CROWN
CROWN CLASSIC

50年磨一剑

中少社隆重推出首套本版教辅图书

皇冠优化名题

高中数学

丛书主编 ◉ 陈效师 马利荣

高考全攻略，名校名师详解经典名题

中国少年儿童新闻出版总社
中国少年兒童出版社

CROWN CLASSIC

HUANGGUAN YOUHUA MINGTI

皇冠优化名题

高中数学

丛书主编◉陈效师　马利荣

本册主编◉杜　谦　樊庆礼

编　　写◉杜典意　吴远伦　胡福军

中国少年儿童新闻出版总社

中国少年兒童出版社

CROWN CLASSIC

皇冠优化名题

高中数学

图书在版编目(CIP)数据

皇冠优化名题.高中数学/陈效师,马利荣主编;杜谦等编写.—北京:中国少年儿童出版社,2006.2

ISBN 7-5007-7997-6

Ⅰ.皇... Ⅱ.①陈... ②马...③杜... Ⅲ.数学课—高中—习题 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第011032号

HUANG GUAN YOU HUA MING TI

(高中数学)

出版发行:中国少年儿童新闻出版总社

中国少年儿童出版社

出 版 人:海 飞

执行出版人:赵恒峰

策 划:徐寒梅 缪 惟 胡 光

责任编辑:缪 惟 董 慧

装帧设计:缪 惟

美术编辑:缪 惟

责任印务:李书森

社 址:北京市东四十二条21号

邮政编码:100708

总 编 室:010-64035735

传 真:010-64012262

发 行 部:010-84037667 010-64032266-8269

h t t p://www.ccppg.com.cn

E-mail:zbs@ccppg.com.cn

印刷:山东新华印刷厂德州厂

经销:新华书店

开本:880×1230 1/16

印张:18.5

2006年2月第1版

2006年2月山东第1次印刷

字数:550千字

印数:1—15000册

ISBN 7-5007-7997-6/G·5999

定价:22.20元

图书若有印装问题,请随时向印务部退换。

前　言

随着除岁烟花爆竹的逝去,2006 年的春天到来了！迎接高考的莘莘学子经过短暂的休整,开始了新一轮的“备战”。今年的高考试卷分别由 17 个省市自主命题,由此进一条拓宽了高考试卷的多元化。这使我们看到,高考正以越来越灵活的形式,越来越鲜活的命题体现着考核思想。全新的高考模式,呼唤全新的辅导读本,为了适应新形势的要求,《皇冠优化名题》应运而生。

据教学专家分析,2005 年全国各地高考均以《考试大纲》为纲,差异性表现在对试题的具体设置,而不是难易程度的不同,各地试题分别从不同角度,用不同方式对同一考点提出考核,这就要求学生对新角度、新形式的考题要有一定的应对能力。为了提高应试能力,选择题库类读本进行训练是非常重要的,而在浩瀚纷纭的题库类读本中,《皇冠优化名题》将会亮人眼目,独树一帜。

《皇冠优化名题》以《考试大纲》为纲,全书严格遵循考纲、考点、考题三点一线的原则编排设置。全书精选了 14 省市试卷和全国统一试卷中具有典范意义的试题进行讲析,凸显题型特点并注重解题的方法和技巧,兼顾各地方版的风格特点,对高考真题和模拟题进行了有机的联系,使两类试题实现了在训练上的互补。《皇冠优化名题》的编写体例是:

知识网络:按《考试大纲》要求,归纳专题知识,揭示专题知识的内在联系。

考点完全剖析:按《考试大纲》要求,用精要的语言解读考点,结合例题对考点剖析,剖析该考点当前怎么考以及应考趋势。

高考基础题典:包括**【高考真题精华】**和**【模拟试题启示】**两个子栏目,本栏目按照《考试大纲》的要求,从 2005 年和 2004 年的高考试题和模拟试题中精选出较基础、典型的试题,对考点进行多角度演示。

高考综合拓展:包括**【高考真题精华】**和**【模拟试题启示】**两个子栏目,本栏目结合《考试大纲》的要求,从 2005 年和 2004 年的高考真题和模拟试题中精选出中高难度的试题,从更高的要求解读考点,并对明年的考试题型作出预测。

方法规律总结:总结本单元的知识点及解题技巧,并在备考方法上作出指导。

新型精品题、历届经典题、名卷压轴题:三个栏目各有特点,从不同层面表现了高考试卷中的核心内容,各栏依序以精品题束的形式,安排在单元之后,通过对该板块的专项练习,可事半功倍地提高学生的应考能力,进行综合考查。

2006 年摸拟试卷:这是全书画龙点睛之笔。各试卷分别模仿全国、江苏、湖北、山东等卷的特点,带有对新一年高考趋势预测的特点。

本书编者身处教学第一线,潜心研究,精心设计,希望《皇冠优化名题》能给高中师生架起一座金桥,祝今年的考生能有更多的人登上中华名校的殿堂。

限于编者水平有限,加之时间仓促,书中错误在所难免,我们真诚希望得到您的热心支持,欢迎您真心的指教,以便我们进一步改进工作,使之更臻完善。

2006 年 2 月

北京

目　录

第八单元 圆锥曲线

第九单元 直线、平面、简单几何体(A)

第九单元 直线、平面、简单几何体(B)

第十单元 排列、组合和概率

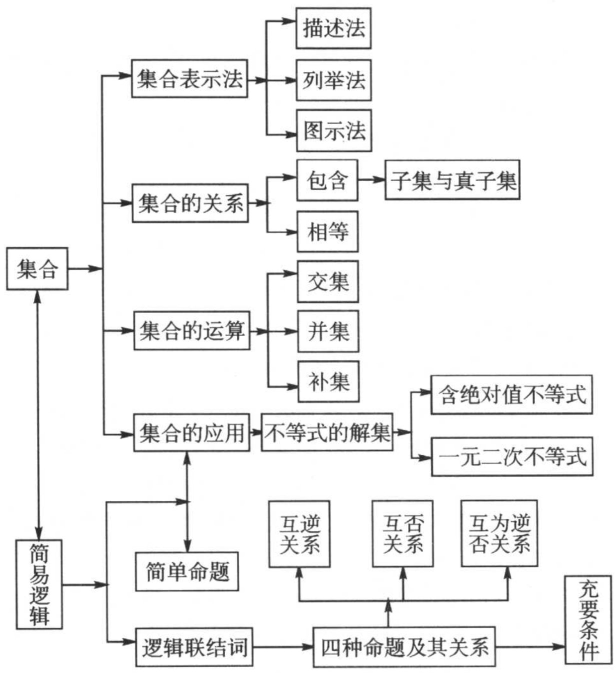
第十一单元 概率与统计

第十二单元 极限与导数

第十三单元 复 数

第一单元 集合与简易逻辑

知识网络



网络简析

1. 本单元考查的内容是：集合，子集，补集，交集，并集，逻辑联结词，四种命题，充要条件.

考试要求：1)理解集合、子集、补集、交集、并集的概念；了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义；掌握有关的术语和符号，并会用它们正确地表示一些简单的集合. 2)理解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义；理解四种命题及其相互关系；掌握充分条件、必要条件、充要条件的意义.

重点是：1)集合的表示；2)集合之间的关系及运算；3)会借助二次函数图象及一元二次方程的解写出一元二次不等式的解集，熟练掌握几种常用的解绝对值不等式的方法；4)充分条件、必要条件的判断及证明.

2. 本单元下设两个考点：集合、简易逻辑与充要条件.

3. 本单元集合问题中蕴涵有丰富的数学思想：1)数形结合思想，有些集合题比较抽象，在求解时往往不知如何动手，如果能够以数形结合的思想为指导，将抽象的数学语言(符号语言)与直观的图形结合起来，通过数与形的双向联系与沟通来解决问题，可以达到好的效果. 常用的图形有数轴与文氏图. 2)等价转化思想，数学的解题过程就是等价转化的过程，一般来说，总是将复杂问题转化为简单问题，将新奇难解的问题转化为熟悉易解的问题. 3)分类讨论思想，分类指的是按照一定的标准，把问题分成几个部分或几种情况，采取的是"化整为零，各个击破"的策略，通过这种策略可将一个复杂问题分解成若干个简单问题，从而获得完整的解答. 4)补集思想，在正面求解难度较大时，若其反面较为简单，可考虑从反面入手，便能获得简解，这是正难则反的解题策略.

4. 通过分析近几年的高考试题及其命题立意的变形发展，建议对本专题的复习应注意如下两点：1)把握好基本知识与基本方法，重点掌握集合、简易逻辑的概念及运算方法，要真正注重数形结合思想的运用，会利用数轴、文氏图解相关问题. 2)由于涉及本章知识的综合性大题不多，在复习中不宜作过高过多的要求，打牢基础才是根本.

