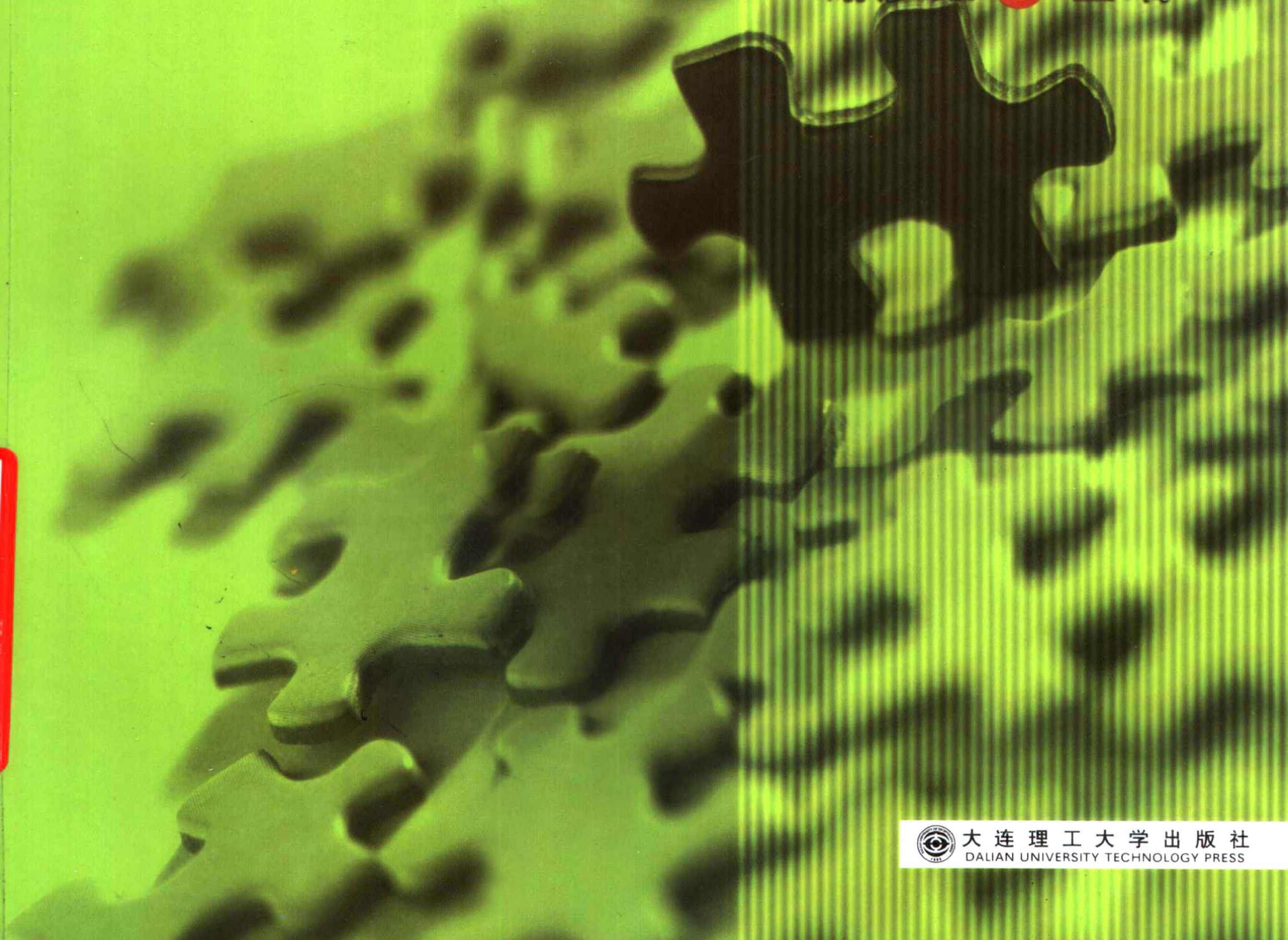
新起点

高等学校理工科规划教材

线性代数

LINEAR ALGEBRA WITH APPLICATIONS

谢彦红 主编



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY TECHNOLOGY PRESS

高等学校理工科规划教材

线性代数

LINEAR ALGEBRA WITH APPLICATIONS

主　编　谢彦红

副主编　王一女　滕　勇　徐厚生

编　者　（按姓氏笔划）

王一女　李明辉　徐厚生

谢彦红　裴晓雯　滕　勇

大连理工大学出版社

DALIAN UNIVERSITY TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 谢彦红主编 . --大连 : 大连理工大学出版社,2005.8
ISBN 7-5611-2976-9

