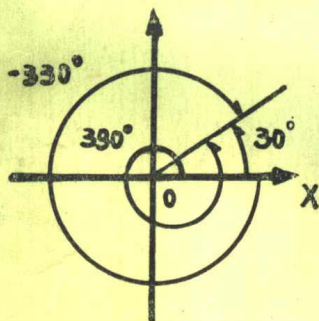
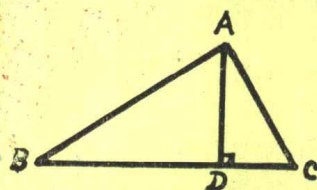
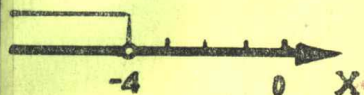


高中数学

基础训练与自测

上册

《高中数学基础训练与自测》编写组 编著



高中数学基础 训练与自测 上 册

《高中数学基础训练与自测》编写组 编写

海 洋 出 版 社

1991年·北京

(京)新登字087号

责任编辑 石亚平

责任校对 刘兴昌

高中数学基础训练与自测

上册

《高中数学基础训练与自测》编写组 编写

*

海洋出版社出版 (北京市复兴门外大街1号)

新华书店北京发行所发行 朝阳科普印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 14.6875 字数: 200千字

1991年12月第一版 1991年12月第一次印刷

印数: 1—7800

ISBN 7-5027-0058-7/G·1 定价: 7.20元

前 言

为了帮助高中学生深入理解和掌握中学数学基础知识，加强基本技能的训练，灵活运用所学知识，启发思维，开拓智力，使学生在更广泛的范围内独立思考，举一反三，提高分析问题和解决问题的能力。按照中学数学教学大纲的要求，编写了《初等数学基础训练与自测》一书，可供高中学生平时学习和毕业总复习使用，也可供知识青年学习使用。

本书分上册（代数、三角、平面几何）、下册（立体几何、解析几何、微积分初步），每册有三篇，每篇分为若干章，每章分为内容提要、典型例题分析、习题和自我检查题等部分。在习题和自我检查题的配备上注意了由易到难、突出重点，灵活运用基础知识和学科之间的沟通和联系，提高分析、综合运用知识的能力。

参加本书编写工作的有：北京市西城教研中心中学教研室李松文、欧阳东方、方珊、刘绍贞、冼伟强，教科室李振纯，北京一一〇中孟令尧等同志。由于水平有限，其中必有不少缺点和错误，欢迎批评、指正。

1985年2月

目 录

第一篇 代 数

第一章 集合与函数.....	(1)
内容提要.....	(1)
(一) 集合与映射.....	(1)
(二) 函数的性质及图象	(3)
范 例.....	(9)
习题一.....	(30)
自我检查题一.....	(37)
第二章 代数式.....	(40)
内容提要.....	(40)
(一) 整式	(40)
(二) 分式	(41)
(三) 根式	(42)
(四) 指数及其运算	(42)
(五) 对数及其运算	(43)
范 例.....	(44)
习题二.....	(52)
自我检查题二.....	(54)
第三章 方程和方程组.....	(56)
内容提要.....	(56)
(一) 方程(组)和方程(组)的解	(56)
(二) 一元方程.....	(57)

(三) 分式方程	(59)
(四) 无理方程	(59)
(五) 指数方程和对数方程	(59)
(六) 线性方程组	(60)
(七) 二元二次方程组	(61)
范 例	(61)
习题三	(72)
自我检查题三	(76)
第四章 复数	(78)
内容提要	(78)
(一) 复数的概念	(78)
(二) 复数的运算	(80)
范 例	(81)
习题四	(104)
自我检查题四	(107)
第五章 不等式	(108)
内容提要	(108)
(一) 不等式的意义及有关概念	(108)
(二) 不等式的性质	(109)
(三) 含有绝对值的不等式	(109)
(四) 不等式的解法	(110)
(五) 不等式的证明	(111)
范 例	(112)
习题五	(128)
自我检查题五	(133)
第六章 数列和数列的极限	(134)
内容提要	(134)

