Guidance Series for Mathematics Majors

数学类专业学习辅导丛书

数学分析习题全解指南

下册

Mathematics

陈纪修　徐惠平　周渊　金路　邱维元

高等教育出版社

内容提要

本书是与陈纪修、於崇华、金路编写的面向21世纪课程教材《数学分析》(第二版,下册)相配套的学习辅导书,是教育部“理科基础人才培养基地创建优秀名牌课程数学分析”项目和高等教育出版社“高等教育百门精品课程教材建设计划”精品项目的成果。本书内容包含了《数学分析》(第二版,下册)中全部习题的详细解答。

本书不仅可作为高等院校学习“数学分析”课程的学生的学习参考书与讲授“数学分析”课程的教师的教学参考书,也可作为准备报考高等院校理工科各专业研究生的学生的复习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析习题全解指南.下册/陈纪修等.—北京:高等教育出版社,2005.11

ISBN 7-04-017385-9

Ⅰ.数...　Ⅱ.陈...　Ⅲ.数学分析-高等学校-解题　Ⅳ.O17-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第118968号

策划编辑 李　蕊　**责任编辑** 胡乃冏　**封面设计** 刘晓翔　**责任绘图** 尹文军
版式设计 范晓红　**责任校对** 俞声佳　**责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
印　刷	山东省高唐印刷有限责任公司		http://www.landraco.com.cn
开　本	787×960　1/16	版　次	2005年11月第1版
印　张	17.5	印　次	2005年11月第1次印刷
字　数	320 000	定　价	20.40元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　17385-00

前　言

本书是与陈纪修、於崇华、金路编写的面向21世纪课程教材《数学分析》(第二版)相配套的学习辅导书,是教育部“理科基础人才培养基地创建优秀名牌课程数学分析”项目和高等教育出版社“高等教育百门精品课程教材建设计划”精品项目的成果。本书分上、下两册出版,内容分别包含了《数学分析》(第二版)中全部习题的详细解答。

自从面向21世纪课程教材《数学分析》出版以来,我们不断收到广大读者的来信和电子邮件,希望我们能提供教材中习题的解答,以便于他们学习或教学时参考。正是广大读者的这一要求,促使我们编写了这本《数学分析习题全解指南》。

对于学习“数学分析”课程的学生来说,不仅要掌握微积分的基本概念、基本理论与基本方法,更要通过学习,培养熟练的运算能力、抽象概括问题的能力、逻辑推理的能力以及综合运用数学知识分析和解决问题的能力。要达到这一目的,严格而充分的基本训练是必不可少的。著名数学家苏步青院士说他自己曾做过一万道微积分习题,由此可以说明我们的前辈大师们为什么会有如此深厚的数学功底。希望广大同学在做习题时,首先要认真地独立思考,认真地解答每一道习题。希望同学们一定要正确运用本书,只有在经过自己的认真思考,仍不会解答或对自己解答的正确性无法确定时,再去参考题解。否则,不仅对学习没有任何帮助,也违背了我们编写这本《数学分析习题全解指南》的初衷。

本书给出了教材中全部习题的解答。但对于大部分习题,书中给出的解法并不是唯一的。事实上,教材中大部分习题都是可以有多种解法的,而我们给出的解法也不一定就是最好或最简捷的。对于一些典型的习题,希望读者能自己思考是否有多种解法,这将有助于对数学知识的融会贯通,提高自己的解题能力。

在本书的编写过程中,复旦大学数学科学学院楼红卫教授向我们提供了部分习题的解答;在本书的出版过程中,我们得到了高等教育出版社徐刚老师,李蕊老师,蒋青老师,胡乃冏老师的大力支持。在此谨向他们表示衷心的感谢。

