素一样进行运算，但应该注意分块矩阵的转置为两次转置，首先把子块行列互换，然后再把每个子块转置。如

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{23}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}{}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{A}_{21}{}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{A}_{12}{}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{A}_{22}{}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

4. 矩阵的初等变换(满秩变换，保秩变换)

矩阵的初等变换包含如下内容：

(1) 矩阵的某一行(或列)乘以不为零的常数 k。

(2) 矩阵的某一行(或列)乘以不为零的常数 k 再加到另一行(或列)的对应的元素上去。

(3) 对调矩阵的任意两行(或列)。

利用矩阵的初等变换可求矩阵的秩，例如，设法使 $a_{11} \neq 0$，其余同行同列的元素全为零，然后再使 $a_{22} \neq 0$，继续变换等等。

5. 矩阵的求逆运算

设有一个满秩的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，求它的逆阵常用三种办法：

（1）如果已知伴随矩阵 $\mathrm{adj}\boldsymbol{A}$，则有

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\mathrm{adj}\boldsymbol{A}$$

（2）利用矩阵的初等变换求逆。通常为方便起见，总是将原矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与单位阵 $\boldsymbol{I}$ 排列在一起，同时进行初等行变换，当原矩阵成为单位阵 $\boldsymbol{I}$ 时，原单位阵就成为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即

$$[\boldsymbol{A} \;\vdots\; \boldsymbol{I}] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [\boldsymbol{I} \;\vdots\; \boldsymbol{A}^{-1}]$$

（3）利用分块矩阵求逆。

1）分块矩阵呈对角线方阵。若

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & & & \\ & \boldsymbol{A}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_{kk} \end{bmatrix}$$

式中，$\boldsymbol{A}_{ii}$ 为子方块方阵，那么由乘法法则很容易验证

$$\boldsymbol{A}^{n} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11}{}^{n} & & & \\ & \boldsymbol{A}_{22}{}^{n} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_{kk}{}^{n} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11}{}^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_{22}{}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_{kk}{}^{-1} \end{bmatrix}$$

2）分块矩阵求逆公式。设

$$\boldsymbol{A}_{n\times n} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{A}_{11}]_{k\times k} & [\boldsymbol{A}_{12}]_{k\times(n-k)} \\ [\boldsymbol{A}_{21}]_{(n-k)\times k} & [\boldsymbol{A}_{22}]_{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_{n\times n} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{B}_{11}]_{k\times k} & [\boldsymbol{B}_{12}]_{k\times(n-k)} \\ [\boldsymbol{B}_{21}]_{(n-k)\times k} & [\boldsymbol{B}_{22}]_{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix}$$

且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$，则

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$$

比较上式各元素相等的条件，得

① 若 $\boldsymbol{A}_{11}{}^{-1}$ 存在，则

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11}{}^{-1} + \boldsymbol{A}_{11}{}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{22}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}{}^{-1} & -\boldsymbol{A}_{11}{}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{22} \\ -\boldsymbol{B}_{22}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}{}^{-1} & \boldsymbol{B}_{22} \end{bmatrix} \tag{1-1}$$

式中

$$\boldsymbol{B}_{22} = [\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}{}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}]^{-1}$$

如果 $\boldsymbol{A}_{12} = \boldsymbol{O}$，则

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & O \\ -A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{1-2}$$

如果 $A_{21}=0$，则

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{1-3}$$

② 若 A_{22}^{-1} 存在，则

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} B_{11} & -B_{11}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}B_{11} & A_{22}^{-1}A_{21}B_{11}A_{12}A_{22}^{-1}+A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{1-4}$$

式中 $$B_{11}=[A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}]^{-1}$$

如果 $A_{12}=O$，则得式(1-2)，$A_{21}=O$，则得式(1-3)。

无论用式(1-1)还是用式(1-4)都可逐步求出方阵 A 的逆阵，例如用式(1-1)求逆阵，其步骤如下：

第一步：计算 $[A_{11}]_{1\times1}$ 的逆阵；

第二步：计算 $[A_{11}]_{2\times2}$ 的逆阵；

第三步：计算 $[A_{11}]_{3\times3}$ 的逆阵；

第四步：一直计算到 $[A_{11}]_{n\times n}$ 的逆阵。

例如：求 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 的逆阵。

第一步：计算 $$[A_{11}]_{1\times1}^{-1}=[3]^{-1}=\frac{1}{3}$$

第二步：计算 $[A_{11}]_{2\times2}^{-1}$。因为

$$[A_{11}]_{2\times2}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} [A_{11}]_{1\times1} & [A_{12}]_{1\times1} \\ [A_{21}]_{1\times1} & [A_{22}]_{1\times1} \end{bmatrix}$$