(一) 数列的基本概念	(134)
(二) 等差数列与等比数列	(135)
(三) 数列的极限	(138)
范例	(139)
习题六	(162)
自我检查题六	(166)
第七章 数学归纳法	(167)
内容提要	(167)
范例	(167)
习题七	(175)
自我检查题七	(175)
第八章 排列组合与二项式定理	(177)
内容提要	(177)
(一) 排列组合	(177)
(二) 二项式定理及二项展开式的性质	(179)
范例	(180)
习题八	(194)
自我检查题八	(196)

第二篇 三 角

第一章 三角函数的定义及其基本性质	(198)
内容提要	(198)
(一) 任意角的三角函数	(198)
(二) 三角函数	(198)
(三) 三角函数的基本性质	(202)
范例	(204)

习题一	(223)
自我检查题一	(227)
第二章 两角和与差的三角函数	(230)
内容提要	(230)
(一) 两角和与差的三角函数	(230)
(二) 三角函数的积化和差与和差化积	(231)
范例	(232)
(一) 求值问题	(232)
(二) 化简与证明	(245)
(三) 三角条件恒等式的证明	(257)
(四) 三角不等式的证明	(265)
习题二	(268)
自我检查题二	(273)
第三章 反三角函数和三角方程	(275)
内容提要	(275)
(一) 反三角函数	(275)
(二) 三角方程	(277)
范例	(279)
习题三	(303)
自我检查题三	(306)
第四章 解三角形	(309)
内容提要	(309)
(一) 解直角三角形	(309)
(二) 解斜三角形	(310)
(三) 解三角形的实际应用	(312)
范例	(312)
习题四	(336)

自我检查题四	(339)
--------------	-------

第三篇 平面几何

内容提要	(340)
(一) 定义、公理、定理	(340)
(二) 证题的一般方法	(349)
(三) 解题的一般步骤	(351)
范例	(352)
习题	(396)
自我检查题	(399)

三篇习题答案或提示

第一篇 代数	(401)
习题一	(401)
自我检查题一	(406)
习题二	(407)
自我检查题二	(409)
习题三	(411)
自我检查题三	(415)
习题四	(418)
自我检查题四	(424)
习题五	(427)
自我检查题五	(431)
习题六	(432)
自我检查题六	(436)

习题七	(437)
自我检查题七	(439)
习题八	(442)
自我检查题八	(444)
第二篇 三角	(445)
习题一	(445)
自我检查题一	(448)
习题二	(448)
自我检查题二	(450)
习题三	(451)
自我检查题三	(454)
习题四	(455)
自我检查题四	(456)
第三篇 平面几何	(457)
习题	(457)
自我检查题	(459)

第一篇 代 数

第一章 集合与函数

内 容 提 要

(一) 集合与映射

1. 集合的基本概念

(1) 集合：把具有某种属性的一些对象看作一个整体便形成一个集合。

集合里的各个对象叫做这个集合的元素。

含有有限个元素的集合叫做有限集，含有无限个元素的集合叫做无限集。

(2) 集合的特征

① 确定性：对任何一个对象都能确定是否是给定集合的元素；

② 互异性：在同一集合中，不能重复出现同一个元素；

③ 无序性：在表示一个集合时，不必考虑元素之间的顺序。

(3) 集合的表示法

① 列举法：把集合的元素一一列举出来，写在大括号内；

② 描述法：把描述集合中元素的公共属性，写在大括号内，

③ 自然数集、整数集、有理数集、实数集分别用字母 N 、 Z 、 Q 、 R 表示，有时用 Q^+ 表示正有理数集，用 R^- 表示负实数集等；

④ 元素 a 属于集合 A ，记作 $a \in A$ ；元素 a 不属于集合 A ，记作 $a \notin A$ 。

2. 集合之间的关系

(1) 子集

① 对于两个集合 A 与 B ，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素， A 叫做 B 的子集，记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$ ；

