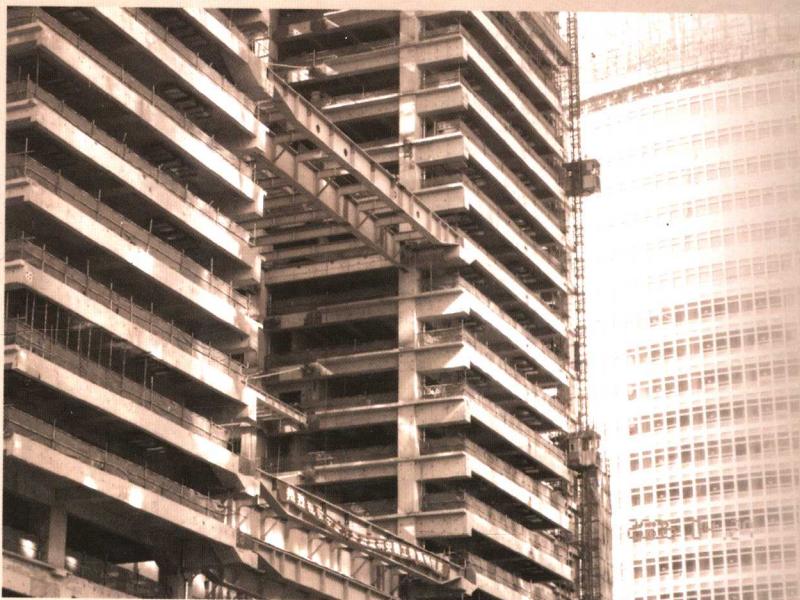


2



结构工程中的 被动消能系统

Passive Energy Dissipation Systems
in Structural Engineering

[美] T.T.Soong G.F.Dargush 著 董 平 译

华中科技大学重点研究基金
华中科技大学研究生教改基金 资助出版

结构工程中的被动消能系统

Passive Energy Dissipation Systems
in Structural Engineering

〔美〕 T. T. Soong G. F. Dargush 著

董 平 译

科学出版社

北京

图字:01 -2002 -3955 号

内 容 简 介

本书从基本原理到设计,系统地讨论了被动消能装置的结构与众多性能特点。主要介绍了金属阻尼器、摩擦阻尼器、黏弹性阻尼器、黏性液体阻尼器、调谐质量阻尼器、调谐液体阻尼器及智能材料。

本书可供结构设计人员及土木工程领域的研究人员参考,也可作为相关专业研究生教材。

All Rights Reserved. Authorized translation from the English language edition published by John Wiley & Sons, Ltd.

No part of this book may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photo-copying, recording, scanning or otherwise, except under the terms of the Copyright, Designs and Patents Act 1988 or under the terms of a licence issued by the Copyright Licensing Agency, 90 Tottenham Court Road, London, UK W1P 9HE without the permission in writing of the publisher.

版权所有,翻印必究

图书在版编目(CIP)数据

结构工程中的被动消能系统/(美)T. T. Soong 等著;董平译.—北京:科学出版社,2005

ISBN 7-03-015162-3

I . 结 ... II . ① S... ② 董 ... III . 建筑结构-抗震设计
IV . TU352. 104

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 019973 号

责任编辑:童安齐 何舒民 / 责任校对:柏连海

责任印制:吕春珉 / 封面设计:耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮 政 编 码: 100717

<http://www.sciencep.com>

新 蕉 印 刷 厂 印 刷

科 学 出 版 社 发 行 各 地 新 华 书 店 经 销

*

2005 年 5 月 第 一 版 开 本:B5 (720×1000)

2005 年 5 月 第 一 次 印 刷 印 张:17 1/2

印 数:1~1 500 字 数:351 000

定 价:38.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(新欣))

销售部电话 010-62136131 编辑部电话 010-62137026(BA03)

谨以此书献给我的妻子 Dottie
——T. T. Soong

谨以此书献给我的妻子 Andrea
——G. F. Dargush

译者的话

在本书即将付印之际,译者对本书作者 T. T. Soong 教授、G. F. Dargush 教授和 John Wiley & Sons 出版公司表示衷心的感谢。