Ⅰ. 线… Ⅱ. 谢… Ⅲ. 线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 053364 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河 邮政编码:116024
电话:0411-84708842 传真:0411-84701466 邮购:0411-84707961
E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn
大连业发印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm 印张:11 字数:254 千字
印数:1~3 000
2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑:刘新彦 于建辉 责任校对:欣 宇
封面设计:张 金

定 价:18.00 元

序言

随着精英教育向大众教育的转化，高等教育呈现出了多层面、多样性的特点。如何使培养的人才更加适应社会的需要，为高等教育，特别是基础教育提出了许多新的课题。

大众教育阶段的人才有不同于精英型人才的特点，我们必须因材施教，建立针对他们的培养方式、培养目标和评价标准，简而言之，即一个不同于精英型教育的教育模式。

新起点系列教材以"联系实际，加强计算，注重应用，提高素质"为特色，在概念的引入上，力求自然，通过实例来阐述其直观背景和现实意义；在基本理论上，力求直观，通俗易懂，着眼于培养学生的分析问题、解决问题的能力；在基本技能的培养上，注重基本运算能力和方法的训练。

新起点系列教材的作者都是从事教学多年的一线教师，他们从切身的体会中，把这套教材用由浅入深，通俗易懂的语言进行了重新组织，使读者在学习中真正领悟到高等教育的思想内涵与巨大价值！在此衷心感谢各位作者的辛勤劳动！

愿本系列教材成为同学们学习道路上的一个新的起点，从此踏上成功人生。

如果您有任何建议或意见，请与我们联系，联系方式：

电话：0411-84707962

邮箱：jcjf@dutp.cn

大连理工大学出版社
科技教育出版中心
2005年8月

前 言

线性代数是应用非常广泛的数学分支，其理论与方法遍及自然科学、社会科学、工程技术学及经济学等领域。同时，线性代数也是理工科大学生必修的一门重要基础课程。

在本书的编写过程中，编者主要考虑到以下几个方面：

1. 充分考虑到学生的知识基础。在内容叙述上，以基本概念与基本方法为核心，力求由浅入深，从具体到抽象，简明易懂，便于教与学；在习题配备上，既有必要的基础训练题，又有适当的综合提高题。

2. 利用代数余子式引入行列式的概念。避开了排列、轮换等知识，使学生更容易接受 n 阶行列式的定义，尽早熟悉代数余子式。

3. 突出了矩阵的初等变换方法。求逆矩阵、矩阵的秩、判别向量组的相关性及解线性方程组等，都是用矩阵的初等变换来解决的。

4. 为了增强学生应用数学知识与数学软件的能力，本书还介绍了数学软件 MATLAB 在线性代数方面的基本功能与编程实现方法，并给出了应用实例。

本书的编写得到沈阳化工学院、沈阳建筑大学、沈阳工业大学等院校的许多同行和朋友的大力支持，另外，书中引用了许多参考文献，在此一并表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，难免有错漏不妥之处。恳请随时批评指正。

编 者

2005 年 8 月

目录

第 1 章 行列式

- 二阶和三阶行列式
- n阶行列式
- 行列式的性质
- 行列式的计算实例
- 行列式的应用

行列式是一种特定的算式，它是我们今后学习线性代数的一个工具. 本章要介绍行列式的定义、性质及利用其性质计算行列式等内容. 最后介绍用 n 阶行列式求解线性方程组的克莱姆(Gramer) 法则.

1.1 二阶和三阶行列式

1.1.1 二阶和三阶行列式

从消元法解二元线性方程组入手，引人二阶行列式.

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases} \tag{1-1}$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 是未知数 $x_j(j=1,2)$ 的系数，$b_i(i=1,2)$ 是常数项.