考点1 集 合

考点完全剖析

本单元是高中数学的起始章，"集合"概念又是高中数学的基石，因此对"集合"的考查每年必不可少. 本章作为数学的基本语言和工具，其应用主要涉及以下三个方面：一是集合本身的知识，即集合的有关概念、关系、运算等(例如2005年全国卷Ⅰ第二题、2005年浙江卷第9题、2004年及2005年湖北卷第1题等)；二是对集合语言与集合思想的运用、如方程与不等式的解集、函数的定义域和值域、曲线间的相交问题等，也即集合作为工具在数学中的应用(2005年上海卷第14题、2004年重庆理科卷第1题等)；

考查集合的难点是集合之间的关系判断及运算：解决集合问题时，首先要明确集合元素的意义，弄清集合由哪些元素所组成，这就需要对集合的文字语言、符号语言、图形语言进行相互转化. 在概念的理解上要注意以下几个方面：

1) 要注意集合元素的三性：确定性、互异性、无序性；

2) 要注意 0，$\{0\}$，$\varnothing$，$\{\varnothing\}$ 的关系：数 0 不是集合，$\{0\}$ 是含有一个元素 0 的集合，而 $\varnothing$ 是不含任何元素的集合，$\{\varnothing\}$ 则是以 $\varnothing$ 为元素的集合.

3) 要注意空集的特殊性：空集是任何非空集合的真子集，它在解题过程中极易被忽视而导致错误.

4) 要注意符号"$\in$"与"$\subset$"区别：符号"$\in$"表示元素与集合之间的从属关系，"$\subset$"表示集合与集合之间的包含关系.

在问题的求解过程中应注意以下几点：

1)对研究对象进行分类，有规律地分析，是避免重与漏的关键.

2)对于元素个数较少的集合可采用"列举法"，元素个数较多的采用"描述法".

3)熟悉文氏图中各区域内元素的属性，可以避开复杂的推理过程，帮助快速解决相关问题. 对集合的关系与运算，多利用数轴、文氏图来分析，可以化难为易，化抽象为直观，能充分体现出数形结合思想的重要作用.

集合是中学数学的重要内容之一，在很多数学分支中都有广泛的应用，是历年高考中的必备题.

例1 设集合 $I=\{x \mid |x|<3, x\in \mathbf{Z}\}$，$A=\{1, 2\}$，$B=\{-2, -1, 2\}$，则 $A\cup(C_I B)=$ （　）

A. $\{1\}$　B. $\{1, 2\}$　C. $\{2\}$　D. $\{0, 1, 2\}$

解析 $I=\{x \mid -2, -1, 0, 1, 2\}$，$C_I B=\{0, 1\}$，$A\cup(\complement_I B)=\{0, 1, 2\}$. 选 D.

指导 本题考察集合的逻辑运算，可直接求得. 集合主要有三种逻辑运算：交集，并集，补集，运算时要留意集合元素的性质，元素确定性，互异性，无序性，要注意补集的运算是离不开全集的，在化简集合时，经常用到两种工具：数轴和韦恩图.

例2 设 P、Q 为两个非空实数集合，定义集合 $P+Q=\{a+b \mid a\in \mathbf{P}, b\in \mathbf{Q}\}$，若 $P=\{0, 2, 5\}$，$Q=\{1, 2, 6\}$，则 $P+Q$ 中元素的个数是 （　）

A. 9　B. 8　C. 7　D. 6

解析 由定义求得 $P+Q=\{1, 2, 6, 3, 4, 8, 7, 11\}$，选 B.

指导 在求 $a+b$ 时，注意 $5+1=0+6$，而集合的元素满足互异性. 本题属于即时定义的新型题.

高考基础题典

高考真题精粹

1. (05，全国卷Ⅰ)设 I 为全集，S_1、S_2、S_3 是 I 的三个非空子集，且 $S_1\cup S_2\cup S_3=I$，，则下面论断正确的是 （　）

A. $\complement_I S_1\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$　B. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cap \complement_I S_3)$

C. $\complement_I S_1\cap \complement_I S_2\cap \complement_I S_3=\varnothing$　D. $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cup \complement_I S_3)$

解析 若令 $S_1=S_2=S_3=I$，可排除 B, D，再令 $S_1\subset S_2=S_3=I$，可排除 A，从而选 C.

指导 三个集合 S_1，S_2，S_3 具有任意性，这给答题带来一定的难度，同时也可用特法来解决. 当然所选项必须满足条件.

2. (2004，全国理)设 A、B、I 均为非空集合，且满足 $A\subseteq B\subseteq I$，则下列各式中错误的是 （　）

A. $(\complement_I A)\cup B=I$　B. $(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=I$

C. $A\cap(\complement_I B)=\varnothing$　D. $(\complement_I A)\cup(C_I B)=\complement_I A$

解析 用图示法即可得答案为 B.

指导 图示法是解决集合问题的重要方法.

3. (2004，江苏)设集合 $P=\{1, 2, 3, 4\}$，$Q=\{x \mid |x|\leqslant 2, x\in \mathbf{R}\}$，则 $P\cap Q$ 等于 （　）

A. $\{1, 2\}$　B. $\{3, 4\}$

C. $\{1\}$　D. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

解析 在 P 中只有两个元素 1，2 属于 Q，故 $P\cap Q=\{1, 2\}$，选 A.

指导 本题考查集合的关系，是简单的集合运算，属于容易题.

4. (03，北京卷)设集合 $A=\{x \mid x^2-1>0\}$，$B=\{x \mid \log_2 x>0\}$，则 $A\cap B$ 等于 （　）

A. $\{x \mid x>1\}$　B. $\{x \mid x>0\}$

C. $\{x \mid x<-1\}$　D. $\{x \mid x<-1$ 或 $x>1\}$

解析 $A=\{x \mid x<-1$ 或$>1\}$，$B=\{x \mid x>1\}$，故 $A\cap B=\{x \mid x>1\}$，选 A.

指导 本题考查简单不等式的解法，集合的简单运算，属于容易题.

5. (05，江苏卷)设集合 $A=\{1, 2\}$，$B=\{1, 2, 3\}$，$C=\{2, 3, 4\}$，则$(A\cap B)\cup C=$ （　）

A. $\{1, 2, 3\}$　B. $\{1, 2, 4\}$

C. $\{2, 3, 4\}$　D. $\{1, 2, 3, 4\}$

解析 因为 $A\cap B=\{1, 2\}$，所以$(A\cap B)\cup C=\{1, 2, 3, 4\}$，故选 D.

指导 本题考查交集、并集等相关知识.

6. (04，湖北理)设 A、B 为两个集合，下列四个命题：

①$A\not\supseteq B\Leftrightarrow$对任意 $x\in \mathbf{A}$，有 $x\notin B$② $A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$，

③$A\not\subseteq B\Leftrightarrow A\not\supseteq B$，④$A\not\subseteq B$ 存在 $x\in \mathbf{A}$，使得 $x\notin B$.

其中真命题的序号是________.（把符合要求的命题序号都填上）

解析 ①②③均不一定成立，④成立. 填④.

指导 本题考查集合与集合的关系.

7. (04. 湖北理)设集合 $P=\{m \mid -1<m<0\}$，$Q=\{m\in \mathbf{R} \mid mx^2+4mx-4<0$ 对任意实数 x 恒成立$\}$，则下列关系中成立的是 （　）

A. $P\subseteq Q$　B. $Q\supseteq P$

C. $P=Q$　D. $P\cap Q=\varnothing$

解析 将 Q 化简得 $Q=\{m \mid -1<m\leqslant 0\}$. 选 A.

指导 化简 Q 时，要注意特殊情况 $m=0$ 时，也符合题意.

8. (04，湖北)设 $A=\{x \mid x=\sqrt{5k+1}, k\in \mathbf{N}\}$，$B=\{x \mid x\leqslant 6, x\in \mathbf{Q}\}$，则 $A\cap B$ 等于 （　）

A. $\{1, 4\}$　B. $\{1, 6\}$

C. $\{4, 6\}$　D. $\{1, 4, 6\}$

解析 $A=\{1, \sqrt{6}, \sqrt{11}, 4, \sqrt{21}, \sqrt{26}, \sqrt{31}, 6, \cdots\}$

$\therefore A\cap B=\{1, 4, 6\}$，选 D.

指导 将 A 列举出小于或等于 6 的全体实数即可求得 $A\cap B$.

