

职工高中速成教材

立体几何与 平面解析几何

技术培训
职业高中

职工中专
职工中技

适用

冶金工业出版社

职工高中速成教材

立体几何与 平面解析几何

《职工高中速成教材》编写组 编

冶金工业出版社

职工高中速成教材
立体几何与平面解析几何
《职工高中速成教材》编写组 编

冶金工业出版社出版

(北京北河沿大街嵩祝院北巷86号)

新华书店北京发行所发行

轻工业出版社印刷厂印刷

787×1092 1/32 印张, 12 字数: 264千字
1987年5月第一版 1987年5月第一次印刷
印数00,001~7,950册
统一书号: 7062·4523 定价1.50元

出版说明

这套教材包括《语文》、《代数》、《立体几何与平面解析几何》、《物理》、《化学》五种，根据1985年11月出版的国家教育委员会制定的《职工业余中等学校教学大纲》编写，与我社已出版的《初中文化速成补习教材》配套使用。

在编写中，力求使其具有下述特点：

一、速成——全套教材总计583学时，其中《语文》130学时，《代数》131学时，《立体几何与平面解析几何》100学时，《物理》122学时，《化学》100学时。虽然教学时间减少了，但注意保留高中课程的基本内容和各学科的系统性，重点突出，简繁得当。

二、成套——为方便教师的教学，我社随后将出版与本教材配套的各科《教学参考书》（包括教学方法指导、习题解答、参考试题）。

三、多层次——在内容上分最低教学要求（适合1986～1990年中、高级技工培训及社会上各类职业高中）、一般教学要求（适合职工中专、中技）和较高教学要求（适合准备升入职工高等学校的学员）。

四、照顾成人学习的特点——与普通高中课本比较，本教材例题稍多、习题少，重在课堂消化，减少课外学习时间；在写法上，注意用生产和生活中常见的事例阐述书中的理论概念。

五、每章有总结，全书有使用说明——总结供复习，提高综合运用知识的能力，使用说明便于教师安排授课。

这套教材由北京教育学院部分教师和从事职工教育的专

职教师合作编写。编写工作得到冶金工业部劳动工资司和中国有色金属工业总公司教育培训部的大力支持，也得到了上海第一钢铁厂职工中等专业学校、重庆钢铁公司技工学校、武汉钢铁公司职工中学、首都钢铁公司技工学校的大力支持，特此致谢。

编写人员及分工如下：

《语文》江希泽(主编)、刘正基、赵镇；

《代数》刘嘉琨(主编)、王志和；

《立体几何与平面解析几何》曹福海、王占元、刘嘉琨(主编)；

《物理》国运之(主编)、李龙图、郑敏；

《化学》张学铭(主编)、史凤崑、汪立楚。

由于我们水平有限，这套教材能否达到预期的目的，还有待教学实践的检验。恳切希望读者对书中的缺点、错误提出批评和修订建议。

一九八六年二月

使用 说 明

为了适应各种专业对数学基础知识的不同要求,在本教材的教学内容及例题、练习和习题的配备上,进行了多层次安排。最低的教学要求,可以只讲解课本中的基本内容(不打星号的部分)和相应的例题,并完成相应章节的全部练习及习题中不带星号的作业;一般的教学要求,可适当增加教材中的选学内容(打星号的部分),并完成全部习题;对于较高的教学要求或准备升入高等职业学校的学员,除完成全部教学内容和练习、习题外,尚需学习每章复习小结中所安排的例题并完成复习题,以加深对知识的理解,提高综合运用知识的能力,以适应进一步学习的需要。建议课时数安排如下:

课 时 安 排

章 次	课 时	单 元						小 计
		一	二	三	四	五	六	
第一章		3	3	9	7			22
第二章		9	7	7				23
第三章		4	7	8				19
第四章		5	4	5	4	4	3	24
第五章		6	6					12
总 计								100

