高等院校力学学习辅导丛书
Exercise Series in Mechanics for Higher Education

理论力学辅导

Exercise in Classical Mechanics

贾书惠 张怀瑾 主编
Jia Shuhui Zhang Huaijin

清华大学出版社 Springer

高等院校力学学习辅导丛书
Exercise Series in Mechanics for Higher Education

理论力学辅导

Exercise in Classical Mechanics

贾书惠 张怀瑾 主编
Jia Shuhui Zhang Huaijin

清华大学出版社 Springer
北京

内容简介

本书为理论力学教学用辅导教材，包括理论力学课程内容的各个部分，有静力学、运动学、动力学共19章。每章均有“内容摘要”、“基本要求”、“例题”和“习题”。书中通过典型题目分析，阐述解题的正确思路、方法和技巧，题后附有“要点及讨论”，指出题目所涉及的重点内容以及求解的关键。书中所列习题类型多样，覆盖各章的基本要求，可使读者得到全面训练。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学辅导/贾书惠，张怀瑾主编．—北京：清华大学出版社，2003
(高等院校力学学习辅导丛书)
ISBN 7-302-07477-1

Ⅰ．理… Ⅱ．①贾… ②张… Ⅲ．理论力学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ．O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 096099 号

出 版 者：清华大学出版社　　地　址：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　邮　编：100084
社 总 机：010-62770175　　客户服务：010-62776969
印 刷 者：北京国马印刷厂
装 订 者：北京密云京文制本装订厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　本：175×245　印张：26.25　字数：528 千字
版　次：2003 年 11 月修订版　2003 年 11 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-07477-1/O・327
印　数：1～3000
定　价：24.00 元

前 言

理论力学是高等工科院校的一门重要的基础课程，它的教学特点之一是必须完成一定数量的习题才能很好地掌握课程内容。本书的编写目的就是通过解题、辅导等手段，巩固并深化对理论力学课程基本概念、基本理论、基本方法的理解和掌握。

本书每一章均包括4部分。“内容摘要”总结了本章的主要内容，同时包含了有关解题的必要信息。“基本要求”提出了应该一般了解的、重点掌握的和熟练应用的各项内容，读者可在学习过程中参考，并在学完本章后检查。“例题”部分通过典型题目阐述解题的正确思路、方法和技巧。有的例题中采用了规范化的解题步骤，有的例题解法中只着重主要部分。在题后的“要点及讨论”中，“要点”指本题所涉及到的重点内容及本题求解的关键。“讨论”则是对概念、解题方法的深入与扩展。“习题”部分包括各种类型的习题，既有计算题也有概念题，使每章习题能够覆盖本章的基本要求。这样可使读者得到比较全面的训练。

考虑到本书是与理论力学教材同时使用，因此在选材上尽量避免重复，例如在例题部分减少初等与基本的题目，增加了综合性题目。还有一些内容属于理论力学的提高部分，这些内容均用*号注明，读者可以选读。

本书的编写得到清华大学理论力学教研室全体教师的支持，使用的材料也是大家多年来的积累，因此本书实际上是教研室多年来教学经验的总结。本书各章的编写人员为，第4,8,19章由贾书惠编写，第9至14章由张怀瑾编写，第1,3,6,7章由李苹编写，第2,17,18章由李万琼编写，第5,15,16章由薛克宗编写。高云峰校对了部分习题的答案。本书主编为贾书惠、张怀瑾。

本书可供高等工科院校的学生及教师参考。

由于时间仓促及水平所限，错误及不当之处还希望广大读者给予指正。

编　者

1996.1.15

目　　录

第 1 章
受力分析及两个基本力系

1.1 内 容 摘 要

静力学的内容主要为两部分,即力系简化与平衡的理论及应用问题。但在运用理论求解具体问题之前,必须首先进行物体的受力分析。

1. 受力分析

工程上大量的研究对象受有约束,进行受力分析时,应先解除约束(取分离体),并以相应的约束力取代这些约束。在分离体上画出对象所受的全部已知载荷及约束力即得该研究对象的受力图。正确分析受力,画好受力图的要点是:

(1) 熟知各种常见约束的性质和它们所提供的约束力的特点。

(2) 会判断二力构件及三力构件,并根据二力平衡条件及三力平衡条件确定约束力的方向。

(3) 准确把握物体间作用力与反作用力的关系。

2. 汇交力系的简化和平衡条件

(1) 简化

汇交力系简化的结果是一过汇交点 O 点的合力,合力的大小和方向取决于各分力的矢量和

$$\boldsymbol{R} = \sum \boldsymbol{F}$$

分别应用几何法——求力多边形的封闭边及解析法——在选定坐标系中进行投影计

算再求和的方法，可求得 $\boldsymbol{R}$ 的大小和方向。矢量和称为力系的主矢量，它是一自由矢量。

(2) 平衡条件

汇交力系平衡的必要且充分的条件是合力为零，或力系的矢量和为零，即 $\sum \boldsymbol{F}=0$。

该平衡条件的几何表达形式是：汇交力系各力的矢量构成封闭的力多边形。对于三力平衡情况，应用力三角形几何关系解算未知力比较简便。

平衡条件的解析形式是：

$$\sum F_x=0,\quad \sum F_y=0,\quad \sum F_z=0 \tag{1.1}$$

这组三个独立的平衡方程，可用于求解空间汇交力系平衡时的三个未知量。

若为平面汇交力系，独立平衡方程则只有两个：

$$\sum F_x=0,\quad \sum F_y=0 \tag{1.2}$$

(3) 力的投影

在列写平衡方程式时，需要正确而迅速地计算力在轴上的投影，这是静力学解题的一项基本运算。可以利用一次投影法、两次投影法和按长方体三棱边的长度比例分解等三种方法计算，可分别参考例 1.2、例 1.3 和例 1.4。

3. 力矩

力矩体现了力对物体作用时的转动效果，力矩概念综合反映了力的三要素的特征，故十分重要。力 $\boldsymbol{F}$ 对 O 点之矩是矢量，表为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})&=\boldsymbol{r}_{OA}\times\boldsymbol{F}\\&=(x_A\boldsymbol{i}+y_A\boldsymbol{j}+z_A\boldsymbol{k})\times(X\boldsymbol{i}+Y\boldsymbol{j}+Z\boldsymbol{k})\end{aligned} \tag{1.3}$$

式中 x_A,y_A,z_A 是力 $\boldsymbol{F}$ 之作用点 A 在以 O 为原点的坐标系中的坐标，X,Y,Z 是力 $\boldsymbol{F}$ 在该坐标系中的投影。力 $\boldsymbol{F}$ 对某轴（例如 x 轴）之矩是代数量，表为 $m_x(\boldsymbol{F})$。力对点之矩与力对以该点为原点的三坐标轴之矩的关系可表为

$$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F})=m_x(\boldsymbol{F})\boldsymbol{i}+m_y(\boldsymbol{F})\boldsymbol{j}+m_z(\boldsymbol{F})\boldsymbol{k} \tag{1.4}$$

计算力矩是静力学解题的另一项基本运算，关于计算力对点之矩及力对轴之矩的各种方法，可参看例 1.4。

物体上作用的诸汇交力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$ 对某一点之矩的矢量和，等于汇交力系合力 $\boldsymbol{R}\left(=\sum\boldsymbol{F}\right)$ 对同一点之矩。即

$$\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_1)+\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_2)+\cdots+\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}_n)=\sum\boldsymbol{m}_O(\boldsymbol{F}) \tag{1.5}$$

称为合力之矩定理。

4. 力偶系的简化和平衡条件

(1) 力偶性质与力偶矩

两个等值、反向、作用线平行而不在同一直线上的力 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}'$ 组成力偶，力偶对物体只有转动效应，力偶不能用一个力来平衡。力偶对物体的转动效应由力与力偶臂的乘积、力偶作用平面的方位和力偶在其作用平面内的转向这三个要素来决定。力偶的这三要素，可统一用一个称为力偶矩的矢量 $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')$ 或简写为 $\boldsymbol{m}$ 来表示。力偶矩 $\boldsymbol{m}$ 是自由矢量。且知(见图 1.1)

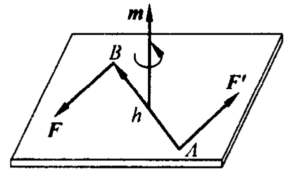


图 1.1

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{r}_{AB} \times \boldsymbol{F} \tag{1.6}$$

$$|\,\boldsymbol{m}\,| = F \cdot h \tag{1.6a}$$

在平面情况下，力偶矩 $\boldsymbol{m}$ 退化为代数量 $m = \pm F \cdot h$。

(2) 力偶系的简化

作用于刚体上的多个力偶可与一力偶等效，即力偶系可简化为一合力偶，合力偶的力偶矩等于各分力偶力偶矩的矢量和：

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2 + \cdots + \boldsymbol{m}_n = \sum \boldsymbol{m}_i \tag{1.7}$$