T. T. Soong 教授是工程结构被动消能和振动控制领域的国际知名教授,造诣深,著述丰富。其专著 *Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering* (《结构工程中的被动消能系统》) 在全世界范围内有很大的影响,是该领域中同类著作中的经典之作。我国建筑抗震设计规范新增“隔震与消能减震设计”的内容就涉及和包含了本书所述的多种技术。

本书的翻译出版工作一直得到了 T. T. Soong 教授的热情支持和关心,他特地为本书中文版作序。此外,还要特别感谢华中科技大学土木工程与力学学院方秦汉院士和唐家祥教授对本书的翻译出版所给予的支持和帮助。

限于水平,译文难免有不足之处,望读者指正。

中文版序

非常高兴为我们关于被动消能著作的中文版写此序言。自 1998 年英文版出版以来,我们目睹了这种技术在新建的和加固改造的土木工程结构中快速地世界范围内应用,毫不例外,书中所论述的消能系统在中国也有相当深度的研究和广泛的应用。

如我们在原书序言中所说的一样,本书论述了被动消能装置的基本原理、实现问题和设计范围内的性能特点,目的是为读者不仅提供这种技术的相应知识,而且也从应用、设计和实现的观点提供必要的理解帮助。我们希望中文版的读者能发现它在这几方面是同样有用的。

我们感谢董平博士,他承担了这个困难的任务,即将原书翻译成可读且能从中获得相应知识和帮助的中文版。

T. T. Soong

G. F. Dargush

2005 年 4 月于美国纽约州布法罗

序

近来的破坏性地震和飓风显示出我们面对自然的力量是多么脆弱。即使是在一个先进的工业国家，其建筑环境也仍然严重地受到自然灾害的影响。因此，目前结构工程的主要挑战之一是发展创新性的设计概念，以便更好地保护结构及其使用者和内部设备，使其免受风、浪和地震等破坏性环境荷载造成的毁坏和损伤。

传统的抗震设计方法基于保证结构具有足够的强度和延性组合以抵抗所受的荷载作用。对于较大的地震，结构工程师依靠仔细地设计和构造建筑内在延性来防止结构倒塌并能接受某种程度的结构和非结构破坏。

在许多情况下，这种传统的方法将瞬态的地震激励看作结构必须抵抗的等效静力水平荷载。然而，不用这个方法而考虑环境激励的实际动力特征，将获得非常显著的改善。事实上，许多基于动力学观点的新结构保护概念已经被提出并处于不同的发展阶段，其中之一就是被动消能。被动消能装置的基本作用是当它置于结构之中时能吸收或消耗一部分输入能，因此降低了基本结构构件的能量耗散值并使可能的结构破坏达到最小程度。近年来，人们为将被动耗能或附加阻尼的概念发展成一种可行的技术已做了很大的努力，而且在全球范围内已有许多这种装置被安装在结构之中。

本书试图通过综合现有的资料来对被动消能系统进行全面的论述。本书基本上直接针对结构设计决策的专业工程师和研究生以及土木工程领域的其他研究人员。本书从基本原理到设计讨论了被动消能装置的众多性能特点，其目的是不仅能够给读者提供这种技术的可行知识，而且能增进读者对所从事的、与被动消能装置的结构应用有关的重大实际问题有进一步了解。要强调的是，目前整个技术仍在发展之中，在硬件及设计过程两方面的重大改进在未来肯定会不断出现。

T. T. Soong

G. F. Dargush

1997年，美国纽约州布法罗

致 谢

从 1986 年开始,我们在该技术领域的工作就在国家地震工程研究中心的赞助下得到国家科学基金和纽约州的一贯支持,在此表示衷心感谢。同时,也要感谢 3M 公司,它为本书中报告的一些实验研究的良好的性能表现提供了保证。