目 录

第一章 直线和平面	(1)
一 平面	(1)
二 空间两条直线	(11)
三 空间直线和平面	(27)
四 空间两个平面	(53)
第二章 多面体和旋转体	(92)
一 多面体	(92)
二 旋转体	(122)
三 多面体和旋转体的体积	(140)
第三章 直线	(181)
一 有向线段 定比分点	(181)
二 直线的方程	(192)
三 两条直线的位置关系	(209)
第四章 圆锥曲线	(245)
一 曲线和方程	(245)
二 圆	(258)
三 椭圆	(273)
四 双曲线	(286)
五 抛物线	(302)
六 坐标变换	(315)
第五章 极坐标和参数方程	(333)
一 极坐标	(333)
二 参数方程	(353)

第一章 直线和平面

在平面几何中，我们已经学习了一些平面图形（例如，三角形、四边形、圆等，这些图形上的点都在同一个平面内）的性质、画法、计算及其应用。但是，在日常生活和生产实践中，还会遇到长方体、圆柱、球等，这些图形上的点不都在同一个平面内，象这样的几何图形叫做空间图形。

立体几何的研究对象是空间图形，在本册的前两章中，我们将在平面几何知识的基础上，学习空间图形的性质、画法、计算和它们的应用。

一 平 面

1.1 平面及其表示法

生活中的桌面、镜面、黑板面以及平静的水面等，都给人们以平面的形象。几何里平面的概念就是从这样的一些实例中抽象出来的。不过，几何里的平面没有边界和大小，它是无限延展的。

在立体几何中，通常画平行四边形来表示平面。在空间，平面和平面之间只有相互位置的差异。为了较直观地反映一个平面在空间的不同位置，我们规定：当平面处于水平位置时，通常把平行四边形的锐角画成 45° ，横边画成等于邻边的两倍(图1-1(1))；当平面处于直立位置时，要把平行四边形的一组对边画成铅垂方向(图1-1(2))；当平面处于其它位置时，只要画成适当的平行四边形就可以了(图1-1(3))。

平面通常用一个字母 α 、 β 、 γ 或者 M 、 N 、 P 等来表示。在图中，要把这个字母写在平行四边形的一个顶角内

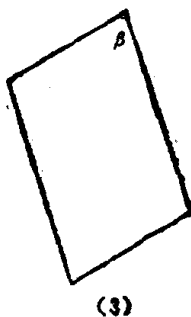
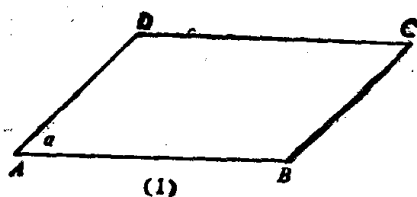


图 1-1

(图1-1); 在书写或用语言叙述时, 一般要在这个字母前加上“平面”两字, 如平面 α 、平面M等。有时也可以用表示平行四边形的两个相对顶点的字母来表示平面, 如平面AC、平面BD等 (图1-1(1))。

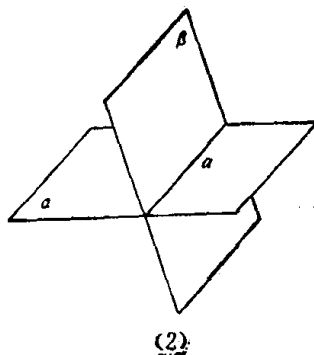
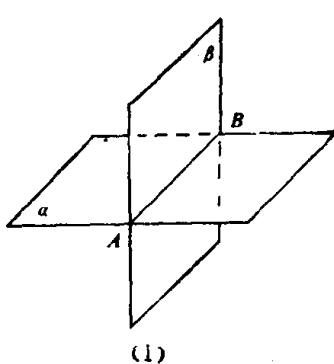
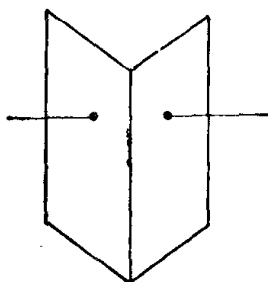


图 1-2

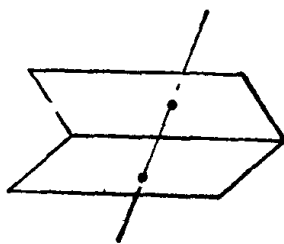
在立体几何中，为了使画的图形富有立体感，规定凡看得见的线都要画成实线，而被平面遮住部分的线要画成虚线(图1-2(1))或者不画(图1-2(2))。