(3) 力偶系的平衡条件

力偶系平衡的充要条件是合力偶的力偶矩为零：

$$\boldsymbol{m} = 0 \quad 或 \quad \sum \boldsymbol{m}_i = 0 \tag{1.8}$$

上式写成投影式，有三个独立方程：

$$\sum m_{ix} = 0, \quad \sum m_{iy} = 0, \quad \sum m_{iz} = 0 \tag{1.8a}$$

当力偶系属于平面情况，则只有一独立方程

$$\sum \boldsymbol{m}_i = 0 \tag{1.9}$$

1.2 基本要求

1. 正确理解力、力偶、力矩、力偶矩、简化、平衡等概念，全面地掌握力及力偶的性质。

2. 熟知几种典型约束(柔性约束、光滑接触面、光滑的铰链、销钉、光滑圆柱轴承、辊轴支座、光滑球铰等)的约束性质及各种约束所提供的约束力的特征。

3. 对较简单的问题，会正确地选择研究对象，取分离体，熟练地画好它们的受力图。注意判断二力构件。

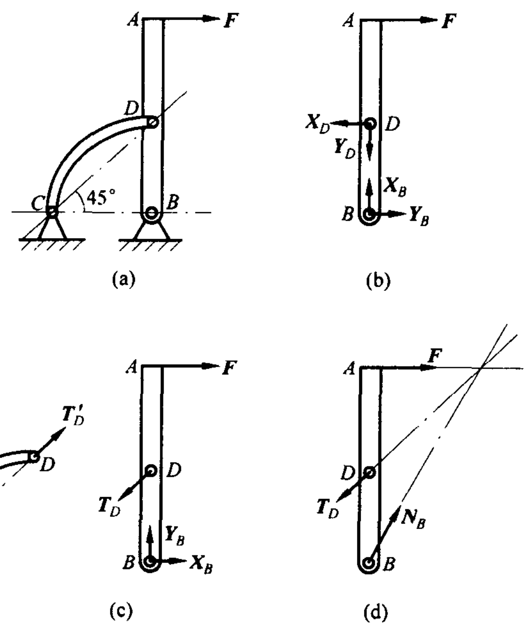
4. 会根据所给条件，选择恰当的方法计算力在坐标轴上的投影，计算力对点之矩和力对轴之矩，计算力偶矩。

5. 会针对汇交力系平衡或力偶系平衡的问题，分别判断它们具有的独立平衡方

程数，并应用相应的平衡方程求解未知量；对于三个汇交力平衡的问题及三个力偶平衡的问题，会应用封闭的矢量三角形这一平衡条件来求解未知量。

1.3 例　　题

例 1.1 试对例图 1.1(a)所示结构的主要构件进行受力分析、画受力图。



例图　1.1

解　此处所谓结构中的主要构件，是指起主要承载作用的构件，或是作用有已知载荷的构件。本题的构架由 AB 和 CD 两构件用铰链和铰支座连接而成，从计算构件受力的角度看，应该分析 AB 构件的受力。

(1) 对 AB 构件拆除 B 铰支座及 CD 构件，根据 B、D 处铰链的性质，可画出 AB 构件受力图如图(b)所示。这一分析符合前面本章 1.1 受力分析要点之(1)，因而是正确的，但这样思考还不够深入全面。

(2) 如果注意到 CD 构件受力的特点，可判断其为二力平衡构件，它所受的力 $\boldsymbol{T}_C$，$\boldsymbol{T}_D'$之作用线应沿 CD 连线。进而通过作用力与反作用力的关系，可知 AB 件的受力 $\boldsymbol{X}_D$ 和 $\boldsymbol{Y}_D$ 可合成为 $\boldsymbol{T}_D$（它是 $\boldsymbol{T}_D'$的反作用力），于是可画出如图(c)所示的受力图。