本书的前几章在第一作者提出并讲授的“土木工程中的被动与主动控制”的研究生课程中已使用了几年,感谢这些班中的许多学生,他们提供了新的资料信息、建设性的思想,并帮助我们更好地组织在书中,他们是:P. Bucklaew, M . I. Bujakov, G. Chen, L. Ge, H . Gupta, T. Jiang, K. Kosar, R. J. Helgeson, C. D. Huang, C. Li, N. Makris, G. Pekcan, R. Rana, Y. Reichman, M. Riley, K. Shah, K. L. Shen, Z. Shen, M. Symans, P. W. Szustak, P. Tsopelas, R. Valles 和 R. H. Zhang。

我们还要感谢与我们合作并对各种技术问题经常进行讨论的同事 M. C. Constantinou 教授和 A. M. Reinhorn 教授。

衷心感谢几次打印本书草稿并帮助组织本书许多方面内容的 Carmella Godson 夫人,感谢 Hector Velasco 先生为本书做了大部分插图工作。最后,要感谢上述各位妻子们的帮助、鼓励和耐心。

目 录

译者的话

中文版序

序

致谢

| | |
|---------------------|----|
| 1 終論 | 1 |
| 参考文献 | 2 |
| 2 基本原理 | 3 |
| 2.1 引言 | 3 |
| 2.2 简单结构模型的动力响应 | 3 |
| 2.2.1 一般公式 | 3 |
| 2.2.2 自由振动 | 4 |
| 2.2.3 强迫振动 | 5 |
| 2.2.4 瞬态响应 | 7 |
| 2.2.5 有被動阻尼器系统的响应 | 9 |
| 2.3 结构系统的动力分析 | 13 |
| 2.3.1 一般表达式 | 13 |
| 2.3.2 模态叠加法 | 14 |
| 2.3.3 传统和被動阻尼结构中的阻尼 | 16 |
| 2.3.4 直接时域分析 | 17 |
| 2.4 能量表达式 | 18 |
| 2.4.1 单自由度结构 | 18 |
| 2.4.2 基于能量的设计 | 21 |
| 2.4.3 多自由度结构 | 22 |
| 2.5 结论要点 | 23 |
| 参考文献 | 24 |
| 3 金属阻尼器 | 25 |
| 3.1 引言 | 25 |
| 3.2 基本原理 | 26 |
| 3.2.1 塑性 | 27 |
| 3.2.2 黏塑性 | 32 |
| 3.2.3 热效应 | 34 |

| | |
|----------------------------|-----------|
| 3.2.4 破坏理论 | 34 |
| 3.3 宏观建模 | 35 |
| 3.3.1 基于实验的建模 | 36 |
| 3.3.2 基于力学的建模 | 36 |
| 3.4 结构分析 | 40 |
| 3.5 实验研究 | 42 |
| 3.6 设计依据 | 50 |
| 3.7 结构实现 | 52 |
| 参考文献 | 57 |
| 4 摩擦阻尼器 | 60 |
| 4.1 引言 | 60 |
| 4.2 基本原理 | 62 |
| 4.2.1 固体摩擦 | 62 |
| 4.2.2 环境影响 | 64 |
| 4.3 阻尼性能和宏观建模 | 65 |
| 4.4 结构分析 | 74 |
| 4.5 实验研究 | 79 |
| 4.6 设计依据 | 83 |
| 4.7 结构实现 | 86 |
| 参考文献 | 89 |
| 5 黏弹性阻尼器 | 92 |
| 5.1 引言 | 92 |
| 5.2 基本原理 | 92 |
| 5.3 剪切储存模量和剪切损失模量 | 94 |
| 5.3.1 激励频率相关性 | 97 |
| 5.3.2 环境温度相关性 | 100 |
| 5.3.3 内部温度相关性 | 101 |
| 5.4 附加黏弹性阻尼器结构的分析 | 103 |
| 5.5 实验研究 | 105 |
| 5.5.1 2/5 比例的五层钢框架 | 105 |
| 5.5.2 1/3 比例的三层混凝土框架 | 109 |
| 5.6 设计依据及实现问题 | 114 |
| 5.6.1 黏弹性阻尼器的布置策略 | 117 |
| 5.6.2 建筑依据 | 118 |
| 5.7 结构实现 | 118 |

