高等学校教学用书

多变量线性控制系统

（状态空间方法）

涂莘生　董达生　杨　永　编著

煤炭工业出版社

高等学校教学用书

多变量线性控制系统

（状态空间方法）

涂奉生　董达生　杨　永　编著

煤炭工业出版社

内 容 提 要

《多变量线性控制系统》反映了有关线性系统理论和设计方法的主要内容及近期的研究成果。全书共九章，包括矩阵，线性空间与变换，系统状态方程及其描述，线性系统的结构形式，李雅普诺夫理论及其应用，极点配置与观测器设计，调节器的设计，线性模型跟随自适应控制，离散系统导论等。本书既重视数学推导，也注意通过工程实例来阐明基本原理；内容尽量做到取材精练、循序渐近；书中的例题、习题与正文相呼应，并有所引伸；每章的小结和评注阐明了本章的要点和进一步研究的内容，以及参考文献。

本书是高校工科工业电气自动化、无线电技术、信息处理、系统工程、企业管理等专业及理科应用数学、自动控制理论等专业“线性控制系统”课程的教材。适用于一学期70～80学时的教学，也可用于两学期100～120学时的课程；作为研究生课程可用60学时，讲授的重点为后五章。本书亦可供从事有关专业的科研和工程技术人员参考。

责任编辑：胡 玉 雁

高等学校教学用书

多变量线性控制系统

（状态空间方法）

涂奉生 董达生 杨 永 编著

*

煤炭工业出版社 出版

（北京安定门外和平里北街21号）

煤炭工业出版社印刷厂 印刷

新华书店北京发行所 发行

*

开本787×1092mm 1/16 印张30 3/4

字数738千字 印数1—2,400

1988年4月第1版 1988年4月第1次印刷

ISBN 7-5020-0063-1/TD·61

书号 2975 定价 5.05元

前　言

在现代科学技术的飞速发展中，伴随着学科的高度分化和高度综合，各门学科之间出现了相互交叉、相互渗透，出现了横向科学。作为跨接于自然科学和社会科学的具有横向科学特点的“现代控制论”正在我国理工科大学作为大学必修课和高年级选修课以及研究生的学位课程出现，其中线性系统理论就是一门正在发展和形成的新课程。这门课程面向多变量控制系统的问题，是以矩阵论和线性空间理论作为主要数学工具。这个教材就是在南开大学和煤炭高等院校的教学实践中形成并逐步完善的，也是我们“长期合作”的产物。

编写这本教材的目的，一方面要突出其实用性、工程性，为自动控制技术提供有效的控制系统的设计方法及其理论基础；另一方面，要注意理论上的严谨性，阐明系统论的有关概念、理论和方法，以便使学生能逐步掌握一种新的方法论——系统论的方法，去处理自然与社会有关领域的问题。

在编著这本教材时，初步考虑了以下几方面的问题：

1．突出工程特点，注意联系实际，把本学科知识的基本结构教给学生。

线性系统理论是一门工程理论性强的课程，学生大都感到概念抽象，不易掌握，用其基本原理去解决生产实际问题则更觉困难。这是一个比较突出的矛盾。因此，在编写这本教材时，就以机电调速系统和流体力学中的双水槽液位控制作为典型示例，贯穿于全书内容之中，从抽象数学模型入手，直至设计方法。比如，求出机电调速系统的模型之后，即研究其能控能观的特性，接着就研讨状态反馈和如何“获取反馈”的问题，讲解观测器的设计。如遇外界干扰，即阐述一种有强抗干扰能力的Robust调节器。当装置的参数存在着未知或不确定因素、或者在运行过程中有很大改变时，就论述了“线性模型跟随自适应控制”的设计问题。通过工程实例，使学生对全书获得一个清晰而系统的概念和分析综合的方法。

2．要求理论严谨，循序渐近，培养学生的抽象思维能力。

线性系统理论是建立在线性空间基础之上的，大量使用了矩阵论中的内容，有些论点比较新颖。这本教材一开始就重点阐明线性空间和线性变换的理论。线性空间理论，譬如像空间、核空间、子空间等，在本书中起着重要的作用，宜深入讲解。线性变换的核心思想在于：线性系统的基本性质（如能控性、能观性、极点、传递函数等）在线性变换下都不改变，从而可将系统化为特定形式，使问题的研究变得简单而透彻。线性空间理论既是一种语言工具，也是一种研究方法，可从形式逻辑思维和辩证逻辑思维对学生进行培养。前者偏重于数学作为科学的语言方面，后者偏重于数学作为科学的研究方法方面，二者密切配合。这本教材由于立论严谨，在数学方面有一定的深广度，曾作为南开大学计算机与系统科学系控制理论专业的必修教材。