限于作者的水平,书中给出的题解难免会有错误与缺陷,希望广大读者提出宝贵的批评和建议,以便今后再版时改进。

编　者

二〇〇四年八月

目　录

第九章　数项级数 …… 1
§1　数项级数的收敛性 …… 1
§2　上极限与下极限 …… 3
§3　正项级数 …… 6
§4　任意项级数 …… 13
§5　无穷乘积 …… 21
第十章　函数项级数 …… 27
§1　函数项级数的一致收敛性 …… 27
§2　一致收敛级数的判别与性质 …… 34
§3　幂级数 …… 44
§4　函数的幂级数展开 …… 54
§5　用多项式逼近连续函数 …… 61
第十一章　Euclid 空间上的极限和连续 …… 64
§1　Euclid 空间上的基本定理 …… 64
§2　多元连续函数 …… 67
§3　连续函数的性质 …… 75
第十二章　多元函数的微分学 …… 81
§1　偏导数与全微分 …… 81
§2　多元复合函数的求导法则 …… 92
§3　中值定理和 Taylor 公式 …… 101
§4　隐函数 …… 104
§5　偏导数在几何中的应用 …… 116
§6　无条件极值 …… 121
§7　条件极值问题与 Lagrange 乘数法 …… 134
第十三章　重积分 …… 146
§1　有界闭区域上的重积分 …… 146
§2　重积分的性质与计算 …… 148
§3　重积分的变量代换 …… 158
§4　反常重积分 …… 169

§5 微分形式 …… 173
第十四章 曲线积分、曲面积分与场论 …… 176
§1 第一类曲线积分与第一类曲面积分 …… 176
§2 第二类曲线积分与第二类曲面积分 …… 186
§3 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式 …… 193
§4 微分形式的外微分 …… 208
§5 场论初步 …… 209
第十五章 含参变量积分 …… 220
§1 含参变量的常义积分 …… 220
§2 含参变量的反常积分 …… 228
§3 Euler 积分 …… 237
第十六章 Fourier 级数 …… 245
§1 函数的 Fourier 级数展开 …… 245
§2 Fourier 级数的收敛判别法 …… 254
§3 Fourier 级数的性质 …… 260
§4 Fourier 变换和 Fourier 积分 …… 264
§5 快速 Fourier 变换 …… 266

第九章　数项级数

§1　数项级数的收敛性

1．讨论下列级数的敛散性。收敛的话，试求出级数之和。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n+1}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$；　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}+4^{n+1}}{3^{2n}}$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$；　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$；

(9) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\cos n\theta(|q|<1)$。

解　(1) $$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right),$$

所以
$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{4}。$$

(2) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{2}{3}\neq 0$，所以级数发散。

(3) $$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right),$$

所以
$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}。$$

(4) $$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{3^k}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}},$$所以
$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}。$$

(5) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 \neq 0$，所以级数发散。

(6) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{5^{k-1}+4^{k+1}}{3^{2k}} = \dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{5}{9}\right)^n}{1-\dfrac{5}{9}} + \dfrac{16}{9}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{4}{9}\right)^n}{1-\dfrac{4}{9}}$，所以

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 3\,\frac{9}{20}。$$

(7) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right) = \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{2}+1$，所以

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = -\sqrt{2}+1。$$

(8) 设 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2k-1}{3^k}$，则 $3S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{3^{k-1}} = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{2k+1}{3^k}$，两式相减，得到

$$2S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{3^k} - \frac{2n-1}{3^n} = 1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\dfrac{1}{3}} - \frac{2n-1}{3^n},$$

所以

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1。$$

(9) $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k e^{ik\theta} = \dfrac{1-(qe^{i\theta})^{n+1}}{1-qe^{i\theta}}$，由 $|q|<1$，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n e^{in\theta} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} q^k e^{ik\theta} = \frac{1}{1-qe^{i\theta}}。$$

利用 Euler 公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$，对上式两边取实部，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos n\theta = \frac{1-q\cos\theta}{1-2q\cos\theta+q^2}。$$

2. 确定 x 的范围，使下列级数收敛：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(1-x)^n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{nx}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$。

解　(1) 由 $-1<\dfrac{1}{1-x}<1$ 解得 $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$。