9. (05，山东)设集合 A、B 是全集∪的两个子集，则 $A\subsetneqq B$ 是$(\complement_U A)\cup B=U$ 的 （　）

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

解析 集合 $A\subsetneqq B\Rightarrow(C_U A)\cup B=U$；而$(C_U A)\cup B=U\Rightarrow A\subsetneqq B$，完全可能 $A=B$，所以选充分不必要条件. 选 A.

指导 本题考查集合的基本知识及充分必要条件，本题可以画出文氏图再作判断.

10. (04，江苏)二次函数 $y=ax^2+bx+c(x\in \mathbf{R})$的部分对应值如下表：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是________.

解析 由表可知二次函数的图象与轴有两个交点，并且开口向上，即 $a>0$，故不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $\{x|x<-2$ 或 $x>3\}$.

指导 由表中数据分析出二次函数图象的开口方向，相应方程的两个解，即可解不等式．本题考查一元二次函数、一元二次方程、一元二次不等式三者之间的关系．

11.（04，山东山西河南河北江西安徽）不等式 $|x+2|\geqslant|x|$ 的解集是________.

解析 两边同时平方，得 $4x+4\geqslant0$，所以不等式的解集为 $\{x|x\geqslant-1\}$.

指导 如果按零点区分法，要分三种情况，比较麻烦．注意到不等式两边均为非负数，同时平方可以很简捷地得到答案．

模拟试题启示

12.（05，江苏无锡）不等式 $(x-1)\sqrt{x+2}\geqslant0$ 的解集为（ ）

A. $[1,+\infty)$　　B. $[1,+\infty)\cup\{-2\}$

C. $[-2,1)$　　D. $[-2,+\infty)$

解析 由 $(x-1)\sqrt{x+2}\geqslant0$ 得 $(x-1)\sqrt{x+2}>0$ 或 $(x-1)\sqrt{x+2}=0$，求得 $x>1$，或 $x=1$ 或 $x=-2$，即解集为 $[1,+\infty)\cup\{-2\}$. 选 B.

指导 本题考查简单无理不等式的解法，很容易失去解 $x=-2$.

13.（05，江苏常州调研）若含有集合 $A=\{1,2,4,8,16\}$ 中三个元素的 A 的所有子集依次记为 $B_1,B_2,B_3,\cdots,B_n$（其中 $n\in\mathbf{N}^*$），又将集合 $B_i(i=1,2,3,\cdots,n)$ 的元素的和记为 a_i，则 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=$________.

解析 含有三个元素的子集共有 10 个，每个元素作为三个元素的子集共出现 $C_4^2=6$ 次，故所有元素和为 $6\times(1+2+4+8+16)=6\times31=186$. 填 186.

指导 本题考查子集的概念、子集的个数及分析问题和解决问题的能力．

14.（05，湖北八校第一次联考）关于 x 的不等式 $ax-b>0$ 的解集为 $(1,+\infty)$，则关于 x 的不等式 $\dfrac{ax+b}{x-2}>0$ 的解集为（ ）

A. $(-1,2)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

C. $(1,2)$　　D. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

解析 由已知不等式 $ax-b>0$ 的解集为 $(1,+\infty)$，得 $a=b$ 且 $a>0$，所以不等式 $\dfrac{ax+b}{x-2}>0$，即为 $\dfrac{x+1}{x-2}>0$，解集为 $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$．选 B.

指导 本题考查不等式的解法，注意参数的正与负，否则，很容易失误．

高考综合名题

高考真题精粹

15.（04，辽宁）设全集 $\mathbf{U}=\mathbf{R}$.

（1）解关于 x 的不等式 $|x-2|+a-1>0(a\in\mathbf{R})$.

（2）记 A 为（1）中不等式的解集，集合 $B=\left\{x\,\middle|\,\sin\left(\pi x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\pi x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0\right\}$，若 $(\complement_U A)\cap B$ 恰有 3 个元素，求 a 的取值范围．

解析 （1）由 $|x-1|+a-1>0$，$|x-1|>1-a$.

当 $a>1$ 时，解集是 R；

当 $a\leqslant1$ 时，解集是 $\{x|x<a$ 或 $x>2-a\}$.

（2）当 $a>1$ 时，$\complement_U A=\varnothing$；

当 $a\leqslant1$ 时，$\complement_U A=\{x|a\leqslant x\leqslant2-a\}$.

因 $\sin\left(\pi x-\dfrac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\pi x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=2\left[\sin\left(\pi x-\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\left(\pi x-\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\dfrac{\pi}{3}\right]$

$=2\sin\pi x$.

由 $\sin\pi x=0$，得 $\pi x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=k\in\mathbf{Z}$，所以 $\mathbf{B}=\mathbf{Z}$.

当 $(\complement_U A)\cap B$ 恰有 3 个元素时，a 就满足 $\begin{cases}a<1,\\2\leqslant2-a<3,\\-1<a\leqslant0.\end{cases}$ 解得 $-1<a\leqslant0$.

指导 集合 A 是含参数的绝对值不等式的解集，分两种情况可得 A 的具体结果．对于集合 B，它是一个简单三角方程的解集，先将 B 进行化简可得 $\mathbf{B}=\mathbf{Z}$，明确了 A、B 之后本题就迎刃而解．本小题主要考查集合的有关概念，含绝对值的不等式，简单三角函数式的化简和已知三角函数值求角等基础知识，考查简单的分类讨论方法，以及分析问题和推理计算能力．

模拟试题启示

16.（05，湖北重点中学联考）已知 $a>1$，P：$a(x-2)+1>0$，Q：$(x-1)^2>a(x-2)+1$．试寻求使得 P，Q 都成立的 x 的集合．

解析 由题意，要使 P，Q 都成立，须且只须不等式组 $\begin{cases}a(x-2)+1>0,\\(x-1)^2>a(x-2)+1\end{cases}$ 成立．

不等式组等价于 $\begin{cases}x>2-\dfrac{1}{a},\\(x-a)(x-2)>0.\end{cases}$

①当 $1<a<2$ 时，则有 $\begin{cases}x>2-\dfrac{1}{a},\\x>2\text{ 或 }x<a.\end{cases}$ 而 $a-\left(2-\dfrac{1}{a}\right)=a+\dfrac{1}{a}-2>0$，∴ $a>2>-\dfrac{1}{2}$，

所以 $x>2$ 或 $2-\dfrac{1}{a}<x<a$.

②当 $a=2$ 时，$x>\frac{3}{2}$ 且 $x\neq 2$.

③当 $a>2$ 时，则有 $\begin{cases}x>2-\frac{1}{a}\\x<2\text{ 或 }x>a\end{cases}$，所以 $x>a$ 或 $2-\frac{1}{a}<x<2$.

综上，①当 $1<a<2$ 时，使 P，Q 都成立的 x 的集合是 $\left\{x|x>2\text{ 或 }2-\frac{1}{a}<x<a\right\}$；

②当 $a=2$ 时，使 P，Q 都成立的 x 的集合是 $\left\{x|x>\frac{3}{2}\text{ 且 }x\neq 2\right\}$；

③当 $a>2$ 时，使 P，Q 都成立的 x 的集合是 $\left\{x|x>a\text{ 或 }2-\frac{1}{a}<x<2\right\}$.

指导 本题主要考查简易逻辑、复合命题的基本概念，含参数不等式的解法、分类讨论和逻辑推理能力. 将复合命题变为不等式组后，比较几个根的大小关系，进而得到答案.

17. (05，上海市七校联考)已知关于 x 的不等式 $\frac{ax-5}{x^2-a}<0$ 的解集为 M.

(1) 当 $a=4$ 时，求集合 M；

(2) 若 $3\in \mathbf{M}$ 且 $5\notin M$，求实数 a 的取值范围.

解析 (1)当 $a=4$ 时，不等式为 $\frac{4x-5}{x^2-4}<0$，解之，得 $M=(-\infty,-2)\cup\left(\frac{5}{4},2\right)$.

(2) 当 $a\neq 25$ 时，$\begin{cases}3\in \mathbf{M}\\5\notin M\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{3a-5}{9-a}<0\\\frac{5a-5}{25-a}\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>9\text{ 或 }a<\frac{5}{3}\\1\leqslant a<25\end{cases}.\Rightarrow a\in\left[1,\frac{5}{3}\right)\cup(9,25)$.

当 $a=25$ 时，不等式为 $\frac{25x-5}{x^2-25}<0$，解之，得 $M=(-\infty,-5)\cup\left(\frac{1}{5},5\right)$，

则 $3\in \mathbf{M}$ 且 $5\notin M$，∴ $a=25$ 满足条件

综上，得 $a\in\left[1,\frac{5}{3}\right)\cup(9,25]$.