练习

1. 下面的说法正确吗？为什么？
 - (1) 平面 α 比平面 β 大；
 - (2) 一个平面的面积是100米²。
2. 分别画出水平放置和直立放置的平面，并用字母表示。
3. 观察下面的两个图形，用模型说明它们的位置有什么不同。并用字母来表示各平面。



(1)



(2)

(第3题)

1.2 平面的基本性质

在生产和生活实践中，人们经过长期的观察和分析，总结出了关于平面的三个基本性质。我们把它们当作公理，作为研究空间图形时推理论证的基础。

公理1 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内(图1-3)。

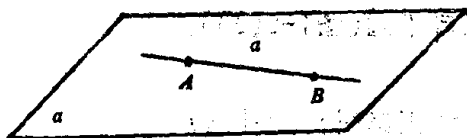


图 1-3

这时我们说直线在平面内，或者说平面经过直线。

公理2 如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线(图1-4)。

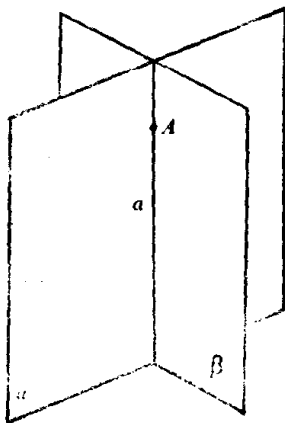


图 1-4

这时我们就说这两个平面相交，这条公共直线就叫做这两个平面的交线。

公理3 经过不在同一直线上的三点，有且只有一个平面(图1-5)。

“有且只有一个平面”也常说成“确定一个平面”。

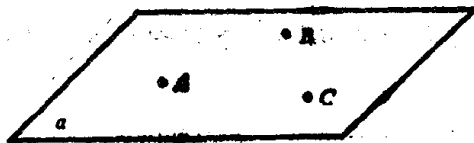


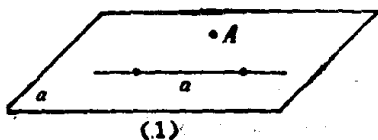
图 1-5

由A、B、C三点所确定的平面又可记作“平面ABC”。
根据上述的三条公理，可以得到下面的推论：

推论1 一条直线和这条直线外的一点确定一个平面(图1-6(1))。

推论2 两条相交直线确定一个平面(图1-6(2))。

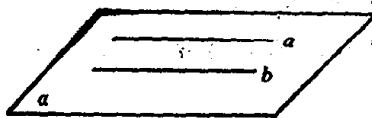
推论3 两条平行直线确定一个平面(图1-6(3))。



(1)



(2)



(3)

图 1-6

公理3和上述三个推论是在空间里确定一个平面的依据。
因为在立体几何中，平面几何里的定义、公理、定理等，对于同一个平面内的图形仍然成立。所以，如果根据公理3和

三个推论可以判定空间的几个点和几条直线在同一个平面内(这时可以简单地说它们“共面”),那么就可以利用平面几何知识来解决问题。

例 一条直线和两条平行直线都相交,证明这三条直线共面。

已知: 直线 $m \parallel$ 直线 n , 直线 l 和 m 相交于点 A , 和 n 相交于点 B (图1-7)。

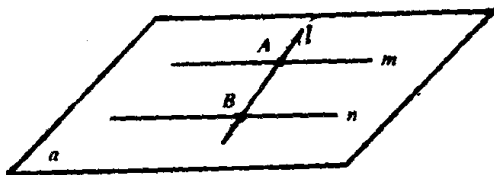


图 1-7

求证: 直线 m , n , l 共面。

证明: $\because m \parallel n$,

$\therefore m, n$ 确定一个平面 α (推论3)。

$\because l$ 和 m 相交于点 A , 和 n 相交于点 B ,

$\therefore l$ 上的两点 A, B 在平面 α 内,

$\therefore l$ 就在平面 α 内(公理1)。

$\therefore$ 三条直线 m, n, l 都在同一平面 α 内, 即它们共面。

练 习

1. 回答下列问题:

(1) 过空间一点可确定一个平面吗? 为什么?