(2) 由 $e^x<1$ 解得 $x\in(-\infty,0)$。

(3) 当 $x=1$ 时，显然级数收敛；当 $x\neq 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = (1-x)\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$，收敛范围是 $x\in(-1,1)$；所以当 $x\in(-1,1]$ 时，级数收敛。

3．求八进制无限循环小数$(36.073\,607\,360\,7\cdots)_8$的值。

解 $(36.073\,607\,360\,7\cdots)_8$

$$=3\times8+6+\sum_{n=0}^{\infty}\left[7\left(\frac{1}{8}\right)^{4n+2}+3\left(\frac{1}{8}\right)^{4n+3}+6\left(\frac{1}{8}\right)^{4n+4}\right]=30\,\frac{478}{4\,095}。$$

4．设 $x_n=\int_0^1 x^2(1-x)^n\mathrm{d}x$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 的和。

解 $x_n=\int_0^1 x^2(1-x)^n\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n(1-x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+3}$，

于是

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3},$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{6}。$$

5．设抛物线 $l_n:y=nx^2+\frac{1}{n}$ 和 $l'_n:y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$ 的交点的横坐标的绝对值为 $a_n(n=1,2,\cdots)$。

(1) 求抛物线 l_n 与 l'_n 所围成的平面图形的面积 S_n；

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$ 的和。

解 (1) 容易求出抛物线 $l_n:y=nx^2+\frac{1}{n}$ 和 $l'_n:y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$ 的交点的横坐标的绝对值为 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$，于是

$$S_n=2\int_0^{a_n}\left[\left(nx^2+\frac{1}{n}\right)-\left((n+1)x^2+\frac{1}{n+1}\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{4}{3}a_n^3;$$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}=\frac{4}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{4}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{4}{3}$。

§2 上极限与下极限

1．求下列数列的上极限与下极限：

(1) $x_n=\frac{n}{2n+1}\cos\frac{2n\pi}{5}$；

(2) $x_n=n+(-1)^n\frac{n^2+1}{n}$；

(3) $x_n=-n[(-1)^n+2]$；

(4) $x_n=\sqrt[n]{n+1}+\sin\frac{n\pi}{3}$；

(5) $x_n=2(-1)^{n+1}+3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$。

解 (1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\dfrac{1}{2}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{5}$。

(2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=+\infty$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=0$。

(3) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=-\infty$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=-\infty$。

(4) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

(5) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=5$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=-5$。

2. 证明：

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-x_n)=-\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$；　　(2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(cx_n)=\begin{cases}c\,\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n, & c>0,\\ c\,\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n, & c<0。\end{cases}$

证 仅对$\{x_n\}$是有界数列给出证明。

(1) 设$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\eta$，则对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，使得$x_n>\eta-\varepsilon$对一切$n>N$成立，且$\{x_n\}$中有无穷多项，满足$x_n<\eta+\varepsilon$；于是$-x_n<-\eta+\varepsilon$对一切$n>N$成立，且$\{-x_n\}$中有无穷多项，满足$-x_n>-\eta-\varepsilon$；于是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n)=-\eta=-\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n。$$

(2) 设$c>0$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\xi$，则对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，使得$x_n<\xi+\dfrac{\varepsilon}{c}$对一切$n>N$成立，且$\{x_n\}$中有无穷多项，满足$x_n>\xi-\dfrac{\varepsilon}{c}$；于是$cx_n<c\xi+\varepsilon$对一切$n>N$成立，且$\{cx_n\}$中有无穷多项，满足$cx_n>c\xi-\varepsilon$；所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(cx_n)=c\xi=c\,\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n。$$

设$c<0$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\eta$，则对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，使得$x_n>\eta+\dfrac{\varepsilon}{c}$对一切$n>N$成立，且$\{x_n\}$中有无穷多项，满足$x_n<\eta-\dfrac{\varepsilon}{c}$；于是$cx_n<c\eta+\varepsilon$对一切$n>N$成立，且$\{cx_n\}$中有无穷多项，满足$cx_n>c\eta-\varepsilon$；所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(cx_n)=c\eta=c\,\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n。$$