3．精心编排习题，引出文献索引，逐章写出“小结和评注”，是这本教材的另一特点。

作为教材，需要从多方面来培养学生的独立自学和深入钻研的能力，因此，必须仔细

考虑例题和习题的编排。在例题与习题中，编入四种类型的题目，即巩固概念的思考题、提高解决具体问题能力的计算题、训练学生分析能力的综合应用题、难点较高的理论题。通过解题，使学生学有所用，用有所疑，疑有所学，使他们能逐步融汇贯通。

在每一章“小结和评注”中，论述这个课题研究的历史过程，讲明其来龙去脉，并列出主要参考文献，还提出了尚待解决的问题和可能出现的动向，使他们在学习上锲而不舍，持之以恒。

本书是高校工科工业电气自动化等专业和理科自动控制理论专业“线性控制系统”课程的教材。它适用于一学期70～80学时的教学，讲授内容为前五章；也可用于两学期100～120学时的课程。如作为研究生的学位课程，可用60学时，讲授重点放在后面五章。对于离散系统可分别插入前面诸章与连续系统并列进行，也可单独讲授或者自学，由教师酌定。

本书的第一、二、三章由董达生教授编写，第四章由杨永教授编写，第五章至第九章由涂莘生教授编写，最后由涂莘生教授定稿。在编写过程中，煤炭部教材编辑室给予了大力支持，天津大学韩建勋教授审阅了全书，并提出宝贵的修改意见，特此致谢。由于我们水平所限，书中的不妥和错误之处在所难免，请读者指正，不胜感谢。

编 著 者

一九八六年二月

目　　录

第一章　矩阵、线性空间及线性变换

第一节　矩　　阵

一、特征阵与特征多项式

设A为$n\times n$方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1-1}$$

式中，$a_{ij}\in R$，R为实数域或复数域，i，$j=1$，2，…，n。

对于方阵A、B，若存在满秩方阵T（$|T|\neq 0$），使得$B=TAT^{-1}$，则称A、B相似。

矩阵$sI-A$称为A的特征阵，其中I为$n\times n$单位阵，而行列式

$$f_c(s)=|sI-A|=\begin{vmatrix} s-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & s-a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-2}$$

称为A的特征多项式，其根称为A的特征根。$f_c(s)$是首项系数为1的n次多项式，可记为

$$f_c(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0 \tag{1-3}$$

式中，系数a_{n-1}、a_{n-2}、…a_1、a_0由方阵A的元素来确定。

记$\sigma(A)$为A的特征根集合，包括重根在内，例如

$$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

其特征多项式为

$$f_c(s)=\begin{vmatrix} s+1 & 1 & -1 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & -1 & s-2 \end{vmatrix}=(s+1)^2(s-2)$$

其特征根为-1、-1、2，故$\sigma(A)=\{-1,\ -1,\ 2\}$。

关于特征根，容易验证有下面性质：

（1）$\sigma(A)=\sigma(A')$；

（2）$\sigma(-A)=-\sigma(A)$，$-\sigma(A)$表示由$\sigma(A)$中元素的反号元素所组成的集合；

（3）$\sigma(A^{-1})=\sigma^{-1}(A)$，$\sigma^{-1}(A)$表示由$\sigma(A)$中的元素的逆元所组成的集合；

（4）$\sigma(aI+A)=a+\sigma(A)$，特别$\sigma(\pm I+A)=\pm 1+\sigma(A)$；

（5）设T是满秩方阵，则$\sigma(TAT^{-1})=\sigma(A)$，即相似阵的特征根相同，亦即相似阵的特征多项式相同；

（6）A为满秩方阵的充分必要条件为$\sigma(A)$中不包含零，即A没有零特征根。

根据逆矩阵特性，有

$$(sI-A)^{-1}=\frac{\mathrm{adj}(sI-A)}{f_c(s)} \tag{1-4}$$

其中$\mathrm{adj}(sI-A)$为$sI-A$的伴随阵，它们的元素次数$\leqslant n-1$，故$\mathrm{adj}(sI-A)$可记为

