高等学校经济管理类数学基础

高等数学

主　编　孙国正　杜先能
副主编　蒋　威　侯为波　束立生

Gaodeng shuxue

安徽大学出版社

高等学校经济管理类数学基础

高等数学

主　编　孙国正　杜先能
副主编　蒋　威　侯为波　束立生

安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学./孙国正,杜先能主编.—合肥:安徽大学出版社,2003.8

(高等学校经济管理类数学基础)

ISBN 7-81052-703-7

Ⅰ.高... Ⅱ.①孙...②杜... Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 073751 号

高等数学

主　编　孙国正　杜先能

副主编　蒋　威　侯为波　束立生

出版发行	安徽大学出版社 (合肥市肥西路 3 号　邮编 230039)	**经　销**	各地新华书店
		印　刷	安徽省天歌印刷厂
联系电话	编辑室 0551-5108438 发行部 0551-5107784	**开　本**	787×960　1/16
		印　张	24 25
电子信箱	ahdxchps@mial hf ah en	**字　数**	410 千
责任编辑	徐　建　鲍家全	**版　次**	2003 年 8 月第 1 版
封面设计	张　犇	**印　次**	2003 年 8 月第 1 次印刷

ISBN7-81052-703-7/O·36　　　　**定价** 27.50 元

参 编 人 员

王良龙　孙国正　刘树德　束立生

何江宏　杜先能　宋寿柏　陆　斌

郭大伟　侯为波　祝东进　赵礼峰

胡舒合　徐建华　徐德璋　殷晓斌

蒋　威　雍锡琪

前　　言

数学科学在经济科学、社会科学、人文科学的发展中发挥着越来越大的作用.数学的应用越来越广泛.数学在形成人类思维和促进个人智力发展的过程中发挥着独特的、不可替代的作用.

为适应科技、经济和社会的发展对高层次人才的需求,为适应高等教育教学内容和课程体系改革的要求以及培养"厚基础、宽口径、强能力、高素质"人才的需要,根据教育部颁发的《高等数学》教学大纲和2003、2004年《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》,我们编写了《高等数学》(经济管理类)一书,作为高等院校经济类和管理类专业"高等数学"课程的教材,也可作为硕士研究生入学统一考试的参考书.

本书在内容选择上力求简明扼要,通俗易懂,但同时注意保持数学学科自身的内在规律性和系统性.本书注重加强基本概念、基本方法和基本思想的讲述,并注意介绍基本理论在经济学中的一些简单应用,由此提高学生分析和解决实际问题的能力.

本书的总体框架与编写大纲由省内多所学校的老师反复讨论后确定.本书共计10章,第1、2章介绍函数和极限理论,并介绍了经济学中几种常见函数;第3、4章是一元函数微分学,介绍了导数、微分及其应用;第5、6章是一元函数积分学,介绍了不定积分与定积分;第7章是多元函数微积分学,由浅入深地介绍了空间解析几何基础知识、多元函数的微分和二重积分;第8章介绍了级数及其收敛判别法,重点讨论了幂级数与泰勒级数;第9、10章介绍了微分方程和差分方程的初步知识.

本书的编写是在安徽师范大学、安徽大学、淮北煤炭师范学院三校数学系、教务处的领导和许多教师的大力支持下完成的,在此表示感谢.

在本书的编写过程中,我们参阅了国内外许多教材,谨表诚挚的谢意.

囿于编者学识,编写时间也比较仓促,书中错误与缺陷在所难免,恳请同行、读者提出宝贵意见,以使本书在今后的教学实践中不断完善.

编者

2003年8月

目 录

第 1 章 函数 …… 1

§1.1 实数集 …… 1
§1.2 函数 …… 5
§1.3 反函数 …… 12
§1.4 复合函数 …… 14
§1.5 初等函数 …… 16
§1.6 经济学中几种常见的函数 …… 21
习题 1 …… 24

第 2 章 极限与连续 …… 28

§2.1 数列极限 …… 28
§2.2 函数极限 …… 37
§2.3 无穷小量与无穷大量 …… 49
§2.4 函数的连续性 …… 52
习题 2 …… 58

第 3 章 导数与微分 …… 62

§3.1 导数概念 …… 62
§3.2 求导法则 …… 67
§3.3 微分及其计算 …… 75
§3.4 高阶导数与高阶微分 …… 79
§3.5 导数与微分在经济学中的简单应用 …… 82
习题 3 …… 84