指导 本题考查分式不等式的解法，集合的知识. 注意第(2)问要分 $a\neq 25$ 与 $a=25$ 两种情况考虑，否则容易出现错误.

考点 2 命题和充要条件

考点完全剖析

1. 所谓命题，是指可以判断其真假的陈述语句，一个陈述语句所叙述的事情符合事实，就称之为真命题，反之，一个陈述语句所叙述的事情违反事实，就称之为假命题.

2. 命题有四种形式，即原命题、逆命题、否命题、逆否命题，其中原命题和逆否命题等价，逆命题和否命题等价.

3. 充分条件和必要条件是用来区分命题的条件 A 与条件 B 之间的关系的数学概念，若 $A\Rightarrow B$，则称 A 是 B 成立的充分条件；若 $B\Rightarrow A$，则称 A 是 B 成立的必要条件；若 $A\Leftrightarrow B$，则称 A 是 B 的充要条件.

4. 由于互为逆否的两个命题是等价的，因此 $A\Rightarrow B$ 与 $\neg B\Rightarrow\neg A$ 等价，可由 $\neg B\Rightarrow\neg A$ 得 A 是 B 的充分条件；又 $B\Rightarrow A$ 与 $\neg A\Rightarrow\neg B$ 等价，可由 $\neg A\Rightarrow\neg B$ 得出，A 是 B 成立的必要条件.

5. 充要条件的概念对证明问题的方法——综合法、分析法起着指导性作用，综合法的特点是由因导果，即由命题的条件出发，寻找命题结论成立的充分条件；分析法的特点是执果索因，即由命题的结论出发，寻找命题结论成立的充分条件.

6. 判断充要条件问题时，要按以下步骤进行：(1)明确命题中的条件 A 是什么，结论 B 是什么；(2)由条件 A 推导结论 B，若 A 不能推出 B，则 A 不是 B 成立的充分条件，若 $A\Rightarrow B$，则 A 是 B 成立的充分条件；(3)由结论 B 推导条件 A，若 $B\Rightarrow A$，则 A 是 B 成立的必要条件；若 B 不能推出 A，则 A 不是 B 成立的必要条件.

7. “有且仅有”，“当且仅当”，“需且仅需”等用语都是指充要条件的.

本考点内容在高考中主要考查基本概念和基本原理，不能单独命题，只能与其它知识结合，解答简易逻辑问题的关键问题是熟练地掌握基本概念和基本方法(如判断条件的充要性常用定义法、逆否法、集合法等).

充分条件、必要条件的判断及证明，特别要重视“反证法”的应用.

命题之间的逻辑关系以及判断是非的能力和推理能力的提升，这里要重视“反证法”的应用(如 2005 年湖北卷第 2 题、天津卷第 3 题等).

例 1 设集合 $A=\left\{x|\frac{x-1}{x+1}<0\right\}$，$B=\{x\mid|x-1|<a\}$，若“$a=1$”是“$A\cap B\neq\varnothing$”的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

解析 由题意，得 A：$-1<x<1$，B：$1-a<x<1+a$.

当 $a=1$ 时 B：$0<x<2$，此时 $A\cap B\neq\varnothing$；

当 $A\cap B\neq\varnothing$ 时，推不出 $a=1$. 所以“$a=1$”是“$A\cap B\neq\varnothing$”的充分不必要条件. 选 A.

指导 本题考查了分式不等式，绝对值不等式的解法及充分必要条件.

例 2 (05，南京)如果 x、y 是实数，那么 $xy>0$ 是 $|x+y|=|x|+|y|$ 的 ( )

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　D. 既不充分又不必要条件

解析　当 $xy>0$ 时 $|x+y|=|x|+|y|$，但 $|x+y|=|x|+|y|$ 时不一定有 $xy>0$，故选 A.

指导　本题考查绝对值不等式的性质及充要条件.

高考基础题典

高考真题精粹

1.（05，江苏卷）命题"若 $a>b$，则 $2^a>2^b-1$"的否命题为________.

解析　原命题的否命题为"若 $a\leqslant b$，则 $2^a\leqslant 2^b-1$".

指导　本题考查了命题间的关系，由原命题可直接写出其否命题.

2.（05，湖北理）对任意实数 a，b，c，给出下列命题：①"$a=b$"是"$ac=bc$"充要条件；②"$a+5$ 是无理数"是"a 是无理数"的充要条件；③"$a>b$"是"$a^2>b^2$"的充分条件；④"$a<5$"是"$a<3$"的必要条件.

其中真命题的个数是　　（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解析　①是假命题，∵ 由 $ac=bc$ 推不出 $a=b$；②是真命题；③是假命题；④是真命题，∵ "$a<3$"⇒"$a<5$"，选 B.

指导　对这种多选题，必须逐一判断，慎重推选.

3.（2004. 福建理）命题 p：若 a、$b\in\mathbf{R}$，则 $|a|+|b|>1$ 是 $|a+b|>1$ 的充分而不必要条件；

命题 q：函数 $y=\sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域是 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$. 则　　（　　）

A. "p 或 q"为假　　B. "p 且 q"为真

C. p 真 q 假　　D. p 假 q 真

解析　由 $|a|+|b|>1$ 推不出 $|a+b|>1$，由 $|a+b|>1$ 可得 $|a|+|b|\geqslant|a+b|>1$，所以 p 假；命题 q 真. 选 D.

指导　本题考查充要条件及复合命题的真假判断.

4.（05，福建卷）已知 p：$|2x-3|<1$，q：$x(x-3)<0$，则 p 是 q 的　　（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

解析　由已知解得 p：$1<x<2$；q：$0<x<3$；由 $p\Rightarrow q$，但由 q 成立推不出 p 成立，所以 p 是 q 的充分不必要条件. 选 A.

指导　先化简 p 与 q，再作命题的推导；本题考查简单不等式的解法及充分必要条件的概念.

5.（05，福建卷，文）已知 p：$a\neq 0$，q：$ab\neq 0$，则 p 是 q 的　　（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

解析　∵ 由 q：$ab\neq 0$，p：$a\neq 0$，反之由 p 成立推不出 q 成立，选 B.

指导　本题考查命题的推导及充分必要条件的概念.

6.（04. 上海春季高考）若非空集合 $M\subset N$，则"$a\in\mathbf{M}$ 或 $a\in\mathbf{N}$"是"$a\in\mathbf{M}\cap N$"的　　（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

解析　由"$a\in\mathbf{M}$ 或 $a\in\mathbf{N}$"推不出"$a\in\mathbf{M}\cap N$"，由"$a\in\mathbf{M}\cap N$"可以推出"$a\in\mathbf{M}$ 或 $a\in\mathbf{N}$". 故选 B.

指导　本题考查集合的知识及充分必要条件的概念.

7.（2004. 湖南理）设集合 $U=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$A=\{(x,y)\mid 2x-y+m>0\}$，$B=\{(x,y)\mid x+y-n\leqslant 0\}$. 那么点 $P(2,3)\in A\cap\complement_U B$ 的充要条件是　　（　　）

A. $m>-1$，$n<5$　　B. $m<-1$，$n<5$

C. $m>-1$，$n>5$　　D. $m<-1$，$n>5$

解析　$A\cap\complement_U B=\{(x,y)\mid 2x-y+m>0\}\cap\{(x,y)\mid x+y-n>0\}$.

$$P(2,3)\in A\cap\complement_U B\Leftrightarrow\begin{cases}2\times2-3+m>0,\\2+3-n>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$\begin{cases}m>-1,\\n<5.\end{cases}$ 选 A.

指导　本题考查不等式组的解、集合的运算及命题的转化.

8.（05，江西文）在 $\triangle ABC$ 中，设命题 p：$\dfrac{a}{\sin B}=\dfrac{b}{\sin C}=\dfrac{c}{\sin A}$，命题 q：$\triangle ABC$ 是等边三角形，那么命题 p 是命题 q 的　　（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分又不必要条件

解析　$q\Rightarrow p$，由 $\triangle ABC$ 是等边三角形，则 $a=b=c$，$A=B=C$，显然成立. $p\Rightarrow q$：由三角形的性质可知：$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}$，又已知 $\dfrac{a}{\sin B}=\dfrac{b}{\sin C}=\dfrac{c}{\sin A}$，两式相除，得 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}=\dfrac{a}{c}$，令 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}=\dfrac{a}{c}=t$，则 $a=ct$，$b=at$，$c=bt$，所以，$abc=abct^3$，得 $t=1$，因此 $a=b=c$，即 $\triangle ABC$ 是等边三角形. 因此 p 是 q 的充分必要条件，选 C.

指导　判断三角形形状，主要根据正弦定理，余弦定理及三角形内角和为 π，化简有两个方向，(1) 角化边，(2) 边化角. 本题主要考查三角形形状的判断及充要条件.