若 A 不是 B 的子集时，记作 $A \not\subseteq B$ 或 $B \not\supseteq A$ 。

② 如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A ， A 叫做 B 的真子集，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ ；

③ 不含任何元素的集合叫做空集，记作 ϕ ，空集是任何集合的子集，空集是任何非空集合的真子集。

(2) 相等：如果 $A \subseteq B$ ，同时 $B \subseteq A$ ，那么集合 A 和集合 B 就叫做相等，记作 $A = B$ 。

(3) 交集：由所有属于 A 且属于 B 的元素所组成的集合，叫做集合 A 和 B 的交集，记作 $A \cap B$ 。即 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 。

(4) 并集：由所有属于 A 或属于 B 的元素所组成的集合，叫做集合 A 和 B 的并集，记作 $A \cup B$ 。即 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 。

(5) 全集：在研究集合之间关系时，如果所有集合都是某个给定集合的子集，那么这个给定集合叫做全集，记作 I 。

(6) 补集: 已知全集 I , $A \subseteq I$, 由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合, 叫做集合 A 的补集或叫余集, 记作 $\overline{A}$.

即 $\overline{A} = \{x | x \in I, x \notin A\}$.

3. 映射

(1) 映射: 设 A 、 B 是两个集合, 如果按照某种对应法则 f , 对于集合 A 中的任何一个元素, 在集合 B 中都有唯一的元素和它对应, 这样的对应 (包括集合 A 、 B 及从 A 到 B 的对应法则 f) 叫做从集合 A 到集合 B 的映射, 记作 $f: A \rightarrow B$.

如果 $a \in A$, $b \in B$, f 使 a 映射到 b , 记作 $f: a \rightarrow b$ 或 $b = f(a)$, 其中 b 叫做 a 在映射法则 f 之下的象, a 叫做 b 在映射法则 f 之下的原象.

(2) 一一映射 设 A 、 B 是两个集合, $f: A \rightarrow B$ 是从集合 A 到集合 B 的映射. 如果在这个映射的作用下, 对于集合 A 中的不同元素, 在集合 B 中有不同的象, 而且 B 中每一个元素都有原象, 那么这个映射就叫做 A 到 B 上的一一映射.

(3) 逆映射: 设 $f: A \rightarrow B$ 是集合 A 到集合 B 上的一一映射, 如果对于 B 中的每一个元素 b , 使 b 在 A 中的原象 a 和它对应, 这样所得到的映射叫做映射 $f: A \rightarrow B$ 的逆映射, 记作 $f^{-1}: B \rightarrow A$.

(二) 函数的性质及图象

1. 函数的基本概念

(1) 函数的定义: 在某变化过程中有两个变量 x 和 y , 如果对于 x 的每一个确定的值, y 都有唯一确定的值和它对应, 那么 y 就叫做 x 的函数, 记作 $y = f(x)$.

从映射的概念可知, 映射 $f: A \rightarrow B$ 是由原象集合 A , 象所在集合 B , 以及从 A 到 B 的对应法则 f 三部分所组成, 当集合 A 、 B 都是非空集合, 且 B 的每一个元素都有原象, 这样的映射 $f: A \rightarrow B$ 就是 A 到 B 上的函数。 A 为定义域, B 为值域, f 为对应法则。

(2) 反函数的定义 如果确定函数 $y=f(x)$ 的映射 $f: A \rightarrow B$ 是 $f(x)$ 的定义域 A 到值域 B 上的一一映射, 那么这个映射的逆映射 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 所确定的函数 $x=f^{-1}(y)$ 叫做 $y=f(x)$ 的反函数, 习惯上表示成 $y=f^{-1}(x)$ 。

$y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称。

(3) 初等函数的分类:

① 代数函数 包括有理函数(整函数和分函数)与无理函数;

② 超越函数 包括幂函数(无理指数), 指数函数, 对数函数, 三角函数和反三角函数。

(4) 函数的性质:

① 单调性: 对于给定区间 M 上的函数 $y=f(x)$, 任意 $x_1 \in M$, $x_2 \in M$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么 $f(x)$ 在这个区间 M 上是增函数; 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么 $f(x)$ 在这个区间 M 上是减函数。

② 奇偶性: 对于函数 $y=f(x)$, x 和 $-x$ 是定义域内的任意一对相反数, 如果 $f(-x)=f(x)$, 那么 $f(x)$ 叫做偶函数; 如果 $f(-x)=-f(x)$, 那么 $f(x)$ 叫做奇函数。

偶函数的图象关于 y 轴对称; 奇函数的图象关于原点对称。反之, 分别也成立。

③ 有界性: (略)

④ 周期性: 周期函数(见三角函数)

⑤ 极值和最值：(略)

2. 几个重要函数

(1) 正比例函数 $y = kx$ ($k \neq 0$)，注意当 $k > 0$ ， $k < 0$ 时，函数图象的区别。

(2) 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)，注意当 $k > 0$ ， $k < 0$ 时，函数图象的区别。

(3) 一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$)，图象是过 $(0, b)$ 点的一条直线。当 $k > 0$ 时，为增函数；当 $k < 0$ 时，为减函数。

(4) 二次函数： $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)，用配方法

$$\text{可变为 } y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

图象为抛物线，顶点为 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$ ，对称轴方

程为 $x = -\frac{b}{2a}$ ；当 $a > 0$ 时，开口向上；当 $a < 0$ 时，开口向下。

对此函数除要研究它的单调性，最大(小)值外，还要注意以下问题：

① 奇偶性： $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 为偶函数的充要条件是 $b = 0$ 。

② 截距与弦长 当 $x = 0$ 时，在 y 轴上的截距为 c ；当 $b^2 - 4ac > 0$ 时，在 x 轴上截得的弦长为：

$$l = |x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}.$$

③ 函数值 y 的正负号的确定:

当 $b^2 - 4ac < 0$ 时, x 取任意实数, y 与 a 同号;

当 $b^2 - 4ac = 0$ 时, 除 $x = -\frac{b}{2a}$ 外, y 与 a 同号;

当 $b^2 - 4ac > 0$ 时, 若 $x < x_1$ 或 $x > x_2$, y 与 a 同号;
若 $x_1 < x < x_2$, y 与 a 异号.

其中 x_1, x_2 为图象与 x 轴交点的横坐标, 且有 $x_1 < x_2$.

(5) 幂函数: 形如 $y = x^n$ 的函数, 这里 x 是自变量, n 是常数(实数), 定义域是使 $y = x^n$ 有意义的实数集合.

在复习时要注意由于 n 的取值不同, 函数的性质区别.

① 当 $n > 0$ 时, 图象都过点 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$; 在第一象限内, 都是增函数; 但当 $n > 1$ 时, 为下凸增函数, 当 $0 < n < 1$ 时, 为上凸增函数.

② 当 $n < 0$ 时, 图象都过点 $(1, 1)$; 在第一象限内, 都是减函数, 且以 x 轴和 y 轴为渐近线.

(6) 指数函数和对数函数:

指数函数和对数函数互为反函数, 其图象关于直线 $y = x$ 对称, 其性质列表如下(见下页).

同时还要注意到, 在指数中有正整数指数幂 a^n ; 零指数幂 a^0 ; 负整数指数幂 a^{-n} ; 分数指数幂 $a^{\frac{m}{n}}$, $a^{-\frac{m}{n}}$ 的规定和 a 的取值范围的问题. 在对数中有基本恒等式 $a^{\log_a N} = N$; 换底公式 $\log_a N = \log_c N / \log_c a$; 常用对数的性质和首数、尾数的确定; 指数、对数的运算法则, 以及指数与对数的互化关系等, 这些基本概念不可忽视.

	指 数 函 数	对 数 函 数
定 义	函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 叫做以 a 为底 x 的指数函数	函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 叫做以 a 为底 x 的对数函数
定 义 域	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$
值 域	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
图 象	