第 4 章 中值定理与导数的应用 …… 88

§4.1 微分中值定理 …… 88
§4.2 洛必达法则 …… 94
§4.3 泰勒公式 …… 98
§4.4 函数的单调性与极值 …… 103
§4.5 函数图形的讨论 …… 108
习题 4 …… 113

第 5 章 不定积分 …… 117

§5.1 不定积分概念 …… 117
§5.2 基本积分公式 …… 120
§5.3 换元积分法 …… 122
§5.4 分部积分法 …… 138
习题 5 …… 144

第 6 章 定积分 …… 149

§6.1 定积分的概念与性质 …… 149
§6.2 微积分基本原理 …… 156
§6.3 定积分的换元积分法与分部积分法 …… 161
§6.4 定积分的应用 …… 168
§6.5 反常积分初步 …… 180
习题 6 …… 197

第 7 章 多元函数微积分学 …… 205

§7.1 空间解析几何简介 …… 205
§7.2 多元函数的概念 …… 217
§7.3 偏导数与全微分 …… 220
§7.4 多元复合函数与隐函数微分法 …… 225
§7.5 方向导数与梯度 …… 232
§7.6 高阶偏导数与高阶全微分 …… 234
§7.7 多元函数的极值 …… 238
§7.8 二重积分 …… 246
习题 7 …… 268

第 8 章 无穷级数 …… 273

§8.1 常数项级数的概念和性质 …… 273
§8.2 常数项级数的收敛判别法 …… 278
§8.3 幂级数 …… 289
§8.4 泰勒级数 …… 296
习题 8 …… 303

第 9 章 微分方程初步 …… 309

§9.1 微分方程的基本概念 …… 309
§9.2 一阶微分方程 …… 312
§9.3 二阶常系数线性微分方程 …… 319
§9.4 微分方程在经济学中的应用 …… 327
习题 9 …… 331

第 10 章 差分方程 …… 334

§10.1 差分方程的基本概念 …… 334
§10.2 一阶常系数线性差分方程 …… 338
§10.3 二阶常系数线性差分方程 …… 343
§10.4 差分方程在经济学中的简单应用 …… 348
习题 10 …… 351

参考答案 …… 353

第 1 章

函　数

函数是微积分学研究的基本对象，函数概念是高等数学中最重要的概念之一．本章我们将介绍函数概念、函数的基本性质、基本初等函数与初等函数等有关知识．

§1.1　实数集

微积分学研究的基本对象主要是在实数集上定义的函数．因此，我们先简单介绍实数的有关概念．

1．实数与数轴

元素是实数的集合称为实数集，或简称为数集．通常约定将所有非负整数、整数、有理数、实数之集分别记为 $\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{Z}$、$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}$．在右上角加上“+”或“-”表示它们的正或负元素之集，例如 $\boldsymbol{Q}^+$ 表示所有正有理数集，等等．

在中学数学中，我们曾学过集合的初步知识．根据集合的包含关系，显然有

$$\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$$

实数由有理数与无理数两部分组成．全体实数之集（即为 $\boldsymbol{R}$）称为实数系．每个有理数都可表示为既约分数 p/q，其中 $p \in \boldsymbol{Z}$，$q \in \boldsymbol{N}$，且 $q \neq 0$，也可表示为有限十进小数或无限十进循环小数．无限十进不循环小数则表示一个无理数．

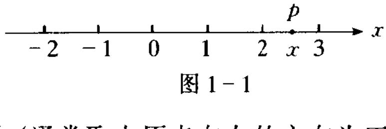

图 1-1

规定了原点、正方向（通常取由原点向右的方向为正方向）和单位长度的直线（通常画成水平直线）称为数轴．每一个实数 x 都对应数轴上惟一的一个点 p，即如果实数 $x > 0$，则可在数轴上原点右方取点 p，使得线段 op 的

长度 $|op|$ 就是 x；如果 $x<0$，则可在数轴上原点的左方取点 p，使得线段 op 的长度的相反数 $-|op|$ 就是 x；如果 $x=0$，则取点 p 为数轴的原点．显然，这样取得的点 p 是惟一的．反之，数轴上的每一个点 p 都惟一地对应一个实数 x．于是，全体实数与整个数轴上的点之间构成了一一对应关系．正因为如此，通常把数轴上的点和实数不加区别，数轴上的点 p 直接用按上述对应方法所对应的实数 x 标出，该实数 x 也称为点 p 的坐标．这正表明，我们为什么要将一条规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做“数轴”．