9.（05，湖南卷理）集合 $A=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{x-1}{x+1}<0\right\}$，$B=\{x\mid |x-b|<a\}$，若"$a=1$"是"$A\cap B\neq\varnothing$"的充分条件，则 b 的取值范围是　　（　　）

A. $-2\leqslant b<0$　　B. $0<b\leqslant 2$

C. $-3<b<-1$　　D. $-1\leqslant b<2$

解析　由题意，得 A：$-1<x<1$，B：$b-a<x<a+b$.

由"$a=1$"是"$A\cap B\neq\varnothing$"的充分条件.

则 A：$-1<x<1$ 与 B：$b-1<x<1+b$ 交集不为空. 所以 $-2<b<2$.

检验知：$-1\leqslant b<2$ 能使 $A\cap B\neq\varnothing$. 故选 D.

指导　本题考查了分式不等式，绝对值不等式的解法及充分必要条件的相关内容.

10.（03，北京）"$\cos 2\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$"是"$\alpha=k\pi+\dfrac{5\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$"的　　（　　）

A. 必要非充分条件　　B. 充分非必要条件

C. 充分必要条件　　D. 既非充分又非必要条件

解析　当 $\alpha=k\pi+\frac{5\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$2\alpha=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$\cos2\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

当 $\cos2\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$2\alpha=2k\pi\pm\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，$\alpha=k\pi\pm\frac{5\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$

推不出 $\alpha=k\pi+\frac{5\pi}{12}$，$k\in\mathbf{Z}$，故选 A.

指导　本题考查特殊三角函数的值与求角的知识及充分必要条件的知识.

11.（04，重庆）已知 p 是 r 的充分不必要条件，s 是 r 的必要条件，q 是 s 的必要条件. 那么 p 是 q 成立的　（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

解析　由已知得 $P\Rightarrow r\Rightarrow s\Rightarrow q$，由 q 推不出 p，所以 p 是 q 成立的充分不必要条件，选 A.

指导　本题考查充分、必要条件的基本推导原则.

12.（04，重庆）一元二次方程 $ax^2+2x+1=0(a\neq0)$ 有一个正根和一个负根的充分不必要条件是　（　）

A. $a<0$　B. $a>0$　C. $a<-1$　D. $a>1$

解析　设 $ax^2+2x+1=0(a\neq0)$ 的两根为 x_1，x_2，则方程 $ax^2+2x+1=0(a\neq0)$ 有一个正根和一个负根等价于 $x_1x_2=\frac{1}{a}<0$，即 $a<0$，从而 A 为充要条件，B、D 均为既不充分也不必要条件，只有 C 是充分不必要条件，故选 C.

指导　本题考查命题的转化及充要条件，必须先将已知条件明确化，然后再根据充分条件与必要条件进行严格推导.

模拟试题启示

13.（05，苏州模拟）函数 $f(x)=x^2-2ax-3$ 在区间 $[1, 2]$ 上存在反函数的充分必要条件是　（　）

A. $a\in(-\infty, 1]$　　B. $a\in[2, +\infty)$

C. $a\in[1, 2]$　　D. $a\in(-\infty, 1]\cup[2, +\infty)$

解析　函数 $f(x)=x^2-2ax-3$ 在区间 $[1, 2]$ 上存在反函数的充分必要条件是在 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增，或单调递减，即对称轴不在区间之内，所以 $x\leqslant1$ 或 $x\geqslant2$. 选 D.

指导　本题考查反函数的概念、二次函数的单调性及命题的转化. 二次函数在区间上存在反函数的条件是二次函数在这个区间上具有单调性.

14.（04，福建达标质量检查）设 p、q 是两个命题，则“复合命题 p 或 q 为真，p 且 q 为假”的充要条件是　（　）

A. p、q 中至少有一个为真

B. p、q 中至少有一个为假

C. p、q 中有且只有一个为真

D. p 为真，q 为假

解析　复合命题 p 或 q 为真，说明 p 或 q 中至少有一个为真，p 且 q 为假，说明 p、q 不能同时为真，故 p、q 中有且只有一个为真. 选 C.

指导　本题考查复合命题的真假判断，利用真值表可得命题的转化. 也可以从四个选项中分析哪个符合条件.

15.（05，南海统测）已知命题 p：函数 $y=\log_a(ax+2a)$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的图象必过定点 $(-1, 1)$；命题 q：如果函数 $y=f(x-3)$ 的图象关于原点对称，那么函数 $y=f(x)$ 的图象关于 $(3, 0)$ 点对称. 则　（　）

A. “p 且 q”为真　　B. “p 或 q”为假

C. p 真 q 假　　D. p 假 q 真

解析　对于命题 q，函数 $y=f(x-3)$ 的图象关于原点对称，则有 $f(-x-3)=-f(x-3)$，$f(x)=-f(-x-6)=-f(2\times(-3)-x)$，从而函数 $y=f(x)$ 的图象关于 $(-3, 0)$ 点对称. 选 C.

指导　本题考查对数函数图象的基本性质，函数图象的对称性及复合命题真假的判断.

16.（05，苏州模拟）给出下列四个命题：

① $\frac{1}{x}<1$ 是 $|x|>1$ 的充分而不必要条件；

②设 p、q 为简单命题，则“p 且 q”为假是“p 或 q”为假的必要而不充分条件；

③在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A>\sin B$ 的充要条件是 $A>B$；

④数列 $\{a_n\}$ 成等比数列是数列 $\{\lg a_n\}$ 成等差数列的充要条件.

其中正确命题的序号是________.

解析　对于①：由 $\frac{1}{x}<1$ 得 $x>1$ 或 $x<0$，推不出 $|x|>1$，所以①不成立；对于②：由“p 或 q”为假可以推出“p 且 q”为假，但由“p 且 q”为假推不出“p 或 q”为假，所以②成立；③是成立的；④显然错误. 故填②③.

指导　对于这种填空题必须逐一细心推导，才能正确作答.

17.（05，杭州第一次质量检测）对于 $x\in[0, 1]$ 的一切值，$a+2b>0$ 是使 $ax+b>0$ 恒成立的　（　）

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

解析　对于 $x\in[0, 1]$ 的一切值，当 $ax+b>0$ 恒成立时，取 $x=\frac{1}{2}$，可得 $a+2b>0$. 但当 $a+2b>0$ 时，推不出对于 $x\in[0, 1]$ 的一切值都有 $ax+b>0$. 故选 C.

指导　本题考查命题的转化及充要条件.

18.（05，湖北省重点中学联考）若条件 P：$|x+1|\leqslant4$，条件 q：$x^2<5x-6$，则 $\neg P$ 是 $\neg q$ 的　（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

解析　条件 p 即：$-5\leqslant x\leqslant3$，$\neg p$ 即 $x<-5$ 或 $x>3$；条件 q：即 $x^2<5x-6$，即 $2<x<3$，$\neg q$ 即 $x\leqslant2$ 或 $x\geqslant3$；由 $\neg p\Rightarrow\neg q$，但由 $\neg q$ 推不出 $\neg p$，故 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分而不必要条件，选 A.

指导　本题考查绝对值不等式、一元二次不等式的解法及充要条件. 本题也可以判断它的等价命题逆否命题的充分性与必要性，即可以判断 q 是 p 的什么条件.

19.（05，南昌市第一次调研）若不等式 $|x-1|<a$ 成立的充分条件是 $0<x<4$，则实数 a 的取值范围是　（　）

A. $a\geqslant 1$　　B. $a\geqslant 3$　　C. $a\leqslant 1$　　D. $a\leqslant 3$

解析　不等式$|x-1|<a$即$1-a<x<1+a$，依题意，当$0<x<4$时，一定有$1-a<x<1+a$，∴ $\begin{cases}1-a\leqslant 0,\\1+a\geqslant 4\end{cases}\Rightarrow a\geqslant 3$时，由$|x-1|<a$推不出$0<x<4$. 故选B.

指导　本题考查绝对值不等式的解法及充要条件. 要注意条件充分性与必要性的区别.

20.（05，南京市第三次检测）函数$f(x)=\log_a x$（$a>0$，且$a\neq 1$）的反函数$y=f^{-1}(x)$是减函数的充分必要条件是　　（　）

A. $0<a<1$　　B. $a>1$

C. $\frac{1}{2}<a<1$　　D. $1<a<2$

解析　由原函数与反函数具有相同的增减性知，使反函数是减函数的充分必要条件，就是使原函数$f(x)=\log_a x$（$a>0$，且$a\neq 1$）为减函数的条件. 故$0<a<1$，选A.