3. 证明：

(1) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\geqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$；

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\underline{\lim_{n\to\infty}}y_n。$$

证 (1) 记$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=h_1$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n=h_2$，则对任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，对一切$n>N$，成立$x_n>h_1-\dfrac{\varepsilon}{2}$，$y_n>h_2-\dfrac{\varepsilon}{2}$，即

$$x_n + y_n > h_1 + h_2 - \varepsilon,$$

于是

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \geqslant h_1 + h_2 - \varepsilon。$$

由 ε 的任意性,即得到

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \geqslant h_1 + h_2 = \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n。$$

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在,则由(1),

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) \geqslant \lim_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n,$$

且

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty} y_n &= \varliminf_{n\to\infty}[(x_n + y_n) - x_n] \geqslant \varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) + \varliminf_{n\to\infty}(-x_n)\\ &= \varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) - \lim_{n\to\infty} x_n,\end{aligned}$$

两式结合即得到

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n。$$

4. 证明:若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $-\infty < x < 0$,则

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n;$$

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n。$$

证 由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $-\infty < x < 0$,可知对任意给定的 $\varepsilon(0 < \varepsilon < -x)$,存在正整数 N_1,对一切 $n > N_1$,成立

$$x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon < 0。$$

记$\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n = H$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n = h$,则对上述 $\varepsilon(0 < \varepsilon < -x)$,存在正整数 N_2,对一切 $n > N_2$,成立

$$h - \varepsilon < y_n < H + \varepsilon。$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$,则当 $n > N$ 时,成立

$\min\{(x - \varepsilon)(H + \varepsilon), (x + \varepsilon)(H + \varepsilon)\} < x_n y_n < \max\{(x - \varepsilon)(h - \varepsilon),$
$(x + \varepsilon)(h - \varepsilon)\}$,

于是

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n y_n) \geqslant \min\{(x - \varepsilon)(H + \varepsilon), (x + \varepsilon)(H + \varepsilon)\},$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n) \leqslant \max\{(x - \varepsilon)(h - \varepsilon), (x + \varepsilon)(h - \varepsilon)\},$$

由 ε 的任意性,即得到

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n y_n) \geqslant xH = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n,$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n) \leqslant xh = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n。$$

由于

$$\varliminf_{n\to\infty} y_n = \varliminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x_n}\cdot(x_n y_n)\right] \geqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cdot\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n),$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} y_n = \varlimsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x_n}\cdot(x_n y_n)\right] \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cdot\varliminf_{n\to\infty}(x_n y_n),$$

又得到

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n y_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n,$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n) \geqslant \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n。$$

将此两式与前面两式结合，即得到

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n,$$

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n。$$

§3 正项级数

1. 讨论下列正项级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n}{n^4+1}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n^2}{n^3+3n}$；

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^2 n}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^2}$；　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$；　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$；

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{2^n}$；　　(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[2+(-1)^n]^n}{2^{2n+1}}$；

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$；　　(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$；

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$；　　(14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$；

(15) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\dfrac{n^2+1}{n^2-1}$；　　(16) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\left(-\ln\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$；

(17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}\ (a>0)$。

解　(1) 因为$\dfrac{4n}{n^4+1}\sim\dfrac{4}{n^3}(n\to\infty)$，由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n^3}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n}{n^4+1}$收敛。

(2) 因为$\dfrac{2n^2}{n^3+3n}\sim\dfrac{2}{n}(n\to\infty)$，由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n^2}{n^3+3n}$发散。

(3) 因为$\frac{1}{\ln^2 n}>\frac{1}{n}$,由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,所以$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$发散。

(4) 因为当 $n\geqslant 4$ 有$\frac{1}{n!}<\frac{1}{n^2}$,由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$收敛。

(5) 因为$\frac{\ln n}{n^2}<\frac{1}{n\sqrt{n}}$,由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$收敛,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$收敛。

(6) $1-\cos\frac{\pi}{n}=2\sin^2\frac{\pi}{2n}\sim\frac{\pi^2}{2n^2}(n\to\infty)$,