| | |
|---|------------|
| 参考文献 | 124 |
| 6 黏性液体阻尼器 | 127 |
| 6.1 引言 | 127 |
| 6.2 流体动力学的基本原理 | 129 |
| 6.2.1 平衡定律 | 130 |
| 6.2.2 非黏性液体 | 130 |
| 6.2.3 牛顿流体 | 131 |
| 6.2.4 温度相关的非牛顿流体 | 131 |
| 6.3 阻尼器性能和宏观建模 | 134 |
| 6.3.1 圆柱槽流体阻尼器 | 134 |
| 6.3.2 黏性阻尼墙 | 138 |
| 6.3.3 阻尼孔流体阻尼器 | 142 |
| 6.4 结构分析 | 149 |
| 6.5 实验研究 | 151 |
| 6.6 设计依据 | 164 |
| 6.7 结构实现 | 164 |
| 参考文献 | 169 |
| 7 调谐质量阻尼器 | 171 |
| 7.1 引言 | 171 |
| 7.2 基本原理 | 172 |
| 7.2.1 Den Hartog 解答 | 173 |
| 7.2.2 有阻尼结构情况 | 175 |
| 7.2.3 其他优化准则 | 178 |
| 7.2.4 风与地震荷载 | 180 |
| 7.3 结构分析 | 184 |
| 7.3.1 弹性结构 | 185 |
| 7.3.2 非弹性结构 | 186 |
| 7.4 实验研究 | 187 |
| 7.4.1 小比例试验 | 187 |
| 7.4.2 足尺试验 | 191 |
| 7.5 设计依据和实现问题 | 192 |
| 7.6 结构实现 | 193 |
| 7.6.1 澳大利亚悉尼 Centerpoint 塔 | 194 |
| 7.6.2 纽约 Citicorp 中心和波士顿 John Hancock 塔 | 195 |
| 7.6.3 日本 Chiba(千叶)港塔 | 197 |

| | | |
|-------|--------------------------|-----|
| 7.6.4 | 日本 Osaka(大阪)Funade(船出)桥塔 | 199 |
| 7.6.5 | 日本 Kimitsu(君津)市钢烟囱 | 200 |
| 7.7 | 相关研究及结论要点 | 202 |
| 7.7.1 | 非线性 TMD 和冲击振动吸振器 | 203 |
| 7.7.2 | 半主动 TMD 和混合质量阻尼器 | 204 |
| | 参考文献 | 209 |
| 8 | 调谐液体阻尼器 | 212 |
| 8.1 | 引言 | 212 |
| 8.2 | 基本原理 | 215 |
| 8.3 | 阻尼器性能和宏观建模 | 221 |
| 8.4 | 结构分析和设计 | 226 |
| 8.5 | 实验研究 | 229 |
| 8.6 | 实现问题 | 230 |
| 8.7 | 结构实现 | 231 |
| | 参考文献 | 239 |
| 9 | 智能材料 | 241 |
| 9.1 | 引言 | 241 |
| 9.2 | 形状记忆合金 | 241 |
| 9.2.1 | 基本原理 | 243 |
| 9.2.2 | 结构应用 | 244 |
| 9.3 | 压电材料 | 247 |
| 9.3.1 | 基本原理 | 247 |
| 9.3.2 | 结构应用 | 249 |
| 9.4 | 电流变液体 | 250 |
| 9.4.1 | 基本原理 | 251 |
| 9.4.2 | 结构应用 | 254 |
| 9.5 | 磁流变液 | 256 |
| | 参考文献 | 259 |
| | 附录 英制到国际单位制(SI)转换表 | 262 |

1 緒論

在大多数建筑物的设计中,必须考虑的基本荷载是重力的影响。这些荷载一直存在,因此建筑物需在整个工作寿命中予以抵抗。一般来说,与建筑物的特有时间相比,它们随时间的变化较慢,因此将其做静力简化是非常合适的,此外,根据自重和使用要求其大小能很容易确定。这种多因素的组合极大地简化了建筑设计,而且,事实上使得我们的前辈在提出合理的、科学的原理之前能设计并建造出令人印象深刻的结构。问题的简单性允许采用反复试验法来设计,特别是在材料及劳动力成本限制的情况下。