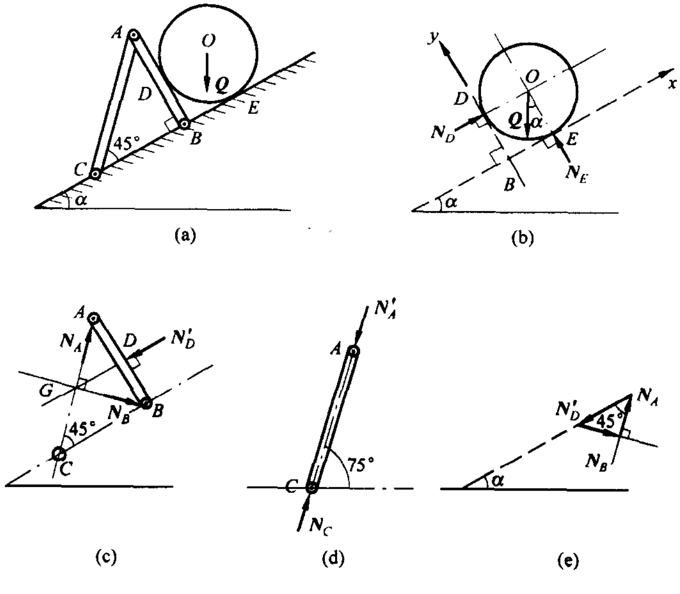
(3) 再对 AB 构件受力作进一步分析思考：可知 B 铰的约束力 $\boldsymbol{X}_B$ 和 $\boldsymbol{Y}_B$，可合成为一个力，因而 AB 是受三个不平行的力作用而平衡，且三力作用线汇交点已由 $\boldsymbol{T}_D$ 与 $\boldsymbol{F}$ 之交点可确定。最后，可画出 AB 构件的受力图如图(d)所示。

要点及讨论

(1) 对某个问题进行受力分析时，首先要选择好分析的重点对象，画出它或它们(复杂问题需顺次分析多个对象)的受力图。本题的重点对象当然是 AB 构件，因为其上作用有已知载荷 $\boldsymbol{F}$，其余未知约束力均与 $\boldsymbol{F}$ 力有关。

(2) 进行受力分析，画分析对象受力图时，要按照前面所述的三个要点全面地思考、推敲，最后综合地画出如图(d)所示之 AB 构件的受力图。也就是说，本题所画的图(b)和图(c)，只是为了将分析思考过程具体地展现于读者面前而画，并不要求大家按此顺序一一画出。

例 1.2 一重为 50 kN 的圆柱搁置在倾角 $\alpha=30°$的光滑斜面上，并用撑架支承如例图 1.2(a)。设撑架的 A,B,C 处均为光滑铰链，接触处的摩擦不计，接触点 D 刚好在构件 AB 的中央，试求撑杆 AC 的受力及铰链 B 的约束力(不计撑架构件自重)。



例图 1.2

解 本题的装置包含三个物体，且题目要求的未知力与已知载荷并不作用于同一物体，所以要顺次选择不同的对象进行分析求解。

(1) 先以圆柱为研究对象。由于 D,E 处均为光滑接触，圆柱受 $\boldsymbol{Q},\boldsymbol{N}_D$ 及 $\boldsymbol{N}_E$ 三个力作用，它们汇交于圆柱中心 O 点，受力图如图(b)。

选图示的坐标系 Bxy，由平衡条件可求解：

$$\sum X = 0,\quad N_D - Q\sin\alpha = 0,\quad N_D = Q\sin\alpha = 25\ \text{kN}$$

(2) 再分析构件 AB 的受力。根据 AC 为二力构件，可知 $\boldsymbol{N}_A$ 方向沿 AC 线，AB 上的载荷是圆柱对它的压力 $\boldsymbol{N}_D'$($\boldsymbol{N}_D' = -\boldsymbol{N}_D$)，此两力的作用线交于 G 点，则 B 铰约束力一定过 G 点，AB 构件受力图如图(c)所示。

在坐标系 Bxy 中，可列写平衡方程

$$\sum Y = 0,\quad N_A\sin45^\circ - N_B\sin45^\circ = 0$$

故 $$N_A = N_B$$

$$\sum X = 0,\quad N_A\cos45^\circ + N_B\cos45^\circ - N_D' = 0$$

故 $$N_A = N_B = \frac{1}{\sqrt{2}}N_D' = 17.68\ \text{kN}$$

(3) 由作用反作用关系，知撑杆 AC 受压力 17.68 kN，受力图如图(d)所示。

要点及讨论

(1) 凡涉及多个物体的问题，一般先以作用有已知载荷的物体为研究对象进行分析，或顺次由简单到复杂逐个地分析；

(2) 应用汇交力系平衡条件的解析式(平衡方程)时，应先标明坐标系。坐标系的确定，应随各个不同问题选取最易求解的坐标轴方向。本题是平面汇交力系，列写平衡方程时，均直接利用力的一次向轴投影。如遇空间汇交力系，当各力与坐标轴的夹角已确定时，也能用一次投影法。