$$\mathrm{adj}(sI-A)=B_1s^{n-1}+B_2s^{n-2}+\cdots+B_{n-1}s+B_n \tag{1-5}$$

式中，B_i为$n\times n$的数阵($i=1, 2, \cdots, n$)，$f_c(s)$由式（1-3）所确定。我们有下面结果：

命题1-1　式（1-3）中的a_0、a_1、…、a_{n-1}与式（1-5）中的B_1、B_2、…、B_n满足下面关系式：

$$\left.\begin{array}{ll}
B_1=I & a_{n-1}=-\mathrm{tr}\,(AB_1)\\
B_2=AB_1+a_{n-1}I & a_{n-2}=-\mathrm{tr}(AB_2)/2\\
B_3=AB_2+a_{n-2}I & a_{n-3}=-\mathrm{tr}(AB_3)/3\\
\vdots & \vdots\\
B_i=AB_{i-1}+a_{n-i+1}I & a_{n-i}=-\mathrm{tr}(AB_i)/i\\
\vdots & \vdots\\
B_n=AB_{n-1}+a_1I & a_0=-\mathrm{tr}(AB_n)/n\\
\multicolumn{2}{c}{AB_n+a_0I=0}
\end{array}\right\} \tag{1-6}$$

式中，$\mathrm{tr}(\cdot)$为矩阵的迹，即矩阵（$\cdot$）的对角线上元素之和。

证明

由于

$$(sI-A)\mathrm{adj}(sI-A)=f_c(s)I$$

则

$$(sI-A)(B_1s^{n-1}+B_2s^{n-2}+\cdots+B_{n-1}s+B_n)=f_c(s)I$$

即

$$B_1s^n+(B_2-AB_1)s^{n-1}+(B_3-AB_2)s^{n-2}+\cdots+(B_n-AB_{n-1})s-AB_n$$
$$=Is^n+a_{n-1}s^{n-1}I+a_{n-2}s^{n-2}I+\cdots+a_1sI+a_0I$$

比较上式两端的系数阵即得式（1-6）左端，其右端证明参见〔13，P261〕。▮

例1-1　已给

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

计算$f_c(s)$和$(sI-A)^{-1}$

解

由式（1-6）得

$B_1=I$

$a_2=-\mathrm{tr}(AB_1)=-\mathrm{tr}(A)=0$

$B_2=AB_1+a_2I$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$a_1=-\mathrm{tr}(AB_2)/2$

$$=-\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}\right)/2=-3$$

$$B_3 = AB_2 + a_1 I$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_0 = -\operatorname{tr}(AB_3)/3$$

$$= -\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right)/3 = -2$$

所以

$$\operatorname{adj}(sI - A) = B_1 s^2 + B_2 s + B_3$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} s^2 + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} s^2 - s - 2 & -s + 3 & s + 1 \\ 0 & s^2 - s - 2 & 0 \\ 0 & s + 1 & s^2 + 2s + 1 \end{pmatrix}$$

$$f_c(s) = s^3 - 3s - 2$$

定理1-1（凯莱-哈密顿定理）设A的特征多项式为

$$f_c(s) = |sI - A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

则A是$f_c(s)$的根，即

$$f_c(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0 \tag{1-7}$$

证明

对式（1-6）左边各式两端分别左乘A^n、A^{n-1}、$\cdots A$，则得

$$A^n B_1 = A^n$$

$$A^{n-1}B_2 = A^n B_1 + a_{n-1}A^{n-1}$$

$$A^{n-2}B_3 = A^{n-1}B_2 + a_{n-2}A^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$A^2 B_{n-1} = A^3 B_{n-2} + a_2 A^2$$