在当今时代,资源常常非常短缺,因此需寻求有效的设计。此外,我们还需要对建筑物加以保护以避免包括风、浪和地震这些非静态和非单向的环境力的影响。对这些荷载类型来说,惯性效应变得非常重要,它能导致动力放大和周期反应,与重力荷载相比,由于这些现象的时间和空间比例要小得多,因此其大小更难预测。

尽管差别很大,但用与研究重力荷载相同的方法对待环境力仍然是一个自然趋势。例如,风和地震力通常简化为需由结构抵抗的合适大小的水平静力荷载,利用这种方法,对应于风和较小地震的水平荷载仅考虑弹性设计,对中或大震允许结构损坏但不倒塌。这种设计准则从 20 世纪早期开始就给一些建筑规范提供了基础,而且结果是相当好的,即便是近似计算侧向效应也肯定会改善建筑的耐久性。

然而,通过考虑环境激励的实际动力特性可获得更显著的改善。基于这种动力学观点,已提出了新的和革新性的结构保护概念,它们已处于不同的发展阶段。目前的结构保护体系可分成如表 1.1 所示的三种类型,它们可以通过分析所使用的控制瞬态环境作用能量的方法来加以区别。

表 1.1 结构防护体系

| 隔 震 | 被动消能 | 半主动和主动控制 |
|-------|---------|-----------|
| 弹性支座 | 金属阻尼器 | 主动支撑系统 |
| | 摩擦阻尼器 | 主动质量阻尼器 |
| 铅橡胶支座 | 黏弹性阻尼器 | 可变刚度或阻尼体系 |
| | 黏性液体阻尼器 | 智能材料 |
| 滑动摩擦摆 | 调谐质量阻尼器 | |
| | 调谐液体阻尼器 | |

目前隔震技术已在世界各地广泛应用。隔震系统通常置于结构的基础,利用其塑性柔性和吸能能力。该系统能在地震输入能传给结构之前部分反射和部分吸收其能量,它的最终效果是降低了结构系统的要求耗能值,因而增加了其耐久性。有关隔震技术的详细论述见 Skinner 等(1993)最近的专题著作。

表 1.1 的第三列是半主动和主动控制系统。半主动和主动结构控制是借助于一定外部能源输入以使控制系统产生动作而控制和修正结构的运动的一个新领域。但半主动系统与主动系统不同,仅需要极小的能量来调节它们的力学特性,而且也不给结构输入能量。近年来明显重视对半主动和主动结构控制研究,并将重点放在如何减小风和地震的响应上。该技术在目前阶段已进行了实际设计制作并安装在实际结构中,有兴趣的读者可参考 Soong(1990)以及 Soong 和 Constantinou(1994)有关半主动和主动结构控制的理论与实际应用方面的讨论。

在结构设计中所有这些技术的作用逐渐加大,但本书的重点是表 1.1 中间一列所示的被动消能(PED)体系,以及智能材料。目前,对用于结构的被动消能装置的研究与开发已有大约 25 年历史。与隔震技术类似,安装于结构中的被动消能装置的基本作用是吸收或消耗一部分输入能量,减小了基本结构件的耗能要求值,并使可能的结构损坏降到最低程度。但与隔震不同的是,这些装置不仅能有效抵御地震运动,而且还能抵御风致运动,与半主动与主动系统相反,它们不需要外部能源。

近年来,人们做了很大的努力来提出被动消能或附加阻尼的概念并将其发展成一种可行的技术,而且在世界范围内已有一些这类装置安装于结构之中了。本书力图介绍被动消能的基本概念,并搜集与这些装置相关的有用信息,目前,这些信息散见于多种信息源诸如技术杂志、会议论文集、实验室报告和学术论文等之中。

本书将对被动消能装置的有关性能特性进行广泛讨论。表 1.1 中间所列的每种主要装置类型都按如下安排在单独章节中排出并讨论:① 历史观点;② 基本原理;③ 数学模型、理论和试验;④ 实际考虑,设计和实现问题;⑤ 结构应用。在第 9 章简要说明了与土木工程结构应用有关的智能材料研究情况。如表 1.1 所列,这些内容可认为属于半主动系统的范围,是具有某种自适应特性的被动体系的延伸。