(3) 当研究对象受三个汇交力平衡时，应用平衡的几何条件——作封闭的力三角形求解未知量，很是简便。在图(e)中画出了 AB 件上 3 个力形成的各力首尾相接的封闭三角形，据此立即得知：

$$N_A = N_B = \frac{1}{\sqrt{2}}N_D'$$

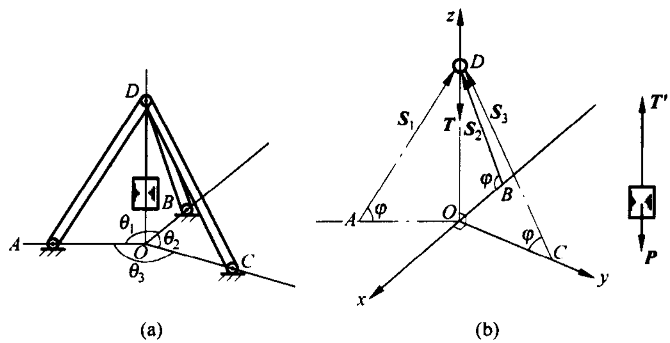
(4) 在读者能熟练地判断二力构件后，可以不再画出该构件的受力图，只需指明构件受力的方向；对于二力平衡的直杆，应指明其受的是压力还是拉力。

例 1.3 起重三脚架各杆均长 2.5 m，两端为铰接(见例图 1.3(a))。D 铰上挂有重物 $P=20$ kN，且知 $\theta_1=120^\circ$，$\theta_2=90^\circ$，$\theta_3=150^\circ$，$AO=BO=CO=1.5$ m，不计杆重，试求各杆受力。

解 选 D 铰为分析对象，根据各杆为二力杆的特点，可画出 D 铰受力图如图(b)所示。诸力 $\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{S}_1$，$\boldsymbol{S}_2$ 和 $\boldsymbol{S}_3$ 在 D 构成空间汇交力系，且知 $T=P$。

根据几何角度的特点，选取如图所示的坐标系 $Oxyz$。在列写平衡方程之前，先具体分析各力与坐标轴的关系，以便决定采取哪种投影方式。

从题给尺寸条件，可知 $\boldsymbol{S}_1$，$\boldsymbol{S}_2$ 及 $\boldsymbol{S}_3$ 与坐标平面 Oxy 的夹角 φ，有



例图 1.3

$$\cos\varphi=\frac{1.5}{2.5}=\frac{3}{5},\quad \sin\varphi=\frac{4}{5}$$

此外，从题给的角度 θ_1，θ_2 及 θ_3 条件，可知各力在平面 Oxy 上的投影与 x 轴(或与 y 轴)间的夹角，故各个 $\boldsymbol{S}_i$ 力的投影应采用两次投影法计算。

现以列表形式给出 D 铰上各个力在三个坐标轴上的投影量：

$\boldsymbol{F}_i$	X_i	Y_i	Z_i
$\boldsymbol{T}$	0	0	$-P$
$\boldsymbol{S}_1$	$-S_1\cos\varphi\cdot\cos60^\circ$	$S_1\cos\varphi\cdot\sin60^\circ$	$S_1\sin\varphi$
$\boldsymbol{S}_2$	$S_2\cos\varphi$	0	$S_2\sin\varphi$
$\boldsymbol{S}_3$	0	$-S_3\cos\varphi$	$S_3\sin\varphi$