$$AB_n = A^2 B_{n-1} + a_1 A$$

将诸式相加得

$$AB_n = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A \tag{1-8}$$

由于$AB_n + a_0 I = 0$，即$AB_n = -a_0 I$，将其代入式（1-8）并移项，则得式（1-7）。|

推理1-1　A^k可以由A^{n-1}，A^{n-2}，$\cdots A$，I线性表示。

证明：

当$k \leqslant n-1$时，推理是显然的；当$k = n$时，由式（1-7）得

$$A^n = -(a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_1 A + a_0 I)$$

即$k = n$时，推理成立。反复利用定理1-1，通过数学归纳法 即可推出$k = n+1, n+2\cdots$时，推理成立。|

二、最小多项式

对于方阵A，若非零多项式$f(s)$，使得$f(A) = 0$，则称$f(s)$是A的化零多项式。显然A的

特征多项式是A的化零多项式。若$f_m(s)$是首项系数为1，且是A的次数最低的化零多项式，则称$f_m(s)$为A的最小多项式。

关于最小多项式有下面结果：

命题1-2

（1）A的最小多项式是唯一确定的；

（2）A的最小多项式是A的化零多项式的因式，特别是A的特征多项式$f_c(s)$的因式；

（3）若A的特征多项式$f_c(s)$为下面形式：

$$f_c(s)=(s-\lambda_1)^{d_1}(s-\lambda_2)^{d_2}\cdots(s-\lambda_k)^{d_k}\qquad d_i\geqslant 1,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$$

则A的最小多项式必取下面形式：

$$f_m(s)=(s-\lambda_1)^{m_1}(s-\lambda_2)^{m_2}\cdots(s-\lambda_k)^{m_k}$$
$$1\leqslant m_i\leqslant d_i\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$$

证明

（1）设$f_{m1}(s)$，$f_{m2}(s)$是A的两个不相同的最小多项式，由于$f_{m1}(A)=0$，$f_{m2}(A)=0$，且它们次数相同，设为n_1。又由于$f_{m1}(s)$、$f_{m2}(s)$的最高次项为1，故$f_{m1}(s)-f_{m2}(s)$的次数$<n_1$，且$f_{m1}(A)-f_{m2}(A)=0$，因而$f_{m1}(s)-f_{m2}(s)\neq 0$为次数$<n_1$的$A$的化零多项式，与$f_{m1}(s)$，$f_{m2}(s)$为最小多项式矛盾。故最小多项式是唯一的。

（2）设$f(s)$是A的任一化零多项式，$f_m(s)$是A的最小多项式，则存在多项式$r(s)$、$q(s)$，$q(s)$的次数小于$f_m(s)$的次数，使得

$$f(s)=f_m(s)r(s)+q(s)$$

那么

$$0=f(A)=f_m(A)r(A)+q(A)=q(A)$$

这样$q(s)\equiv 0$，否则与$f_m(s)$为最小多项式矛盾。故$f_m(s)$是$f(s)$的因式。命题中(3)可由后面将介绍的定理1-4以及定理1-5推出。❙

命题1-3

（1）A与A^T的最小多项式相同；

（2）若A与B相似，则A与B的最小多项式相同。

证明

由于$f(A)=0$等价于$f(A^T)=0$，$f(A)=0$等价于$f(TAT^{-1})=0$，即A与A^T的化零多项式相同，A与其相似阵的化零多项式相同，由此即推出本命题。❙

命题1-4

设n_1是A的最小多项式的次数，则

（1）对任意正整数k，A^k可以表示为A^{n_1-1}，A^{n_1-2}，$\cdots$，A，I的线性组合；

（2）A^{n_1-1}，A^{n_1-2}，$\cdots$，A，I是线性无关的。

证明

（1）与推理1-1的证明相同；

（2）采用反证法，设A^{n_1-1}，A^{n_1-2}，$\cdots$，A，I线性相关，则存在不全为零的数α_{n_1-1}，α_{n_1-2}，$\cdots\alpha_1$，α_0，使

$$\alpha_{n_1-1}A^{n_1-1}+\alpha_{n_1-2}A^{n_1-2}+\cdots+\alpha_1A+\alpha_0I=0$$

令

$$\widetilde{f}(s)=\alpha_{n_1-1}s^{n_1-1}+\alpha_{n_1-2}s^{n_1-2}+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0$$

显然$\widetilde{f}(s)$是A的化零多项式，它是次数小于n_1的非零多项式，这样与n_1是最小多项式的次数矛盾。故A^{n_1-1}，A^{n_1-2}，…，A，I线性无关。∎