2．绝对值及其基本性质

实数 x 的绝对值定义为

$$|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0,\\ -x, x<0.\end{cases}$$

从几何上看，实数 x 的绝对值 $|x|$ 就是数轴上点 x 到原点的距离，而绝对值 $|x-y|$ 则表示数轴上点 x 与点 y 之间的距离．

绝对值有如下基本性质：设 $x,y\in\boldsymbol{R}$，则

(1) $|x|=|-x|\geqslant 0$；$|x|=0$ 当且仅当 $x=0$．

(2) $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$．

(3) 不等式 $|x|<a$ 和 $|x|\leqslant a$ 分别等价于不等式 $-a<x<a$ 和 $-a\leqslant x\leqslant a$（其中 $a>0$）．

(4) 三角不等式成立，即有

$$\big||x|-|y|\big|\leqslant|x\pm y|\leqslant|x|+|y|.$$

(5) $|xy|=|x||y|$．

(6) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}(y\neq 0)$．

下面仅证明性质(4)，其余性质的证明由读者自行完成．

由性质(2)有

$$-|x|\leqslant x\leqslant|x|,\ -|y|\leqslant y\leqslant|y|,$$

两式相加，得

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant|x|+|y|. \tag{1.1}$$

根据性质(1)，(1.1)式等价于

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|. \tag{1.2}$$

在(1.1)式中以 $-y$ 代 y，(1.1)式仍成立，故有

$$|x-y|\leqslant|x|+|y|. \tag{1.3}$$

这便证明了性质(4)中不等式的右半部分.

其次,由上述结果可得

$$|x|=|x-y+y|\leqslant|x-y|+|y|,$$

因此

$$|x|-|y|\leqslant|x-y|. \tag{1.4}$$

在上式中对调 x 与 y 得

$$|y|-|x|\leqslant|y-x|,$$

由性质1得

$$|x|-|y|\geqslant-|x-y|. \tag{1.5}$$

由(1.4)、(1.5)式得

$$-|x-y|\leqslant|x|-|y|\leqslant|x-y|,$$

从而

$$\big||x|-|y|\big|\leqslant|x-y|.$$

在上式中以 $-y$ 代 y,便得

$$||x|-|y||\leqslant|x+y|,$$

于是性质(4)的左半部分得证.

3. 区间与邻域

区间和邻域是今后我们经常遇到的两类重要的数集.

设 a、$b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$. 称数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 为开区间,记为 (a,b),即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

从几何上看,开区间 (a,b) 表示数轴上以 a,b 为端点但不包括端点 a 和 b 的线段上点的全体,如图1-2. 数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间,记为 $[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

图1-2

图1-3

从几何上看,闭区间 $[a,b]$ 表示数轴上以 a,b 为端点而包括端点 a 和 b 的线段上点的全体,如图1-3. 数集 $\{x\mid a\leqslant x<b\}$ 和 $\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 分

别称为左闭右开区间和左开右闭区间，分别记为$[a,b)$和$(a,b]$. 它们统称为半开半闭区间．半开半闭区间也有类似于开区间与闭区间的几何意义．上述四种区间统称为有限区间．

除上述有限区间外，还有五种无穷区间：

$$(-\infty,a)=\{x\mid -\infty<x<a\},$$
$$(-\infty,a]=\{x\mid -\infty<x\leqslant a\},$$
$$(a,+\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\},$$
$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=\boldsymbol{R}.$$

这里"$-\infty$"与"$+\infty$"分别读作"负无穷大"与"正无穷大"，它们仅是一个符号，不是实数．

上述各种区间统称为区间，通常用 I 表示．

设 $x\in\boldsymbol{R},\delta>0$. 满足不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的实数x的全体称为点x_0的δ邻域，记为 $U(x_0,\delta)$，或简记为 $U(x_0)$，点 x_0 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径．由定义立知

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}.$$

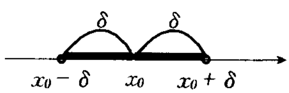

图 1－4

$U(x_0,\delta)$ 在数轴上的表示如图 1－4. 将点 x_0 的 δ 邻域去掉中心点x_0所得的实数 x 全体称为点 x_0 的去心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，或简记为 $\mathring{U}(x_0)$，即有

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

另外，开区间$(x_0-\delta,x_0)$称为点 x_0 的 δ 左邻域，记为 $U_-(x_0,\delta)$ 或 $U_-(x_0)$；$(x_0,x_0+\delta)$称为点 x_0 的 δ 右邻域，记为 $U_+(x_0,\delta)$ 或 $U_+(x_0)$.