将表中各项按纵向相加，即得平衡方程为：

$$\sum X=0,\ -S_1\cos\varphi\cos60^\circ+S_2\cos\varphi=0 \qquad ①$$

$$\sum Y=0,\ S_1\cos\varphi\sin60^\circ-S_3\cos\varphi=0 \qquad ②$$

$$\sum Z=0,\ (S_1+S_2+S_3)\sin\varphi-P=0 \qquad ③$$

将①、②式代入③式后，可得

$$S_1\sin\varphi(1+\cos60^\circ+\sin60^\circ)-P=0$$

所以 $S_1=10.57\ \text{kN},\ S_2=5.28\ \text{kN},\ S_3=9.15\ \text{kN}$

故三脚架各杆受压力，AD，BD 及 CD 杆受力分别为 10.57 kN，5.28 kN 及 9.15 kN。

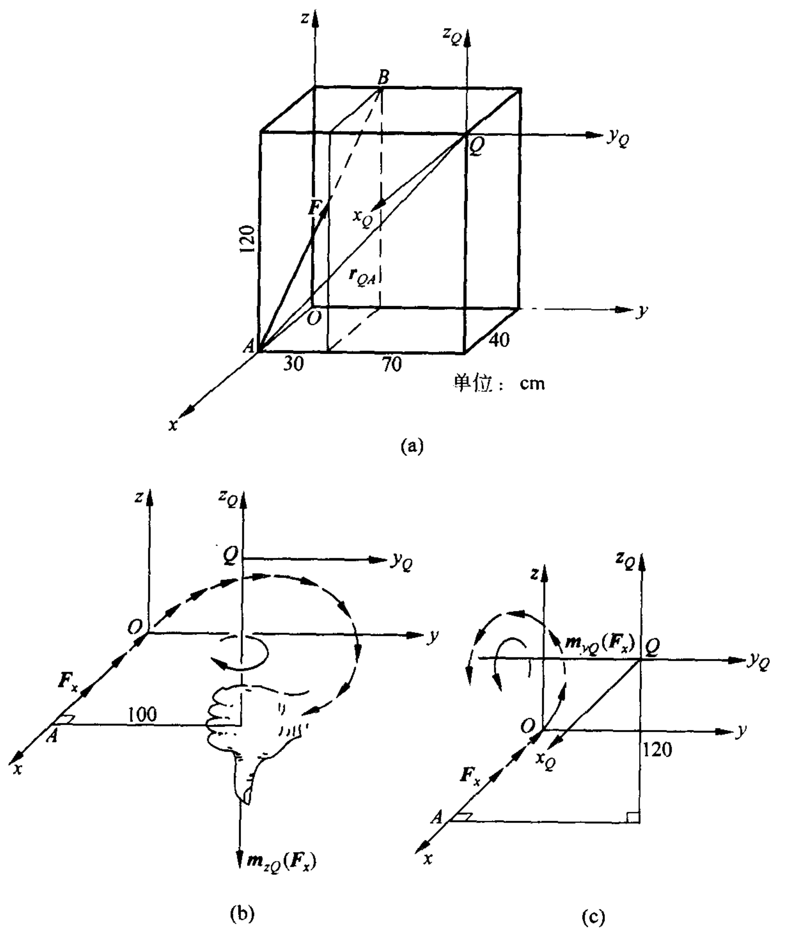
要点及讨论

(1) 为了能较明确地表示出分析对象所受的各个力在空间的方位，空间汇交力系问题的受力图，可以原结构图为基础，再画上分析对象所受的各力(以示意已解除约束)，不必像本例题那样取 D 铰的分离体单独另画受力图(b)。

(2) 空间汇交力系平衡问题，一般应用平衡的解析条件——平衡方程来解算未知力。为此，要选定恰当的坐标系。计算各力的投影时，如已得知各力与各坐标轴的夹角，就能直接投影计算；否则，可将力先向坐标面投影，然后，再向坐标轴投影——即运用两次投影法计算。从工程角度看，很少有给出各力与三个坐标轴夹角的条件，大多给出尺寸和几何角度关系等条件，比较适合应用两次投影法计算，读者应重视该计算方法。

(3) 采用列表方式写出各个力在各坐标轴上的投影量，可在列平衡方程时有序而不发生疏漏。读者可有选择地采用。

例 1.4　试计算力 $\boldsymbol{F}$ 对指定的 Q 点之矩及对过 Q 点的三个坐标轴之矩。已知 $|\boldsymbol{F}|=260\ \mathrm{N}$，$\boldsymbol{F}$ 的方位及 Q 点的坐标如例图 1.4(a)。



(b)　　(c)

例图　1.4

解 (1) 解法 1 按定义计算力 $\boldsymbol{F}$ 对 Q 点之矩，有

$$\boldsymbol{m}_Q(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r}_{QA} \times \boldsymbol{F}$$

为此，应先计算力 $\boldsymbol{F}$ 及矢量 $\boldsymbol{r}_{QA}$ 在坐标系 $Qx_Qy_Qz_Q$ 中的投影。

如果注意到图中的力 $\boldsymbol{F}$ 刚好处于一长方体之对角线的位置上，此长方体的三条棱边分别平行于三个坐标轴，它们的长度已知，分别是 40，30，120 cm，因而对角线长 130 cm，则可直接按棱边长度的比例来分解力 $\boldsymbol{F}$。三个投影量的大小应为 $|X|:|Y|:|Z| = \frac{|\boldsymbol{F}|}{130}(40:30:120)$，根据 $\boldsymbol{F}$ 的指向，可确定各投影量的正、负号，因而得到

$$\boldsymbol{F} = -80\boldsymbol{i} + 60\boldsymbol{j} + 240\boldsymbol{k}\ (\mathrm{N})$$