指导　本题考查原函数与反函数的性质的内在联系：原函数与反函数中之一具有单调性时，另一个也具有单调性，并且具有相同的单调性：同增或同减.

21.（05，江西理科卷）"$a=b$"是"直线$y=x+2$与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=2$相切"的　　（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分又不必要条件

解析　直线$y=x+2$与圆$(x-a)^2+(y+b)^2=2$相切，则$\frac{|a-b+2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，得$a-b=0$或$a-b+4=0$，因此"$a=b$"是"直线$y=x+2$与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=2$"相切的充分不必要条件. 选A.

指导　本题主要考查直线和圆相切的条件以及充要条件，直线与圆相切的充要条件是圆心到直线的距离等于半径. 直线与圆相切可以有两种方式转化：(1)几何条件：圆心到直线的距离等于半径，(2)代数条件：直线与圆的方程组成方程组有唯一解，从而转化成判别式等于零来解，$A\Rightarrow B$，那么称A是B的充分条件，B是A的必要条件，但是实际问题中，我们往往是说B成立的的充分条件是A，千万不要搞错顺序.

高考综合名题

高考真题精粹

22.（03，全国卷理）已知$c>0$，设P：函数$y=c^x$在R上单调递减，Q：不等式$x+|x-2c|>1$的解集为R，如果P和Q有且仅有一个正确，求c的取值范围.

解析　函数$y=c^x$在R上单调递减$\Leftrightarrow 0<c<1$.

不等式$x+|x-2c|>1$的解集为$R\Leftrightarrow$函数$y=x+|x-2c|$在R上恒大于1.

∵ $x+|x-2c|=\begin{cases}2x-2c,\ x\geqslant 2c,\\2c,\ x<2c,\end{cases}$

∴ 函数$y=x+|x-2c|$在R上的最小值为$2c$. 不等式$x+|x-2c|>1$的解集为$R\Leftrightarrow c>\frac{1}{2}$.

如果P正确，且Q不正确，则$0<c\leqslant\frac{1}{2}$，如果P不正确，且Q正确，则$c\geqslant 1$，

所以c的取值范围为$\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$.

指导　本题考查指数函数的单调性，含参数绝对值不等式的解法以及简单的复合命题.

模拟试题启示

23.（05，杭州第一次质量检测）已知命题p：$x^2+mx+1=0$有两个不等的负根，命题q：$4x^2+4(m-2)x+1=0$无实根，若命题p与命题q有且只有一个为真，求实数m的取值范围.

解析　∵ $x^2+mx+1=0$有两个不等的负根，

∴ $\begin{cases}m^2-4>0\\-m<0\end{cases}$，得$m>2$.

∵ $4x^2+4(m-2)x+1=0$无实根，

∴ $16(m-2)^2-16<0$，得$1<m<3$.

有且只有一个为真，若p真q假，得$m\geqslant 3$

若p假q真，得$1<m\leqslant 2$.

综合上述，得$m\geqslant 3$，或$1<m\leqslant 2$.

指导　本题考查含参数的一元二次方程有无实根的判断、一元二次方程实根的分布以及简单复合命题的转化.

新型经典题

1.（05，浙江卷）设$f(n)=2n+1$（$n\in\mathbf{N}$），$\hat{P}=\{1,2,3,4,5\}$，$Q=\{3,4,5,6,7\}$，记$\hat{P}=\{n\in\mathbf{N}|f(n)\in\mathbf{P}\}$，$\hat{Q}=\{n\in\mathbf{N}|f(n)\in\mathbf{Q}\}$，则$(\hat{P}\cap\complement_{\mathbf{N}}\hat{Q})\cup(\hat{Q}\cap\complement_{\mathbf{N}}\hat{P})=$　　（　）

A. $\{0,3\}$　　B. $\{1,2\}$

C. $\{3,4,5\}$　　D. $\{1,2,6,7\}$

高考名优题

2. 已知下列三个方程$x^2+4ax-4a+3=0$，①　$x^2+(a-1)x+a^2=0$，②　$x^2+2ax-2a=0$，③　若至少有一个方程有实数根，求实数a的范围.

名卷压轴题

3. 有下列命题：

①$G=\sqrt{ab}$（$G\neq 0$）是a，G，b成等比数列的充分非必要条件；②若角α，β满足$\cos\alpha\cos\beta=1$，则$\sin(\alpha+\beta)=0$；③当$a\geqslant 1$时，不等式$|x-4|+|x-3|<a$的解集非空；④函数$y=\sin x+\sin|x|$的值域是$[-2,2]$.

其中错误命题的序号是________.（把你认为错误的命题的序号都填上）.

方法规律总结

集合是中学数学的重要内容之一，在很多数学分支中都有广泛的应用，是历年高考题中的必备题，而集合问题中蕴含的数学思想方法，更值得我们去开发和领悟：如运用数形结合思想解集合题，运用等价转化思想解集合题，运用分类讨论思想解集合题，运用补集思想解集合题.

方法 1：补集思想，在正面求解难度较大时，若其反面较为简单，可考虑从反面入手，便能获得简解，这是正难则反的解题策略.

例 1 已知集合 $A=\{x\mid x^2-4mx+2m+6=0\}$，若 $A\cap\{负实数\}\neq\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

解析 集合 A 表示方程 $x^2-4mx+2m+6=0$ 的实根组成的集合，$A\cap\{负实数\}\neq\varnothing$，说明方程至少有一个负实根，若分类讨论则比较麻烦，考虑其反面(没有负实根)则比较容易. 设全集 $U=\{m\mid(-4m)^2-4(2m+6)\geqslant0\}=\{m\mid m\leqslant-1 或 m\geqslant\frac{3}{2}\}$，设方程 $x^2-4mx+2m+6=0$ 有两个非负实根为 x_1，x_2，由韦达定理，得 $x_1+x_2=-(-4m)\geqslant0$，$x_1\cdot x_2=2m+6\geqslant0$ 且 $\triangle\geqslant0$，联立解得 $m\geqslant\frac{3}{2}$，则 $\{m\mid m\geqslant\frac{3}{2}\}$ 关于全集 U 的补集为 $\{m\mid m\leqslant-1\}$，此即为所求.

方法 2：分类讨论思想，分类指的是按照一定的标准，把问题分成几个部分或几种情况，采取的是“化整为零，各个击破”的策略，通过这个策略可将一个复杂问题分解成若干个简单问题，从而获得完整的解答.

例 2 设集合 $A=\{x\mid-1\leqslant x\leqslant a,\ a>-1\}$，$P=\{y\mid y=x+1,\ x\in A\}$，$Q=\{y\mid y=x^2,\ x\in A\}$，若 $Q\subseteq P$，求实数 a 的取值范围.

解析 $\because A=\{x\mid-1\leqslant x\leqslant a,\ a>-1\}$，$\therefore$ $P=\{y\mid y=x+1,\ x\in A\}=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant a+1\}$，

1)若 $-1\leqslant a\leqslant0$，则 $Q=\{y\mid a^2\leqslant y\leqslant1\}$，由 $Q\subseteq P$ 知 $a^2\geqslant0$ 且 $1\leqslant a+1$，则 $a=0$.

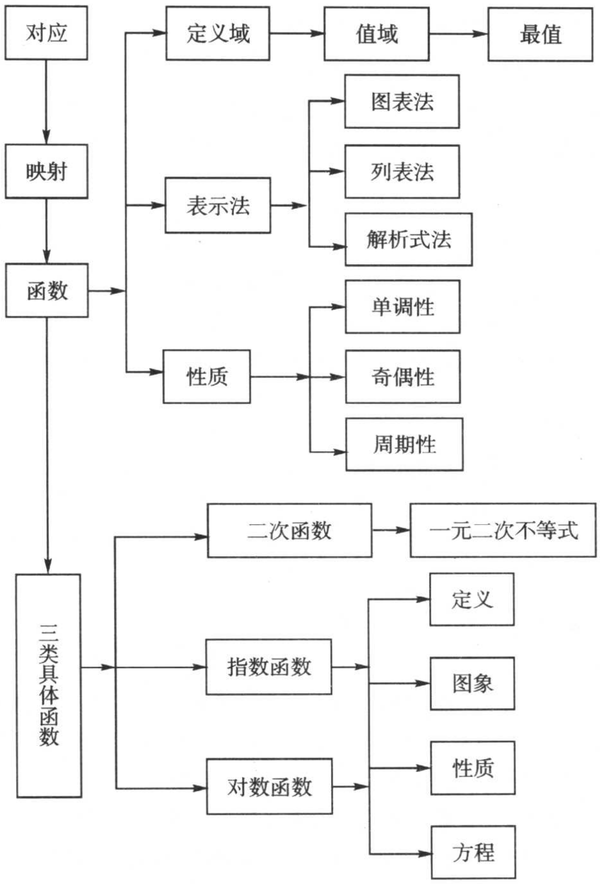
2)若 $0<a\leqslant1$，则 $Q=\{y\mid0\leqslant y\leqslant1\}$，由 $Q\subseteq P$ 知 $1\leqslant a+1$，则 $0<a\leqslant1$.