对于充分大的正数 M，我们定义

$$U(\infty,M)=\{x\mid |x|>M\},U(-\infty,M)=\{x\mid x<-M\},$$
$$U(+\infty,M)=\{x\mid x>M\},$$

分别称它们为∞(读作无穷大)邻域，$-\infty$ 邻域，$+\infty$ 邻域．

例 1 解不等式 $1\leqslant|x-2|<3$，并用区间表示其解集．

解 根据绝对值的几何意义，欲求解的不等式表示 x 到2的距离不小于1而小于3. 易知，数轴上点 1 与 3 到 2 的距离均为 1，点 -1 与 5 到 2 的距离均为 3，故所求不等式解集为$\{x\mid -1<x\leqslant 1$ 或 $3\leqslant x<5\}$，用区间来表示

为$(-1,1]\cup[3,5)$. 如图1-5.

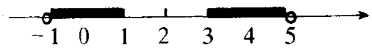

图1-5

例2 满足不等式$|x-3|<\frac{1}{5}$的实数x的全体,即是以$x_0=3$为中心,$\delta=\frac{1}{5}$为半径的邻域,用开区间表示即为$U(3,\frac{1}{5})=(2.8,3.2)$.

§1.2 函数

当我们考察某个自然现象、社会经济现象或生产过程时,常常会遇到一些不同的量.这些量有的在某个过程中一直保持不变的数值,这种量我们称其为常量;有的却在变化着,这种量我们称其为变量,并且这些量的变化不是孤立的,而是彼此相互联系并遵循某个确定的变化规律.例如圆的面积A与它的半径r之间的关系为$A=\pi r^2$,这里的A与r都是变量(r在区间$(0,+\infty)$内任意取值),而π则是一个常量;又如,在自由落体运动中,物体下落的距离s与下落的时间t,当开始下落的时刻$t=0$时,它们之间的关系为$s=\frac{1}{2}gt^2$,这里的s与t都是变量,而重力加速度g是常量.

任何变量都有一定的取值范围.一变量所取到的全部数值组成的集合,称为该变量的变域.变量的变域常常是实数集$\boldsymbol{R}$的一个子集,甚至是一个区间.例如前面所述的圆半径r的变域就是区间$(0,+\infty)$.

在关系式$A=\pi r^2$与$s=\frac{1}{2}gt^2$中,抽去其中各个量的实际意义,可以看出它们的一个共同特征:它们都表达了两个变量之间的相互依赖关系,其中一个量的变化,导致另一个量有确定的值与之对应.把这种确定的依赖关系抽象出来,就是函数的概念.

1. 函数概念

定义1.2.1 设$D\subset\boldsymbol{R}$是一个给定的数集,如果存在一个对应法则f,使得对D内每个数x,都有惟一的一个数y与之对应,则称该对应法则f为定义在数集D上的函数,简称为函数,数集D称为该函数的定义域,通常记作$D(f)$,x称为自变量,y称为因变量.对每个$x\in D$,由法则f所对应的实数y称为f在x处的函数值,记作$y=f(x)$.函数值全体之集称为函数f的值域,记作$R(f)$(或$f(D)$).即有

$$R(f) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

注 1 确定一个函数有两个重要因素：定义域 $D(f)$ 和对应法则 f. 因此，我们通常用

$$y = f(x), x \in D(f)$$

来表示一个函数．函数的这种表示，使得 x 与 y 这两个变量之间的对应关系明晰，运算方便，但严格说来，这是把函数与函数值混用的记法．

注 2 既然定义域和对应法则是确定一个函数的两要素，因此，我们说某两个函数相同，是指它们有相同的定义域和相同的对应法则，否则，该两函数就是不相同的．例如 $f(x) = x, x \in (-\infty, +\infty)$ 与 $g(x) = \sqrt{x^2}$，$x \in (-\infty, +\infty)$ 是不相同的两个函数，而 $\varphi(x) = 1, x \in (-\infty, +\infty)$ 与 $\psi(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, x \in (-\infty, +\infty)$ 是相同的函数．由此可见，相同的函数其对应法则的表达形式可以不同．