又

$$\boldsymbol{r}_{QA} = 0\boldsymbol{i} - 1\boldsymbol{j} - 1.2\boldsymbol{k}\ (\mathrm{m})$$

所以

$$\boldsymbol{m}_Q(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r}_{QA} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & -1 & -1.2 \\ -80 & 60 & 240 \end{vmatrix}$$

$$= -168\boldsymbol{i} + 96\boldsymbol{j} - 80\boldsymbol{k}\ (\mathrm{N \cdot m})$$

由此即可求得 $\boldsymbol{m}_Q(\boldsymbol{F})$ 的值及在该坐标系中的各方位角。同时由式(1.4)可知，力 $\boldsymbol{F}$ 对过 Q 点之三坐标轴的矩为

$$m_{xQ} = -168\ \mathrm{N \cdot m}$$
$$m_{yQ} = 96\ \mathrm{N \cdot m}$$
$$m_{zQ} = -80\ \mathrm{N \cdot m}$$

(2) 解法 2 也可先计算力对轴之矩。这时，应先将一确定方向、大小的力 $\boldsymbol{F}$ 沿选定坐标轴分解成 3 个分力，然后按右手法则计算各个分力对各坐标轴之矩，再将各力矩按各坐标轴分别相加，得该力对三坐标轴之矩，进而求得力对点之矩。

譬如，现将力 $\boldsymbol{F}$ 分解为：$\boldsymbol{F}_x = -80\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{F}_y = 60\boldsymbol{j}$ 及 $\boldsymbol{F}_z = 240\ \boldsymbol{k}$(N)。如图(b)所示，按右手法则计算力对轴之矩。用右手四指代表力的方向(图中代表 $\boldsymbol{F}_x$ 方向)，同时使手心朝着计算轴(图中朝着 z_Q 轴)，然后绕着该轴握成拳头，这时大拇指所指方向即为此力对该轴之矩的方向。凡力对轴之矩指向与坐标轴指向一致时为正，相反时则为负。力矩的大小则由轴至力作用线的垂直距离与力的大小相乘得到。所以，图(b)中表示了

$$m_{zQ}(\boldsymbol{F}_x) = -80 \times 1 = -80\ \mathrm{N \cdot m}$$

图(c) 中给出

$$m_{yQ}(\boldsymbol{F}_x) = 80 \times 1.2 = 96\ \mathrm{N \cdot m}$$
$$m_{xQ}(\boldsymbol{F}_x) = 0$$

类似地，可算得

$$m_{xQ}(\boldsymbol{F}_y) = 60 \times 1.2 = 72\ \mathrm{N \cdot m}, \qquad m_{yQ}(\boldsymbol{F}_y) = m_{zQ}(\boldsymbol{F}_y) = 0$$
$$m_{xQ}(\boldsymbol{F}_z) = -240 \times 1 = -240\ \mathrm{N \cdot m}, \qquad m_{yQ}(\boldsymbol{F}_z) = m_{zQ}(\boldsymbol{F}_z) = 0$$

按坐标轴相加，即得力 $\boldsymbol{F}$ 对各坐标轴之矩

$$m_{xQ}(\boldsymbol{F}) = 72 - 240 = -168 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$m_{yQ}(\boldsymbol{F}) = 96 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$m_{zQ}(\boldsymbol{F}) = -80 \text{ N} \cdot \text{m}$$

根据力对点之矩与力对轴之矩的关系式(1.4)，得

$$\boldsymbol{m}_Q(\boldsymbol{F}) = -168\boldsymbol{i} + 96\boldsymbol{j} - 80\boldsymbol{k} \ (\text{N} \cdot \text{m})$$

与前面解法一算得的结果完全一样。

从上面计算的过程可知，当一力与某轴相交或平行，即一力与某轴共面时，此力对该轴之矩为零。例如 $m_{xQ}(\boldsymbol{F}_x)=0$，还有 $m_{yQ}(\boldsymbol{F}_y)=0$，$m_{zQ}(\boldsymbol{F}_y)=0$，$m_{zQ}(\boldsymbol{F}_z)=0$，$m_{yQ}(\boldsymbol{F}_z)=0$。