如上所述,为充分认识和理解被动消能体系的好处,我们必须很好掌握结构动力学,有关内容的详细论述显然超出了本书的范围,但在第 2 章中对有关较为重要的方面做了介绍性叙述,其中包括结构工程中能量概念的讨论,它为后续章节中被动消能理论及中心议题的论述提供了一个统一的原理。

最后要指出的是,由于很多资料的采用是在成书过程之中的,因此没有统一书中的单位,同时,觉得保持这些原单位制更容易参考原出版物。为方便起见,在附录中提供了英制单位和国际单位的转换表。

参 考 文 献

- Skinner, R. I., Robinson, W. H., and McVerry, G. H. (1993), *An Introduction to Seismic Isolation*, Wiley, Chichester and New York.
- Soong, T. T. (1990), *Active Structural Control: Theory and Practice*, Longman, London and Wiley, New York.
- Soong, T. T. and Constantinou, M. C., eds. (1994), *Passive and Active Vibration Control in Civil Engineering*, Springer-Verlag, Wien and New York.

2 基本原理

2.1 引言

随着包括被动消能体系在内的现代防护体系的发展及运用,整个结构工程界正在经历至少是概念上的大的变化。建筑及桥梁中传统的静力简化已不再满足要求,取而代之的是结构的分析与设计必须考虑它们的动力特性。正是基于这个考虑,我们提出了与结构动力学有关的一些基本概念。本章中,我们集中说明对有被动消能体系结构的理解、分析和设计颇为重要的内容。

下节将讨论一个简单的单自由度结构模型,它是能表明动力特性的一个原型,并且特别强调的是它的阻尼效应。正如我们会看到的,加大阻尼能显著地减少系统对时变激励的响应。这个模型对帮助了解动力性能是有用的,但不足以代表实际结构,实际结构包括更详细的内容。因此,我们引入多自由度模型,以及几个一般动力分析的数值过程,同时还包括对比较传统的和被动阻尼结构的典型阻尼特性的讨论。最后给出了能量表达的完全论述。从本质上说我们能将环境激励看成对结构的一个能量输入,这些能量概念与被动阻尼结构的讨论密切相关,它将在本书的其他内容中多次出现。

2.2 简单结构模型的动力响应

2.2.1 一般公式

在这一节,我们从能在受到动力荷载作用下显示某些关键响应特性的最简单的模型开始。应该记住的是我们研究的是数学简化而不是实际结构的特性,要恰当地建立一个实际建筑的模型需要很多的细节。然而,通过研究这些简单模型可以容易地引入许多概念。我们的论述采用了 Newmark 等(1971)和 Hanson(1993)的文献中的内容。

图 2.1 所示的为基本的单自由度模型的侧向运动,模型中一个质量为 m 的质量物体,被一个总线性弹性刚度为 k 的弹簧和一个线性黏性为 c 的阻尼器支承。该单自由度系统受到一个以空间均布、依赖时间的地地面位移 $x_g(t)$ 为特征的地震激励和一个由 $p(t)$ 表示的风载作用。受激模型响应为一个相对地面的侧向位移 $x(t)$ 。因此该理想化结构的总位移可简单表示为

$$x_g(t) = x_g(t) + x(t) \quad (2.1)$$

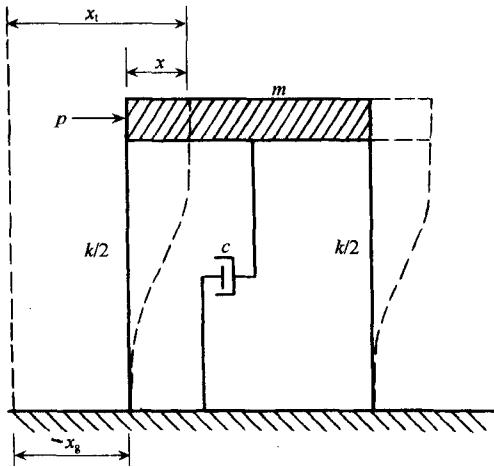


图 2.1 单自由度模型

假定 $x_g(t)$ 和 $x(t)$ 是连续的、二次可微函数。由定义可知, 线弹性弹簧产生一个正比于位移的力, 同时, 线性黏性阻尼器产生正比于速度的力。因此单自由度模型的运动方程可写成:

$$m\ddot{x} + cx + kx = -m\ddot{x}_g + p \quad (2.2)$$

其中一个上加点表示对时间的微分。

2.2.2 自由振动

现在假定, 在 $t=0$ 时刻, 质量 m 有侧向位移 x_0 , 惯性速度也为零。释放位移 x_0 ; 同时假定 $\dot{x}_g(t)=0$ 和 $p(t)=0$, 方程(2.2)简化为自由振动。此外, 在无阻尼(即 $c=0$)时, 其响应为简谐运动:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t \quad (2.3)$$

式中: ω_0 是无阻尼结构的固有圆频率, 并定义为

$$\omega_0 = \left(\frac{k}{m} \right)^{1/2} \quad (2.4)$$

其他相关量, 固有频率 f_0 和固有周期 T_0 由式(2.5a)、式(2.5b)相联系, 即

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (2.5a)$$

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (2.5b)$$

无阻尼系统是保守系统, 总以势能(应变能)和动能交换为特征, 没有能量耗散。

另外, 经验表明物理系统总是某种程度上耗散的。对非零阻尼, 单自由度模型的自由振动响应变为

$$x(t) = x_0 e^{-\zeta \omega_D t} \left(\cos \omega_D t + \frac{\zeta \omega_0}{\omega_D} \sin \omega_D t \right) \quad (2.6)$$

式中： ω_D 和 ζ 分别表示有阻尼的自振圆频率和无量纲阻尼比，更具体地：

$$\omega_D = \omega_0 (1 - \zeta^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.7a)$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_0} \quad (2.7b)$$

注意到 $\zeta=0$ 时，式(2.6)直接简化为式(2.3)。实际上，式(2.6)仅适用于小阻尼系统，即 $\zeta < 1$ ，这正是我们感兴趣的。式(2.6)所定义的响应如图 2.2 所示，其中取了几个阻尼比值以说明增加黏性阻尼对单自由度系统响应的显著影响。 $\zeta=0.01$ 时，系统振幅减小至 $0.10x_0$ 之前振动了近 37 周，而 $\zeta=0.20$ 时，系统只需振动 2 周。在所有情况下，当储存在弹簧中的能量经黏性作用耗散时，阻尼系统逐渐回到未变形状态。

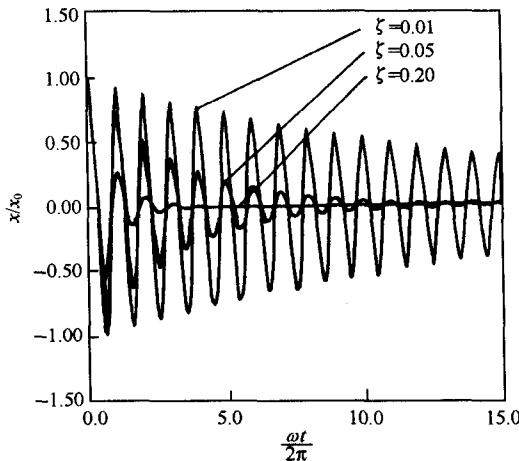


图 2.2 自由振动响应

2.2.3 强迫振动

现在讨论强迫振动。首先研究单自由度模型受幅值为 p_0 、频率为 ω 的简谐荷载作用的响应。此时用荷载的复指数形式是有利的，因此式(2.2)中的作用力为如下形式：

$$p(t) = p_0 e^{i\omega t} \quad (2.8)$$

由欧拉公式：

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \quad (2.9)$$

式中： i 表示单位虚数 [即 $i=(-1)^{\frac{1}{2}}$]。假定地面加速度 $\ddot{x}_g=0$ 。系统从 $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$ 的静止状态开始动，简谐荷载时式(2.2)的解为