三、多项式矩阵

设$M(s)$是如下形式的$n\times n$方阵

$$M(s)=\begin{pmatrix} m_{11}(s) & m_{12}(s) & \cdots & m_{1n}(s) \\ m_{21}(s) & m_{22}(s) & \cdots & m_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{n1}(s) & m_{n2}(s) & \cdots & m_{nn}(s) \end{pmatrix} \tag{1-9}$$

式中，$m_{ij}(s)$是s的多项式（i，$j=1$，2，…，n）。则称$M(s)$为s的多项式阵，显然特征阵$sI-A$是一多项式阵。下面将通过对特征阵$sI-A$的研究，得到有关矩阵A的性质。

对于多项式矩阵$M(s)$，我们经常施行下面3种变换：

（1）将某一行（列）乘以非零的常数a；

（2）将其中两行（列）互换位置；

（3）将某行（列）乘以多项式$n(s)$加到另一行（列）上去。

上面3种变换，称为多项式矩阵的初等变换。

设$M(s)$，$N(s)$为两个多项式矩阵，若其中一个矩阵经过若干初等变换，变换成另一矩阵，则称$M(s)$，$N(s)$是等价的，记为$M(s)\backsim N(s)$。

若方阵$M(s)$的行列式$|M(s)|\neq 0$，则称$M(s)$是满秩的。对于满秩阵有下面结果。

定理1-2 对任一$n\times n$的满秩阵$M(s)$必等价于如下形式的一对角阵

$$S(s)=\begin{pmatrix} d_1(s) & & & \\ & d_2(s) & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & & & d_n(s) \end{pmatrix} \tag{1-10}$$

式中，$d_1(s)$，$d_2(s)$，…，$d_n(s)$都是首项系数为1的多项式，且$d_i(s)$整除$d_{i+1}(s)$，记为$d_i(s)|d_{i+1}(s)(i=1，2，\cdots，n-1)$。

$S(s)$称为$M(s)$的Smith标准形。$d_1(s)$，$d_2(s)$，…，$d_n(s)$称为$M(s)$的不变因式。设$d_1(s)=d_2(s)=\cdots=d_r(s)=1$，而$d_{r+1}(s)$，…$d_n(s)$为次数大于零的多项式。那么在复数域上有

$$d_i(s)=(s-s_1)^{n_1}(s-s_2)^{n_2}\cdots(s-s_k)^{n_k} \tag{1-11}$$

$$n_1\geqslant 1 \quad \cdots \quad n_k\geqslant 1;\ r+1\leqslant i\leqslant n$$

则$(s-s_1)^{n_1}$，$(s-s_2)^{n_2}$，…，$(s-s_k)^{n_k}$称为不变因式$d_i(s)$的初级因子。$M(s)$的所有不为1的不变因式的初级因子称为$M(s)$的初级因子。

推理1-2 满秩阵$M(s)$，$N(s)$等价的充分必要条件是它们具有相同的Smith标准形，或者说具有相同的不变因式。

定理1-3 方阵A、B相似的充分必要条件为其特征阵$sI-A$、$sI-B$是等价的。亦即

$sI-A$、$sI-B$具有相同的Smith形。

定理1-3的证明依赖于矩阵的若唐标准形，参见[7]。

定理1-3也可以说成是，A与B相似的充分必要条件为它们的特征阵$sI-A$、$sI-B$具有相同的不变因式。今后特征阵$sI-A$的不变因式、初级因子也可以说成是A的不变因式、初级因子。容易看出，A的特征多项式等于其不变因式的乘积，即

$$f_c(s)=|sI-A|=d_1(s)d_2(s)d_3(s)\cdots d_n(s) \tag{1-12}$$

式中，$d_1(s)$，$d_2(s)$，…，$d_n(s)$为$sI-A$的不变因式。

例1-2　求例1-1中的矩阵A的不变因式和初级因子。

解

A的特征阵为

$$sI-A=\begin{pmatrix} s+1 & 1 & -1 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & -1 & s-2 \end{pmatrix}\xrightarrow[\text{对调}]{\text{第1、2列}}\begin{pmatrix} 1 & s+1 & -1 \\ s+1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & s-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第3列加第1列}]{\text{第2列减第1列乘}(s+1)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s+1 & -(s+1)^2 & s+1 \\ -1 & s+1 & s-3 \end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第3行加第1行}]{\text{第2行减去第1行的}(s+1)\text{倍}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(s+1)^2 & s+1 \\ 0 & (s+1) & (s-3) \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{第2、3列对调}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & -(s+1)^2 \\ 0 & (s-3) & (s+1) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{再除4}]{\text{第2行减去第3行}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4}(s+1)(s+2) \\ 0 & s-3 & s+1 \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列的初等变换}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & s-3 & (s+1)^2(s-2) \end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行的初等变换}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (s+1)^2(s-2) \end{pmatrix}$$