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{2n^2}$收敛,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$收敛。

(7) 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\neq 0$,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$发散。

(8) 因为当 $n\geqslant 3$ 有

$$\sqrt[n]{n}-1>\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}(n\to\infty),$$

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$发散。

(9) 设 $x_n=\frac{n^2}{2^n}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}<1,$$

由 d'Alembert 判别法,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$收敛。

(10) 设 $x_n=\frac{[2+(-1)^n]^n}{2^{2n+1}}$,则

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\frac{3}{4}<1,$$

由 Cauchy 判别法,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{2^{2n+1}}$收敛。

(11) 设 $x_n=n^2\mathrm{e}^{-n}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{\mathrm{e}}<1,$$

由 d'Alembert 判别法,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\mathrm{e}^{-n}$收敛。

(12) 设 $x_n=\frac{2^n n!}{n^n}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2}{\mathrm{e}}<1,$$

由 d'Alembert 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$收敛。

(13) $\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}=\dfrac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\sim\dfrac{1}{n}(n\to\infty)$，

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$发散。

(14) $2n-\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}=\dfrac{2\left(n^2-\sqrt{(n^2+1)(n^2-1)}\right)}{2n+\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$

$$=\frac{2}{2n+\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\cdot\frac{1}{n^2+\sqrt{(n^2+1)(n^2-1)}}\sim\frac{1}{4n^3}(n\to\infty),$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^3}$收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$收敛。

(15) $\ln\dfrac{n^2+1}{n^2-1}=\ln\left(1+\dfrac{2}{n^2-1}\right)\sim\dfrac{2}{n^2}(n\to\infty)$，

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^2}$收敛，所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\dfrac{n^2+1}{n^2-1}$收敛。

(16) $-\ln\cos\dfrac{\pi}{n}=-\ln\left[1-\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)\right]=-\ln\left(1-2\sin^2\dfrac{\pi}{2n}\right)\sim\dfrac{\pi^2}{2n^2}(n\to\infty)$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\pi^2}{2n^2}$收敛，所以 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\left(-\ln\cos\dfrac{\pi}{n}\right)$收敛。

(17) 设 $x_n=\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\begin{cases}a,0<a<1,\\ \dfrac{1}{2},a=1,\\ 0,a>1。\end{cases}$$

由 d'Alembert 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}(a>0)$收敛。

2. 利用级数收敛的必要条件，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}=0$。

证　(1) 设 $x_n=\dfrac{n^n}{(n!)^2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]=0$，由 d'Alembert判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0$。

(2) 设 $x_n=\dfrac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)(2n+2)}{2^{2(n+1)}}=0$，由 d'Alembert

判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$收敛，所以$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}=0$。

3．利用 Raabe 判别法判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}(a>0)$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^{\ln n}}$；　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$。

解 (1) 设$x_n=\dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$，则

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=a,$$

由 Raabe 判别法

当$a>1$时，级数收敛；当$0<a<1$时，级数发散；

当$a=1$，$x_n=\dfrac{1}{n+1}$，级数发散。

(2) 设$x_n=\dfrac{1}{3^{\ln n}}$，则

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\ln 3>1,$$

由 Raabe 判别法，级数收敛。

(3) 设$x_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$，则

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\ln 2<1,$$

由 Raabe 判别法，级数发散。

4．讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{2n\pi}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\ln(1+x)\mathrm{d}x$。

解 (1) 当$n\geqslant 2$，有

$$\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{2x}\,\mathrm{d}x<\frac{1}{n\sqrt{n}},$$

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\mathrm{d}x$ 收敛。

(2) $\int_{n\pi}^{2n\pi}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x>\dfrac{1}{4n^2\pi^2}\int_{n\pi}^{2n\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{8n\pi}$，由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{8n\pi}$发散，所以

$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$ 发散。

(3) $\int_0^{\frac{1}{n}}\ln(1+x)\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{1}{n}}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2n^2}$,

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$收敛,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\ln(1+x)\mathrm{d}x$ 收敛。

5. 利用不等式$\frac{1}{n+1}<\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}<\frac{1}{n}$,证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

存在(此极限为 Euler 常数 γ,见例 2.4.8)。

证 设 $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$,则

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}<0,$$

$$x_n>\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{x}+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}-\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}>0,$$

所以数列$\{x_n\}$单调减少有下界,因此收敛。

6. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$与 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$是两个正项级数,若$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$ 或 $+\infty$,请问这两个级数的敛散性关系如何?