注 3 给定一个函数 f，实际上是给出了 x 轴上的点集 $D(f)$ 到 y 轴上的点集 $R(f)$ 之间的单值对应，这种对应也称为映射．对于 $x \in D(f)$，有 $f(x) \in R(f)$，我们称 $f(x)$ 为 x 在映射 f 下的象，x 称为 $f(x)$ 的原象．按照映射的表示方法，函数 f 又可表示为

$$f: D \to \mathbf{R}, x \mapsto f(x), x \in D.$$

2. 函数的表示法

表示函数的方法主要有三种，即图象法和解析法．

(1) 列表法．

在许多实际问题中，常常把自变量所取的值与对应的函数值列成表格，用以表示自变量与因变量之间的函数关系．函数的这种表示法称为列表法．

例 1 某化工公司某年农用化肥月生产量统计如下表：

月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
月产量（万吨）	5.1	5.2	5.6	6.2	5.9	5.5	5.8	5.0	6.1	5.4	4.2	4.1

从上表可以看出，该公司化肥月产量 y 与月份 t 之间有着确定的对应关系，月份 t 在 1 到 12 之间每取一个整数值，由表可得月产量 y 有惟一的一个对应值，从而表格确定了一个函数，其定义域是数集 $\{t \mid 1 \leqslant t \leqslant 12, t \in \mathbf{Z}\}$.

(2) 图象法．

集 $$Grf = \{(x, f(x)) \mid x \in D(f)\}$$

称为 f 的图象（或图形）．一元函数的图象是平面点集．

将两个变量之间的对应关系在平面直角坐标系中用图形表示出来，这种表示函数的方法称为图象法．

例2 某气象站利用自动温度记录仪记下某地一天24小时的气温变化，如图1－6.

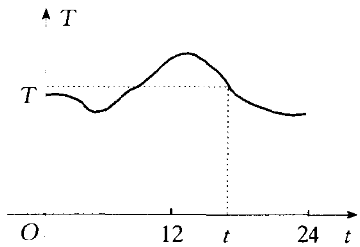

图1－6

由图可见，对于一昼夜内任一时刻 t，都有惟一确定的温度 T 与之对应，从而该曲线便确定了区间[0,24]上的一个函数．

(3) 解析法．

将两个变量之间的对应关系利用一定的数学运算式——解析表达式表示出来，这种表示函数的方法称为解析法．用解析法表示函数，应该使得对自变量的每一个值，通过解析表达式能确定惟一的因变量的值．

例3 某工厂每天生产某产品最多为5000件，固定成本为2000元，单位可变成本为100元，则每天该产品的日产量 x(件)与日总成本 y(元)可建立如下函数关系：

$$y = 2000 + 100x, x \in D(f) = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 5000, x \in \mathbf{N}\}.$$

上式表明了 y 是 x 的函数，它的解析式是 $f(x) = 2000 + 100x$.

以上表示函数的三种方法各有其特点，表格法和图象法直观，而解析法便于更进一步研究函数(如施行运算等)，因此，今后主要是利用解析式来表示函数．

用解析式表示函数，并不要求函数在整个定义域 $D(f)$ 上有惟一的解析表达式，往往在 $D(f)$ 的不同子集上，函数的解析式是不一样的，这相当于将 $D(f)$ 分成若干“段”(部分)，每一“段”有其一个解析式，这些解析式合起来表示了一个函数，通常称这种函数为分段函数．

例4 (1) 符号函数

$$\operatorname{sgn}x = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -1, x < 0. \end{cases}$$

(2) 取整函数

$$f(x)=[x]=n, n\leqslant x<n+1, n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

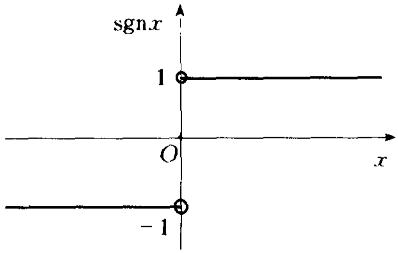

图1-7

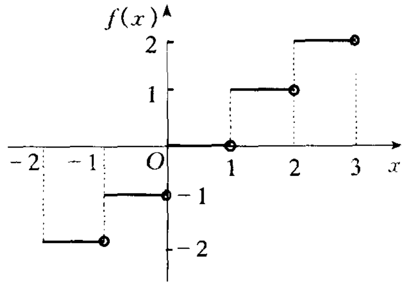

图1-8

需要注意,分段函数的解析式不只一个,但它是一个函数,其定义域是“各段”之并集;分段函数的图象应分段作出,但不要认为图象分段的函数就是分段函数;求函数值 $f(x_0)$ 时,应先判明 x_0 属于定义域中哪一个子集,再将 x_0 代入相应的表达式计算.