用消元法消去 x_2，即 $a_{22}\times(1)-a_{12}\times(2)$，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$a_{11}\times(2)-a_{21}\times(1)$，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1-1) 有惟一解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases}. \tag{1-2}$$

从式(1-2) 可以看出，x_1,x_2 的分母都等于 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，它是由方程组(1-1) 的未知量系数所确定的，将式(1-1) 的系数按原来位置排成两行两列(横的称为行，竖的称为列) 的数表(如图 1-1).

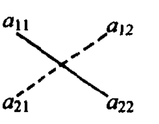


图 1-1

从图 1-1 可以看出，$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 就是数表中实线表示的对角线(称为**主对角线**) 上的两个数的乘积减去用虚线表示的对角线(称为**次对角线**) 上的两个数的乘积所得的差.

通常用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

为**二阶行列式**，其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为这个行列式的第 i 行第 j 列的元素.

行列式一般用字母 D 表示

由二阶行列式的定义，当式(1-1)的系数所组成的行列式(称为方程组(1-1)的**系数行列式**)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，方程组(1-1)有惟一解(1-2)，并可用行列式表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

【例 1-1】 计算$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$的值.

解 由二阶行列式的定义，得

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - (-3) \times 2 = 10.$$

【例 1-2】 解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}.$$

解 系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$，方程组有惟一解

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}{10} = \frac{20}{10} = 2, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{10} = -1.$$

定义 1.1

设有 $3 \times 3 = 9$ 个数 $a_{ij}(i = 1,2,3; j = 1,2,3)$ 排成三行三列的数表，记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$，称为**三阶行列式**.

由定义 1.1 可知，三阶行列式是 6 项的代数和，每一项都是不同行不同列的 3 个数的乘积，再冠以正负号，3 项正号，3 项负号，它可以用图 1-2 记忆. 图中每条实线所连接的 3 个数的乘积前面加正号，每条虚线所连接的 3 个数的乘积前面加负号. 这一计算行列式的方法叫作**对角线法**.

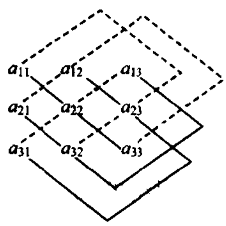


图1-2

【例 1-3】 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}4 & 5 & -3\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & -2\end{vmatrix}.$$

解　由对角线法，有

$$\begin{aligned}D&=4\times2\times(-2)+5\times(-1)\times3+(-3)\times1\times0-\\&\quad 4\times(-1)\times0-5\times1\times(-2)-(-3)\times2\times3\\&=-3\end{aligned}$$

类似地，我们可以利用三阶行列式来解三元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}. \tag{1-3}$$

记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}.$$

其中 D 称为方程组(1-3)的**系数行列式**，D_j 是以常数项 b_1,b_2,b_3 分别替换系数行列式中第 j 列的 a_{1j},a_{2j},a_{3j}（未知数 x_j 的系数）所得的行列式. 于是当系数行列式 $D\neq0$ 时，方程组有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

上述用行列式解线性方程组的方法称为**克莱姆法则**. 以后还将介绍 n 元线性方程组的克莱姆法则.

【例 1-4】　解方程组

$$\begin{cases}4x_1+5x_2-3x_3=-6\\ x_1+2x_2-x_3=-3\\ 3x_1-2x_3=0\end{cases}.$$

解　系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}4 & 5 & -3\\ 1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & -2\end{vmatrix}=-3\neq0,\qquad D_1=\begin{vmatrix}-6 & 5 & -3\\ -3 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -2\end{vmatrix}=-6,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}4 & -6 & -3\\ 1 & -3 & -1\\ 3 & 0 & -2\end{vmatrix}=3,\qquad D_3=\begin{vmatrix}4 & 5 & -6\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & 0 & 0\end{vmatrix}=-9,$$

得方程组的惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=3.$$

1.1.2 二阶和三阶行列式的关系

由二阶和三阶行列式的定义,可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

从上式可以看到,三阶行列式等于它的第一行的每个元素分别乘一个二阶行列式的代数和.为了进一步说明这些二阶行列式与原来三阶行列式的关系,下面引入余子式和代数余子式的概念.