解 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$,则当 n 充分大时有 $x_n<y_n$,所以当 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛时,$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$必定收敛,当 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$发散时,$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$必定发散;

若$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=+\infty$,则当 n 充分大时有 $x_n>y_n$,所以当 $\sum_{n=1}^{\infty}y_n$发散时,$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$必定发散,当 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛时,$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$必定收敛。

7. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$也收敛;反之如何?

解 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛,则$\lim_{n\to\infty}x_n=0$,所以当 n 充分大时,有 $0\leqslant x_n<1$,即有 $x_n^2\leqslant x_n$,因此 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$收敛;反之,当 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$收敛时,$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$不一定收敛。例如 $x_n=\frac{1}{n}$,则 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^2$收敛,但 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$发散。

8. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，则当 $p>\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x_n}}{n^p}$ 收敛；又问当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时，结论是否仍然成立？

解 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛。当 $p>\frac{1}{2}$ 时，由

$$\frac{\sqrt{x_n}}{n^p}\leqslant\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{n^{2p}}\right)$$

以及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$ 的收敛性，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x_n}}{n^p}$ 收敛。

当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x_n}}{n^p}$ 不一定收敛。例如 $x_n=\frac{1}{n\ln^2 n}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x_n}}{n^p}$ 发散。

9. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，

(1) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]$ 收敛，并求其和；

(2) 进一步设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f''(x)<0$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'(n)$ 收敛。

证 (1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]$ 的部分和为 $S_n=f(n+1)-f(1)$，由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 得到 $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n=A-f(1)$；

(2) 由 Lagrange 中值定理以及 $f'(x)$ 单调减少，得到

$$0\leqslant f'(n)<f'(\xi)=f(n)-f(n-1),$$

由 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}[f(n)-f(n-1)]$ 收敛，即得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f'(n)$ 收敛。

10. 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$，$n=1,2,\cdots$，

(1) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+2}}{n}$ 的和；

(2) 设 $\lambda>0$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛。

证 (1) $a_n+a_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2} x\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}\tan x=\frac{1}{n+1},$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+2}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1;$$

(2) 由 $a_n>0$ 及 $a_n+a_{n+2}=\frac{1}{n+1}$,可知 $a_n<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$,于是$\frac{a_n}{n^\lambda}<\frac{1}{n^{1+\lambda}}$,由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\lambda}}$收敛,可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$收敛。

11. 设 $x_n>0,\frac{x_{n+1}}{x_n}>1-\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$,证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$发散。

证　由 $x_n>0,\frac{x_{n+1}}{x_n}>1-\frac{1}{n}$,得到

$$(n-1)x_n<nx_{n+1},$$

即数列$\{nx_{n+1}\}$单调增加。于是存在 $\alpha>0$,使得 $nx_{n+1}\geqslant\alpha$,因而

$$x_{n+1}\geqslant\frac{\alpha}{n}。$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{n}$发散即可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$发散。

12. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$发散$(x_n>0,n=1,2,\cdots)$,证明:必存在发散的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=0$。

证　设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$,则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$。令

$$y_1=\sqrt{S_1},y_n=\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}\ (n=2,3,4,\cdots),$$

于是 $\sum\limits_{k=1}^{n}y_k=\sqrt{S_n}$,即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$是发散的正项级数,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}}=0。$$

13. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$发散,$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$,证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{S_n^2}$收敛。

证　由 $S_n\geqslant S_{n-1}$,可知

$$\frac{x_n}{S_n^2}\leqslant\frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n},$$