3)若 $a>1$，则 $Q=\{y\mid0\leqslant y\leqslant a^2\}$，由 $Q\subseteq P$ 知 $a^2\leqslant a+1$，得 $1<a\leqslant\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

综上所述，可知 a 的取值范围为 $\{a\mid0\leqslant a\leqslant\frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$.

第二单元 函数

知识网络



网络简析

1. 本单元考查的重点是加深对函数及其概念、性质的理解与应用，抓住含参数的分离、集中代换、化归、分类等解题方法与技巧，沟通相关学科知识的内在联系，掌握综合题解题通法与巧法，从而提高综合题的解题能力. 具体地说：第一，关于函数性质的考查，在高考中，使用具体函数的约占$\frac{1}{3}$，而使用抽象函数符号的约占$\frac{2}{3}$，面对这种形势，在复习函数性质时，应注意将具体函数的有关知识进行延伸，以适应试题的要求. 第二，函数中的最值问题在高考中多次出现，是高考中的重要题型之一，应能掌握几种求最值的常用方法，如配方法、判别式法、均值定理法等，而对于二元函数，应化为一元函数求最值. 第三，含参数的讨论问题是高考热点问题，应高度重视，复习时宜适当加强，进行多种类型的训练，但不宜过于繁杂. 第四，指数方程、对数方程问题一般难度不大，只要能掌握一些常规解法即可，不必过深要求. 第五，应重点放在培养逻辑思维及推理上，尽量减少繁杂的运算. 第六，应用题在高考中已形成规模，应注意提高分析问题及解决问题的能力.

2. 本单元下设四个考点：映射、函数及其性质，二次函数，指数函数与对数函数，抽象函数与函数的应用.

3. 本单元考查函数思想、等价转化思想、数形结合思想、分类讨论思想等重要数学思想，配方法、换元法、待定系数法是本单元需要重点掌握的解题方法.

4. 函数是高中数学的一条“主线”，每年的高考对函数问题的考查都占很大比重，且是常考常新. 特别是“导数”和“向量”进入高中数学新教材后，拓宽了高考对函数问题的命题空间. 分析近几年高考试题，总结出今后的高考中函数命题的新趋势有如下：

1）三次函数闪亮登场：新增导数内容后，2004 年、2005 年高考中出现了大量考查三次函数的切线方程、最值、极值、单调性、图象等内容的试题，导数为这类问题的解决提供了新的方法. 这类问题虽难度不大，但具有内容新、背景新、方法新等特点，预计在今后的高考中还会进一步加大考查的力度.

2）抽象函数久热不冷：解这类问题的关键是：合理赋值（赋具体值或代数式），化抽象为具体，由此探究函数的性质. 对抽象函数问题的考查在近几年高考中有逐年增加数量的趋势.

3）向量切入，新颖别致：由于向量具有几何表示和代数表示的特点，这就使其成为近几年高考表述函数问题的重要载体. 解这类问题的方法是：将向量间的几何关系数量化.

4）新情景题层出不穷：给出一种新函数、一种函数新性质、一个函数新定理等新情景题，也是近几年高考命题的一种新趋向. 主要考查学生阅读、理解、迁移新知识的能力，以及灵活运用函数知识求解恒成立不等式问题的能力. 常见的有以凹凸函数、不动点等为背景的新情景题.

在复习本单元内容时，要注意结合直观图形或函数图象来理解较抽象的概念和性质，搞清其内涵；要注意对函数知识逐渐加深理解，真正搞清知识间的内在联系；要注意将知识的学习和能力的培养紧密结合起来，努力在知识发生的过程中和运用知识解决问题的过程中提高能力.

考点 1 映射、函数及其性质

考点完全剖析

映射与函数是高中数学的重要内容，映射是揭示两个集合之间的内在联系的一个重要手段，函数刻画的是变量之间的相互关系.

重点是理解函数的有关概念、函数的定义、函数的三要素、函数的表示法特别是函数的解析式；掌握函数奇偶性的概念，并掌握函数奇偶性的必要条件，基本的判定方法和步

骤；掌握函数单调性的概念，并掌握基本的判定方法和步骤，同时要会运用；理解并掌握反函数的概念，明确反函数的意义，一些常见符号的含义，求反函数的方法和步骤，原函数与其反函数的定义域、值域及图象之间的关系等.

本考点的难点是映射与函数的概念；利用函数的单调性的定义来判断函数的单调性；反函数的求法；奇偶性、单调性等在解题中的综合运用；分段函数、简单复合函数、简单抽象函数有关的问题.

函数是中学数学的重点内容，函数概念贯穿中学数学的始终，利用函数知识、思想方法可以处理很多数学问题. 高考的热点之一就是考查函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、反函数以及互为反函数图象间的关系. 函数、方程、不等式是互相关联的概念，学会对具体问题进行抽象分析，进而建立相应的函数、方程、不等式关系，最终解决问题，这是高考命题的又一个热点. 因此加强函数与三角函数、不等式、数列等知识的联系，养成自觉运用函数观点处理问题的习惯，努力在知识发生的过程中运用知识解决问题的过程中提高自己的数学意识，发展自己的数学能力.

例 1 若函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+2a^2})$ 是奇函数，则 $a=$________.

解析 方法 1：由题意可知 $f(x)=-f(-x)$，即 $x+\sqrt{x^2+2a^2}=\dfrac{1}{-x+\sqrt{x^2+2a^2}}$，因此 $2a^2=1$，$a=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

方法 2：函数的定义域为 R，又 $f(x)$ 为奇函数，故其图象必过原点，即 $f(0)=0$，

所以 $\log_a(0+\sqrt{0+2a^2})=0$，得 $\sqrt{2a^2}=1$ 即 $|a|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

则 $a=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

指导 本题主要考查函数的奇偶性，由函数的奇偶性的定义可求得. 对数学概念及定理、公式的深刻理解是解数学问题的关健，讨论函数的奇偶性，其前提条件是函数的定义域必须关于原点对称.

若函数 $f(x)$ 为奇函数 $\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow y=f(x)$ 的图象关于原点对称.

若函数 $f(x)$ 为偶函数 $\Leftrightarrow f(-x)=f(x)\Leftrightarrow y=f(x)$ 的图象关于 y 轴对称.

例 2 （05，陕西咸阳）$f(x)$ 为偶函数，在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，若 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)>0>f(\sqrt{3})$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为 （　　）

A. 2 个　　B. 2 个或 1 个

C. 2 个或无数个　　D. 无数个

解析 因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，所以由条件 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)>0>f(\sqrt{3})$ 知 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有一个根，且只有一个根，又根据 $f(x)$ 为偶函数，知 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,0)$ 上也有一个根，且只有一个根，故方程 $f(x)=0$ 的根的个数为 2. 故选 A.

指导 本题综合考查函数的的单调性，奇偶性及函数与方程的思想.

高考基础题典

高考真题精粹

1. （05，全国）$y=\sqrt{2x-x^2}\,(1\leqslant x\leqslant 2)$ 反函数是 （　　）

A. $y=1+\sqrt{1-x^2}\,(-1\leqslant x\leqslant 1)$

B. $y=1+\sqrt{1-x^2}\,(0\leqslant x\leqslant 1)$

C. $y=1-\sqrt{1-x^2}\,(-1\leqslant x\leqslant 1)$

D. $y=1-\sqrt{1-x^2}\,(0\leqslant x\leqslant 1)$

解析 由 $y=\sqrt{2x-x^2}\,(1\leqslant x\leqslant 2)$，得 $x=1+\sqrt{1-y^2}\,(0\leqslant y\leqslant 1)$，

故 $y=\sqrt{2x-x^2}\,(1\leqslant x\leqslant 2)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)=1+\sqrt{1-x^2}\,(0\leqslant x\leqslant 1)$，选 D.

指导 本题考查函数的反函数的概念及反函数的求法.