由式(1-1)知

$$B_{22}=[A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}]^{-1}=[-1-1\times\frac{1}{3}\times2]^{-1}=-\frac{3}{5}$$

$$B_{12}=-A_{11}^{-1}A_{12}B_{22}=-\frac{1}{3}\times2\times(-\frac{3}{5})=\frac{2}{5}$$

$$B_{21}=-B_{22}A_{21}A_{11}^{-1}=+\frac{3}{5}\times1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$$

$$B_{11}=A_{11}^{-1}-A_{11}^{-1}A_{12}B_{21}=\frac{1}{5}$$

由此

$$[A_{11}]_{2\times2}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

用它作为第三步分块矩阵 $[A_{11}]_{3\times3}$ 的逆阵 A^{-1}。

第三步：计算 $[A_{11}]_{3\times3}^{-1}=A^{-1}$。由于

$$\left[\begin{array}{cc:c} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ \hdashline -2 & 1 & -1 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

而
$$A_{11}^{-1}=[A_{11}]_{2\times2}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & -3\end{bmatrix}$$
依式(1－1)可得
$$A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}1 & -1 & -3\\3 & 5 & 7\\1 & 7 & 5\end{bmatrix}$$

3)矩阵反演公式。比较式(1－1)和式(1－4)中第一行,可得如下矩阵反演公式:
$$[A_{11}-A_{22}A_{22}^{-1}A_{21}]^{-1}=A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}[A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}]^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$$
$$A_{11}^{-1}A_{12}[A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}]^{-1}=[A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}]^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$$

6. 矩阵的因式分解

将方阵 A 分解成两个三角矩阵的乘积叫做矩阵的因式分解,即
$$A=LDU$$
式中,L 是单位下三角矩阵;U 是单位上三角矩阵;D 是对角阵。

矩阵可进行因式分解的条件是:方阵 A 的所有主子式非零。

利用矩阵乘法的结合律,上式可组合成为
$$A=L(DU) \tag{1-5}$$
或
$$A=(LD)U \tag{1-6}$$

以式(1－5)为例,由于 A 的行由 L 相应行乘以 (DU) 阵得到,A 的列由 L 阵乘以 (DU) 阵相应列得到,所以矩阵进行因式分解时,采用交替行列计算法就可求得 (DU) 和 L 各元素,即轮流计算 (DU) 的第 i 行和 L 的第 i 列 $(i=1,2,\cdots,n)$ 就可把矩阵 A 分解成两个三角矩阵的乘积。

例如
$$A=\begin{bmatrix}0 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\x_1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2 & x_3\\0 & x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2 & x_3\\x_1x_2 & x_1x_3+x_4\end{bmatrix}$$
比较得
$$x_2=0 \qquad x_3=2$$
$$x_1x_2=1 \qquad x_1x_3+x_4=3 \qquad \text{无解}$$

又如
$$A=\begin{bmatrix}2 & 2\\2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\x_1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2 & x_3\\0 & x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2 & x_3\\x_1x_2 & x_1x_3+x_4\end{bmatrix}$$
比较得
$$x_2=2 \qquad x_3=2$$
$$x_1x_2=2 \qquad x_1x_3+x_4=2$$
则
$$x_1=1 \qquad x_4=0$$
即
$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$$

说明不满足 A 的所有主子式非零时,某些情况下 A 仍能进行因式分解,但此时所得对角阵 D 其主对角线上元素不全非零。

同理得
$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$$

一般地,若 A 为对称矩阵,即 $A=A^{\mathrm{T}}$,此时 A 可分解为如下形式:
$$A=MM^{\mathrm{T}}$$
式中
$$M=L\sqrt{D}$$