在三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行元素和第 j 列元素,剩下的元素按原来位置顺序组成的二阶行列式叫作元素 a_{ij} 的**余子式**,记作 M_{ij},称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**,记作 A_{ij}.即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

例如,在三阶行列式 D 中,元素 a_{12} 的余子式 M_{12} 是指:在 D 中划去元素 a_{12} 所在的第一行和第二列所有元素,剩下的元素按它们在 D 中原来位置顺序组成的二阶行列式,即

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

而元素 a_{12} 的代数余子式为

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

利用代数余子式,三阶行列式可写成

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

这表明三阶行列式等于它的第一行的每一个元素与其对应的代数余子式的乘积的和.

对三阶行列式所含的6项作另一组组合,还可把三阶行列式写成

$$D = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

或

$$D = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}.$$

综合之,得

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}A_{ik} \quad (i = 1,2,3). \tag{1-4}$$

式(1-4)表明,三阶行列式等于它的任一行的三个元素与其对应的代数余子式乘积的和.

式(1-4)称为三阶行列式按第 i 行展开的**展开式**. 类似地，容易验证三阶行列式按列展开的展开式为

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} = \sum_{k=1}^{3} a_{kj}A_{kj} \quad (j = 1,2,3). \tag{1-5}$$

式(1-5)表明，三阶行列式也等于它的任一列的三个元素与其对应的代数余子式乘积的和.

如果规定一阶行列式 $D_1 = |a_{11}| = a_{11}$(注意与数 a_{11} 的绝对值的区别)，并记二阶行列式中 $a_{ij}(i,j = 1,2)$ 的代数余子式分别为

$$A_{11} = (-1)^{1+1}|a_{22}| = a_{22}, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}|a_{21}| = -a_{21},$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1}|a_{12}| = -a_{12}, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}|a_{11}| = a_{11}.$$

于是二阶行列式也有类似的按行展开的展开式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} = \sum_{k=1}^{2} a_{ik}A_{ik} \quad (i = 1,2),$$

以及按列展开的展开式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} = \sum_{k=1}^{2} a_{kj}A_{kj} \quad (j = 1,2).$$

【例 1-5】 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 由于第三行中有两个元素为零，故按第三行展开较简便

$$D = 7 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -21.$$

习题 1-1

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ e & \pi & \sqrt{2} \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$.

2. 解下列方程：

(1) $\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -5 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$； (2) $\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda-3 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0$.

3. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 12 \end{cases}$； (2) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5 \end{cases}$；

$$(3)\begin{cases} x_1+\dfrac{1}{2}x_2-x_3=-4 \\ 3x_1+\qquad\quad 2x_3=9 \\ 4x_1-x_2+\dfrac{1}{3}x_3=9 \end{cases}$$

1.2　n 阶行列式

类似二阶和三阶行列式的定义，用归纳法给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.2

设有 n^2 个数排成 n 行 n 列的数表，定义 n 阶行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{cases} a_{11}, & n=1 \\ a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}, & n>1 \end{cases},$$

其中 A_{1j} 是元素 a_{1j} 的代数余子式.

一般地，n 阶行列式中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列的元素，剩下的 $n-1$ 阶行列式即为元素 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

在余子式 M_{ij} 前面加符号 $(-1)^{i+j}$，即为元素 a_{ij} 的代数余子式，记作 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

同三阶行列式类似，有 n 阶行列式按行(列)展开定理.

定理 1.1

n 阶行列式等于它任一行(列)的 n 个元素与其对应的代数余子式乘积的和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

证明略.

【例 1-6】 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2 & 0 & -2 & 4\\ 3 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 5 & 1\end{vmatrix}.$$

解 由于第二列的零元素较多,所以按第二列展开较简便,即

$$D=1\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & -2 & 4\\ 3 & 1 & 1\\ 0 & 5 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2 & -2 & 4\\ 3 & 1 & 1\\ 0 & 5 & 1\end{vmatrix},$$

再按第一列展开,得

$$D=-2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & 1\end{vmatrix}-3\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 5 & 1\end{vmatrix}=8-66=-58.$$

【例 1-7】 证明:

(1) 主对角线行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & & & \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

(2) 上三角形行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

(3) 下三角形行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

(4) 次对角线行列式

$$\begin{vmatrix} & & & a_1\\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.$$

(以上未写出的元素均为零)

证明 只证(3)和(4).

(3) 按第一行展开,