所以A的不变因式为1，1，$(s+1)^2(s-2)$，初级因子为$(s+1)^2$，$(s-2)$。

四、若唐标准形

如下矩阵

$$J_\lambda=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}_{n_\lambda\times n_\lambda}$$

称为若唐块，它的特征根显然为λ，因此它又称为λ的若唐块，或λ的n_λ阶的若唐块。它的特征阵为

$$sI-J_\lambda=\begin{pmatrix} s-\lambda & 1 & & \\ & s-\lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & s-\lambda \end{pmatrix}$$

经过初等变换，容易看出它的Smith标准形为

$$S_\lambda(s)=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ & & & (s-\lambda)^{n_\lambda}\end{pmatrix}$$

对于J_λ容易看出有下面结果：

（1）J_λ除1以外的不变因式为$(s-\lambda)^{n_\lambda}$；

（2）J_λ的特征多项式为$(s-\lambda)^{n_\lambda}$；

（3）J_λ的最小多项式为$(s-\lambda)^{n_\lambda}$。

考虑如下矩阵：

$$J=\begin{bmatrix}J_{\lambda_1} & 0\\ 0 & J_{\lambda_2}\end{bmatrix}$$

$$J_{\lambda_1}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda\end{pmatrix}_{n_1\times n_1}$$

$$J_{\lambda_2}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda\end{pmatrix}_{n_2\times n_2}\qquad n_2\geqslant n_1$$

利用初等变换，容易得到J的特征阵$sI-J$的Smith标准形为

$$S(s)=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 1 & & \\ 0 & & & (s-\lambda)^{n_1} & \\ & & & & (s-\lambda)^{n_2}\end{pmatrix}_{(n_1+n_2)\times(n_1+n_2)}$$

对此容易看出有下面结果：

（1）J的除1以外的不变因式为 $(s-\lambda)^{n_1}$，$(s-\lambda)^{n_2}$；

（2）J的初等因子为$(s-\lambda)^{n_1}$，$(s-\lambda)^{n_2}$；

（3）J的特征多项式为$(s-\lambda)^{n_1+n_2}$；

（4）J的最小多项式为$(s-\lambda)^{n_2}$。

对于下面矩阵

$$J=\begin{bmatrix}J_1 & 0\\ 0 & J_2\end{bmatrix}$$

式中

$$J_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & & 0\\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda_1\end{pmatrix}_{n_1\times n_1}$$

$$J_2=\begin{pmatrix}\lambda_2 & 1 & & 0\\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda_2\end{pmatrix}_{n_2\times n_2}\qquad \lambda_1\neq\lambda_2$$

利用初等变换容易验证特征阵

$$sI-J=\begin{pmatrix} sI-J_1 & 0 \\ 0 & sI-J_2 \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cccc:cccc} s-\lambda_1 & -1 & & 0 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & 0 & \\ & & \ddots & -1 & & & & \\ 0 & & & s-\lambda_1 & & & & \\ \hdashline & & & & s-\lambda_2 & -1 & & 0 \\ & & 0 & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & -1 \\ & & & & 0 & & & s-\lambda_2 \end{array}\right)$$

的Smith标准形为

$$S(s)=\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & (s-\lambda_1)^{n_1}(s-\lambda_2)^{n_2} \end{pmatrix}$$

因而容易看出有下面结果：

（1）J除1以外不变因式为$(s-\lambda_1)^{n_1}(s-\lambda_2)^{n_2}$；

（2）J的初等因式为$(s-\lambda_1)^{n_1}$，$(s-\lambda_2)^{n_2}$；

（3）J的特征多项式为$(s-\lambda_1)^{n_1}(s-\lambda_2)^{n_2}$；

（4）J的最小多项式为$(s-\lambda_1)^{n_1}(s-\lambda_2)^{n_2}$

再考虑如下一般情形，设

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_q \end{pmatrix} \tag{1-13}$$