(2) 过空间两点可确定一个平面吗? 为什么?

(3) 过空间三点可确定一个平面吗? 为什么?

2. 如果线段 AB 在平面 α 内, 那么它的中点 C 是否一定在平面 α 内? 直线 AB 是否一定在平面 α 内? 如果线段 AB 的中点 C 在平面 α 内, 那么线段 AB 的两个端点 A 、 B 是否一定在平面 α 内?
3. 三角形、梯形是否一定是平面图形? 为什么?
4. 过已知直线外一点与这条直线上的三点分别画三条直线, 证明这三条直线共面。

1.3 水平放置的平面图形的直观图的画法

在立体几何中, 把空间图形画在纸上或黑板上, 是指用一个平面图形表示空间图形。这样的图形不是空间图形的真实形状, 而是它的直观图。如图1-8是正方体的一种直观图, 正方体的各个面本来都是正方形, 而在直观图中, 有一些面画成了平行四边形。但是, 直观图具有较强的立体感, 能够很好地表示空间图形的形状。

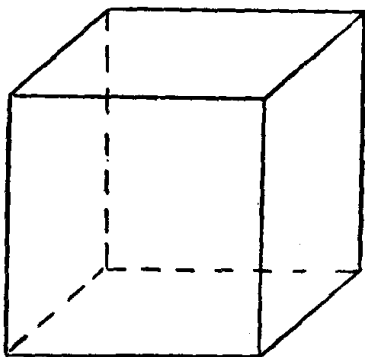


图 1-8

要画空间图形的直观图, 首先要学会水平放置的平面图形的直观图的画法。下面举例说明一种常用的画法。

例1 画水平放置的三角形的直观图。

画法：如图1-9。

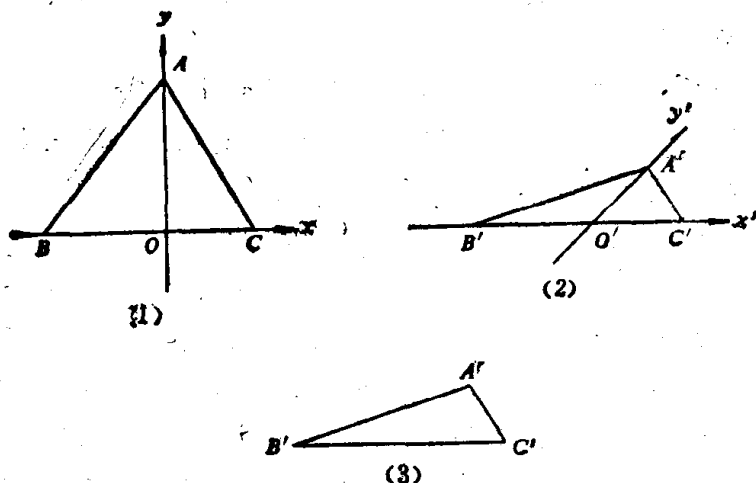


图 1-9

(1) 取三角形ABC的BC边所在直线为x轴，取过点A所引BC的垂线AO为y轴(图1-9(1))；

(2) 画与Ox轴对应的O'x'轴，与Oy轴对应的O'y'轴，使得 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ 。在x'轴上取 $B'O' = BO$ 、 $O'C' = OC$ ；在y'轴上取 $A'O' = \frac{1}{2}AO$ ，连结A'B'、A'C'(图1-9(2))；