2. （04，江苏）设函数 $f(x)=-\dfrac{x}{1+|x|}\,(x\in\mathbf{R})$，区间 $M=[a,b]\,(a<b)$，集合 $N=\{y\mid y=f(x),\ x\in\mathbf{M}\}$，则使 $M=N$ 成立的实数对 (a,b) 有 （　　）

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 无数多个

解析 $f(x)=-\dfrac{x}{1+|x|}=\begin{cases}-\dfrac{x}{1+x}(x\geqslant 0),\\ -\dfrac{x}{1-x}(x<0).\end{cases}$

作出 $f(x)$ 的图象知，$f(x)$ 为奇函数，且在 R 上单调递减，N 为 $f(x)$，$x\in\mathbf{N}$ 的值域，故要使 $M=N$，必有 $f(a)=b$，且 $f(b)=a$，解得 $a=b=0$，舍去. 选 A.

指导 这是一道函数与集合的综合题，从表达式可知 $f(x)$ 的奇偶性及单调性，进一步变为解方程组的问题.

3. （05，福建卷）把下面不完整的命题补充完整，并使之成为真命题：

若函数 $f(x)=3+\log_2 x$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于________对称，则函数 $g(x)=$________.

（注：填上你认为可以成为真命题的一件情形即可，不必考虑所有可能的情形）.

解析 若函数 $f(x)=3+\log_2 x$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于 $y=x$ 对称，即求函数 $f(x)=3+\log_2 x$ 的反函数，求得 $f^{-1}(x)=g(x)=2^{x-3}$.

指导 本题考查对数函数的图象、图象的对称变换及函数之间的关系. 本题是开放性题目，答案不唯一，按常见的对称有下列几种答案：如 ①x 轴，$-3-\log_2 x$；②y 轴，$3+\log_2(-x)$；③原点，$-3-\log_2(-x)$；④直线 $y=x$，2^{x-3}.

4. （04. 湖北理）已知 $f\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，则 $f(x)$ 的解析式可取为 （　　）

A. $\dfrac{x}{1+x^2}$　　B. $-\dfrac{2x}{1+x^2}$

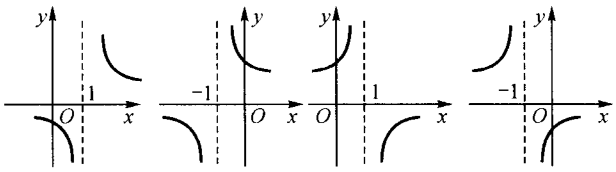
C. $\dfrac{2x}{1+x^2}$　　D. $-\dfrac{x}{1+x^2}$

解析 令 $t=\dfrac{1-x}{1+x}$，解得 $x=\dfrac{1-t}{1+t}$，代入，得 $f(t)=$

$\dfrac{1-\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)^2}{1+\left(\dfrac{1-t^2}{1+t}\right)}=\dfrac{2t}{1+t^2}$，所以 $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$，选 C.

指导　本题考查函数的概念、函数解析式的求法．利用换元法即可．

5．(05，山东)函数 $y=\dfrac{1-x}{x}(x\neq 0)$ 的反函数图象大致是



(A)　(B)　(C)　(D)

解析　由 $y=\dfrac{1-x}{x}(x\neq 0)$，解得反函数 $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x+1}$ $(x\neq -1)$，它的图象是将函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象向左平移 1 个单位后得到的．选 B.

指导　本题考查反函数的概念、函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图象及图象的平移变换．

6．(05，山东)下列函数既是奇函数，又在区间$[-1,1]$上单调递减的是　(　　)

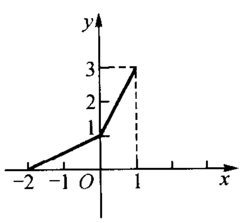
A. $f(x)=\sin x$　　B. $f(x)=-|x+1|$

C. $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$　　D. $f(x)=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$

解析　对于 A，$f(x)=\sin x$ 在区间$[-1,1]$上单调递增；对于 B，$f(x)=-|x+1|$不是奇函数；对于 C，$f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$不是奇函数；对于 D，$f(x)=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$，$f(-x)=\ln\dfrac{2+x}{2-x}=-f(x)$，所以它是奇函数，又在区间$[-1,1]$上，$f(x)=\ln\dfrac{2-x}{2+x}$是单调递减的．所以选 D.

指导　本题考查正弦函数、指数函数、对数函数的奇偶性和增减性．

7．(05，广东)在同一平面直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称．现将 $y=g(x)$ 图象沿 x 轴向左平移 2 个单位，再沿 y 轴向上平移 1 个单位，所得的图象是由两条线段组成的折线(如图所示)，则 $f(x)$ 函数的表达式为　(　　)



A. $f(x)=\begin{cases}2x+2,\ -1\leqslant x\leqslant 0\\ \dfrac{x}{2}+2,\ 0<x\leqslant 2\end{cases}$

B. $f(x)=\begin{cases}2x-2,\ -1\leqslant x\leqslant 0\\ \dfrac{x}{2}-2,\ 0<x\leqslant 2\end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases}2x-2,\ 1\leqslant x\leqslant 2\\ \dfrac{x}{2}+1,\ 2<x\leqslant 4\end{cases}$

D. $f(x)=\begin{cases}2x-6,\ 1\leqslant x\leqslant 2\\ \dfrac{x}{2}-3,\ 2<x\leqslant 4\end{cases}$

解析　将图象沿 y 轴向下平移 1 个单位，再沿 x 轴向右平移 2 个单位得右图，从而可以得到 $g(x)$ 的图象，故 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}-1,\ 0\leqslant x\leqslant 2\\ 2x-4,\ 2<x\leqslant 3\end{cases}$，

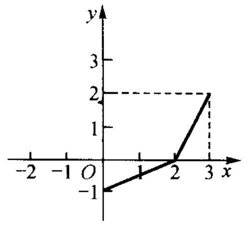


图 A

∵　函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，

∴　$f(x)=\begin{cases}2x+2,\ -1\leqslant x\leqslant 0\\ \dfrac{x}{2}+2,\ 0<x\leqslant 2\end{cases}$，故选 A.

(也可以用特殊点检验获得答案)

指导　本题考查图象的平移，分段函数的知识及互为反函数的图象的关系．

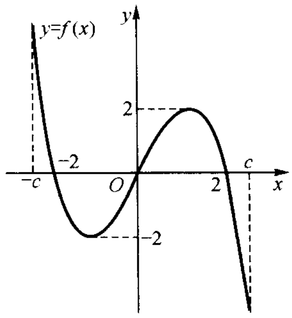
8．(05，福建卷文)$f(x)$是定义在 R 上的以 3 为周期的偶函数，且 $f(2)=0$，则方程 $f(x)=0$ 在区间$(0,6)$内解的个数的最小值是　(　　)

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

解析　由题意，至少可得 $f(0)=f(2)=f(-2)=f(3)=f(-3)=f(-5)=f(5)=f(1)=f(4)=0$，即在区间$(0,6)$内 $f(x)=0$ 的解的个数的最小值是 5，选 A.

指导　本题考查简单的抽象函数的周期性、奇偶性等知识的综合运用．

9．(03，上海)$f(x)$是定义在区间$[-c,c]$上的奇函数，其图象如图所示：令 $g(x)=af(x)+b$，则下列关于函数 $g(x)$ 的叙述正确的是　(　　)



A. 若 $a<0$，则函数 $g(x)$ 的图象关于原点对称．

B. 若 $a=1$，$0<b<2$，则方程 $g(x)=0$ 有大于 2 的实根．

C. 若 $a=-2$，$b=0$，则函数 $g(x)$ 的图象关于 y 轴对称

D. 若 $a\neq 0$，$b=2$，则方程 $g(x)=0$ 有三个实根．

解析　因为 $f(x)$是定义在区间$[-c,c]$上的奇函数，所以 $f(0)=0$，故 $g(0)=b$，即函数 $g(x)$ 的图象关于原点对称不一定成立；当 $a=1$，$0<b<2$ 时，$g(x)$ 的图象就是将 $f(x)$ 的图象向上平移 b 个单位，由图可知，方程 $g(x)=0$ 有大于 2 的实根，即 B 成立；当 $a=-2$，$b=0$，$g(x)=-2f(x)$，仍为奇函数，所以 C 不成立；对于 D，取 $a=1$，$b=2$，$g(x)$ 的图象就是将 $f(x)$ 的图象向上平移 2 个单位，此时 $g(x)=0$ 有两个实根，所以 D 不成立．综上，选 B.

指导　本题考查函数图象的综合变换，又有两个参数，可取一些特殊值先行得到初步答案，然后再对其它选项予以否定．

模拟试题启示

10．(05，江苏东海综合检测)定义域为 R 的函数 $y=f(x)$ 的值域为$[a,b]$，则函数 $y=f(x+a)$ 的值域为　(　　)

A. $[2a,a+b]$　　B. $[a,b]$

C. $[0,b-a]$　　D. $[-a,a+b]$