式中

$$J_i=\begin{pmatrix} J_{i1} & & & 0 \\ & J_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{ik_i} \end{pmatrix}_{n_i\times n_i} \qquad i=1,2,\cdots q$$

$$\sum_{i=1}^{q} n_i=n \tag{1-14}$$

而

$$J_{ij}=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_{ij}\times n_{ij}} \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ k_i$$

$$\sum_{j=1}^{k_i} n_{ij} = n_i \tag{1-15}$$

$$n_{i1} \leqslant n_{i2} \leqslant \cdots \leqslant n_{ik_i}$$

且λ_1、λ_2、$\cdots\lambda_q$为不相同的复数。

由式（1-13）～式（1-15）所确定的J阵通常称为若唐标准形。

定理1-4　对于由式（1-13）～式（1-15）所确定的若唐标准形有下面结果：

（1）J的初级因子为$(s-\lambda_i)^{n_{i1}}$，$(s-\lambda_i)^{n_{i2}}$，$\cdots$，$(s-\lambda_i)^{n_{ik_i}}$，$i=1,\ 2,\ \cdots,q$；

（2）J的特征多项式为 $\prod_{i=1}^{q}\prod_{j=1}^{k_i}(s-\lambda_i)^{n_{ij}} = \prod_{i=1}^{q}(s-\lambda_i)^{n_i}$；

（3）J的最小多项式为 $\prod_{i=1}^{q}(s-\lambda_i)^{n_{ik_i}}$

根据若唐标准形容易看出如下几点：

（1）对于若唐标准形J，若不计若唐块排列的次序，则J由初级因子唯一确定，对于每一个初级因子$(s-\lambda_i)^{n_{ij}}$，则J中有唯一的一个若唐块

$$J_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}_{n_{ij}\times n_{ij}}$$

与之对应。

（2）J的特征多项式等于所有初级因子的乘积。

（3）J的最小多项式等于对应于每个特征根（不相同的）的次数最高的初级因子的乘积，亦即等于次数最高的不变因式（即最后一个不变因式）。

关于若唐标准形，众所周知有下面结果：

定理1-5　（若唐定理）　在复数域上，对任一个$n\times n$阶方阵A，一定与一若唐标准形J相似。若不计若唐标准形中若唐块排列的次序，则这若唐标准形是唯一的[7][3]。

今后，称与A相似的若唐标准形为A的若唐标准形。

根据前面的讨论，我们知道相似的方阵具有相同的特征多项式、最小多项式、不变因式和初级因子。因而矩阵A的特征多项式、最小多项式、不变因式和初级因子与它的若唐标准形的完全相同。

由上面结果，可得到求A的最小多项式的两个方法。如下例所示

例1-3　求

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

的最小多项式。

解

方法一　由例1-1可知，A的特征多项式为

$$f_c(s)=s^3-s-2=(s+1)^2(s-2)$$

考虑多项式$(s+1)(s-2)$，s用A代入得

$$(A+I)(A-2I)=\left(\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&-1&0\\0&1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)\left(\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&-1&0\\0&1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}0&4&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq 0$$

所以$(s+1)(s-2)$不是A的最小多项式，故A的最小多项式为

$$f_m(s)=f_c(s)=(s+1)^2(s-2)$$

方法二　根据例1-1可知A的特征阵的Smith形为

$$S(s)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(s+1)^2(s-2)\end{pmatrix}$$

故A的最小多项式为

$$f_m(s)=(s+1)^2(s-2)$$

例1-4　求

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&2&-1&-1\\0&1&0&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

的最小多项式。

解

方法一　A的特征多项式为

$$f_c(s)=|sI-A|=\begin{vmatrix}s-1&0&0&-1\\0&s-2&1&1\\0&-1&s&1\\0&0&0&s-1\end{vmatrix}=(s-1)^4$$

容易验证

$(A-I)\neq 0$，而$(A-I)^2=0$，所以A的最小多项式为

$$f_m(s)=(s-1)^2$$

方法二　A的特征阵为

$$sI-A=\begin{pmatrix}s-1&0&0&-1\\0&s-2&1&1\\0&-1&s&1\\0&0&0&s-1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{对调}]{\text{列的}}\begin{pmatrix}-1&0&0&s-1\\1&1&s-2&0\\1&s&-1&0\\s-1&0&0&0\end{pmatrix}$$