3. 函数定义域

函数的定义域是确定一个函数起决定作用的两个要素之一.一般地,表示一个函数,不仅要给出自变量与因变量的对应法则,同时要标明函数的定义域,即自变量的变化范围.在利用解析法表示函数时,有时只写出函数 $f(x)$ 的解析表达式,并不标明定义域,此时函数的定义域指的是使解析表达式有意义的自变量 x 全体之集,这种定义域也叫做自然定义域,或存在域.

例5 求函数 $f(x)=\sqrt{x+4}+\dfrac{1}{x^2-1}$ 的定义域.

解 所求的定义域即为自然定义域,故应有

$$x+4\geqslant 0 \text{ 且 } x^2-1\neq 0.$$

由 $x+4\geqslant 0$ 得 $x\geqslant -4$,即 $x\in[-4,+\infty)$;由 $x^2-1\neq 0$ 得 $x\neq\pm 1$,即 $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$. 故 $f(x)$ 的定义域为

$$D(f)=[-4,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty).$$

对于由实际应用问题所确定的函数,它的定义域不仅要保证函数的表达式有意义,还要使得实际问题有意义.有人称这种符合实际问题的定义域为实际定义域.

例6 物体在 $t=0$ 时从高度为 h 处自由落下,设时间 t 时落下的距离为 s,则 s 是 t 的函数,其表达式为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 为重力加速度(为常数),函数的定义域是区间$\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$,如果不考虑变量 t 与 S 的实际意义,则函数 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 的自然定义域为$(-\infty,+\infty)$.

4. 函数的简单性质

函数的有界性.

定义 1.2.2 设 $f(x)$ 在数集 D 上有定义,若存在数 $M(L)$,对每一个 $x\in D$,都有

$$f(x)\leqslant M(f(x)\geqslant L),$$

则称 $f(x)$ 在 D 上有上(下)界,$M(L)$ 称为 $f(x)$ 的一个上(下)界.特别地,当 D 就是 $f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 时,称 $f(x)$ 为有上(下)界函数.

由定义立知,若 $M(L)$ 为 $f(x)$ 的上(下)界,则任何大(小)于 $M(L)$ 的数都是 $f(x)$ 的上(下)界;若 $f(x)$ 为有上(下)界函数,则 $f(x)$ 必是有上(下)界的.反之,若 $f(x)$ 在某个数集 D 上有上(下)界,则 $f(x)$ 不一定是有上(下)界函数.

定义 1.2.3 设 $f(x)$ 在数集 D 上有定义,若存在正数 M,对每一个 $x\in D$,都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 D 上是有界的.特别地,当 D 就是 $f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 时,称 $f(x)$ 为有界函数.

根据定义,$f(x)$ 在 D 上有界,意味着 $f(x)$ 在 D 上既有上界 M,又有下界 $-M$,此时 $f(x)$ 的上(下)界并不是惟一的.反之,若 $f(x)$ 在 D 上既有上界又有下界(上下界不一定互为相反数),则 $f(x)$ 在 D 上必是有界的.

函数 $f(x)$ 在 D 上无上界(无下界、无界),是指 $f(x)$ 不满足上述相应的定义.可以给出这个概念的正面陈述:

设 $f(x)$ 在 D 上有定义,若对任意正数 M,总存在 $x_0\in D$,使得

$$f(x_0)>M(f(x_0)<-M\text{、}|f(x_0)|>M),$$

则称 $f(x)$ 在 D 上无上界(无下界、无界).特别地,如果 $D=D(f)$,则称 $f(x)$ 为无上界函数(无下界函数、无界函数).

例 7 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 是有界函数.

这是因为对任意 $x\in D(f)=(-\infty,+\infty)$,有

$$0<\frac{1}{1+x^2}\leqslant 1.$$