(3) 擦去辅助线(包括坐标轴)，则三角形A'B'C'就是所要画的水平放置的三角形ABC的直观图(图1-9(3))。

例2 画水平放置的正六边形的直观图。

画法：如图1-10。

(1) 在已知正六边形ABCDEF中，取对角线AD所在直线为x轴，取对称轴GH为y轴(图1-10(1))，

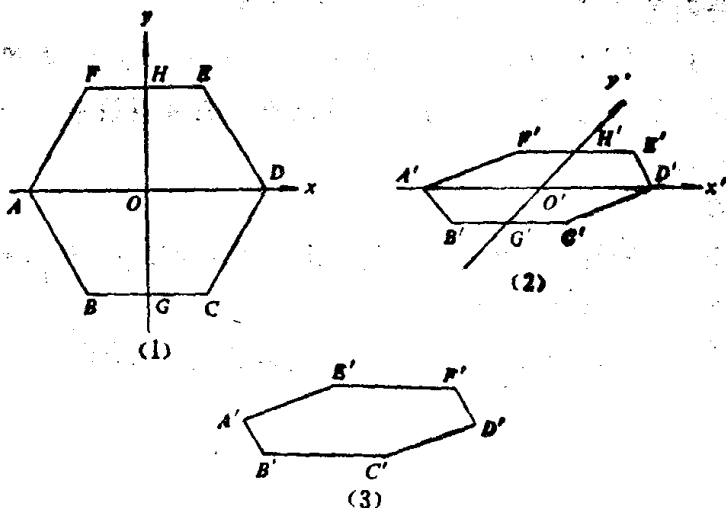


图 1-10

(2) 画与 Ox 轴对应的 $O'x'$ 轴, 与 Oy 轴对应的 $O'y'$ 轴, 使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ 。以点 O' 为中点, 在 x' 轴上取 $A'D' = AD$, 在 y' 轴上取 $G'H' = \frac{1}{2}GH$ 。以点 H' 为中点画 $F'E'$ 平行于 x' 轴, 并使 $F'E' = FE$; 再以点 G' 为中点画 $B'C'$ 平行于 x' 轴, 并使 $B'C' = BC$ 。连结 $A'B'$ 、 $C'D'$ 、 $D'E'$ 、 $F'A'$ (图 1-10(2))。

(3) 擦去辅助线, 则六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 就是水平放置的正六边形 $ABCDEF$ 的直观图 (图 1-10(3))。

这种直观图画法的规则是,

(1) 在已知平面图形中取互相垂直的轴 Ox 、 Oy 。画直观图时, 把它画成对应的轴 $O'x'$ 、 $O'y'$, 使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ (或 135°)。它们确定的平面就表示水平平面, 不必再画一个平行四边形来表示水平平面了。

(2) 已知平面图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段, 在直观

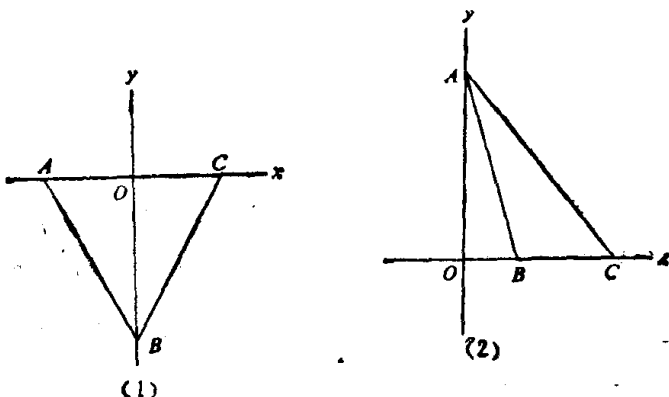
图中分别画成平行于 x' 轴或 y' 轴的线段。

(3) 已知平面图形中平行于 x 轴的线段，在直观图中保持原长度不变；而平行于 y 轴的线段，在直观图中的长度为原来的一半。

练习

- 按图中所给出的 x 轴、 y 轴，画出水平放置的下列平面图形的直观图：

(1) 正三角形 ABC ； (2) 钝角三角形 ABC ；



(第1题)

- 画出水平放置的下列图形的直观图：
 - 长方形；
 - 平行四边形；
 - 菱形；
 - 正五边形。

习题一

- 在空间，经过一条直线能确定多少个平面？经过两条不重合的直线是否一定能确定一个平面？
- 设 A 、 B 、 C 、 D 四点中没有任何三点在一条直线上，这四点最少能确定几个平面？最多能确定几个平面？
- 三条直线两两平行，但不共面，它们可以确定几个平面？