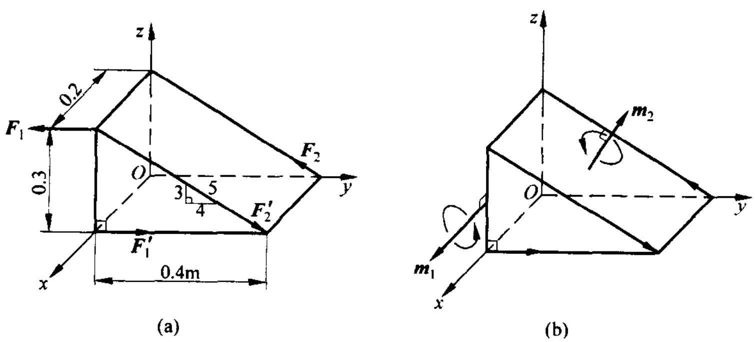
要点及讨论

(1) 力对点之矩和力对轴之矩是力学的重要概念，既要准确理解又要会熟练地计算；读者还应结合实际问题来理解力对轴之矩是使刚体绕该轴转动效应的度量。

(2) 在本题中，从不同的角度介绍了两种计算力对轴之矩的方法。后者是先将一力沿直角坐标轴分解后，分别计算各分力对各轴的力矩，然后再应用合力之矩定理，这样做，较贴近力对轴之矩的物理意义；前者则是从定义出发进行矢量积运算的，它更体现了概括性，直接反映出力对点之矩与力对通过该点的轴之矩间的关系。

(3) 结合本例题介绍了当力处在长方体对角线位置上，而长方体各棱边平行于坐标轴时，可按各棱边长度比来求各分力投影大小的方法，在工程上是较实用的一种方法，因为多数情况下，给出的是尺寸关系，故读者应予重视。

例 1.5　已知例图 1.5 所示直角三棱柱上作用力的条件为：$|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_1'|=200$ N，$|\boldsymbol{F}_2|=|\boldsymbol{F}_2'|=100$ N，试求它们的合成结果。



例图　1.5

解　显然，三棱柱上作用的是两个力偶，可分别用力偶矩矢量表为：

$$\boldsymbol{m}_1 = |\boldsymbol{F}_1| \cdot d_1\boldsymbol{i} = 60\,\boldsymbol{i}\ (\text{N} \cdot \text{m})$$

$$\boldsymbol{m}_2=\frac{3}{5}\mid \boldsymbol{F}_2\mid \cdot d_2\boldsymbol{j}+\frac{4}{5}\mid \boldsymbol{F}_2\mid \cdot d_2\boldsymbol{k}$$
$$=12\boldsymbol{j}+16\boldsymbol{k}\ (\mathrm{N\cdot m})$$

两力偶合成为一合力偶,其力偶矩为

$$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}_1+\boldsymbol{m}_2$$
$$=60\boldsymbol{i}+12\boldsymbol{j}+16\boldsymbol{k}\ (\mathrm{N\cdot m})$$

合力偶矩 $\boldsymbol{m}$ 的值为

$$\mid \boldsymbol{m}\mid=\sqrt{60^2+12^2+16^2}=63.25\ \mathrm{N\cdot m}$$

要点及讨论

(1) 要充分认识力偶矩矢量 $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}')$全面反映了力偶对刚体的作用效应,因而研究多个力偶的合成或力偶系的平衡,只要用力偶矩矢量进行运算即可;

(2) 求合力偶矩矢量时,一般只需求得其沿各坐标轴的分量和合力偶矩的值即可,有时可直接指出合力偶的作用平面之方位,较少求合力偶矩之各个方位角;

(3) 如果多个力偶作用于同一平面内,则只需用代数量进行运算。

例 1.6 例图 1.6(a)所示构架上作用有一力偶,已知力偶 $M=40\ \mathrm{N\cdot m}$,略去各构件的重量,试求 A,B,C,D 及 E 各处的约束力。

解 (1) 先对整体进行分析。A,B 两处有约束力,且知 $\boldsymbol{N}_B$ 垂直支承面,而构架上的主动载荷只有力偶 M,则 A 处约束力 $\boldsymbol{N}_A$ 必定与 $\boldsymbol{N}_B$ 形成力偶,使构架在两力偶作用下平衡,见图(b),故有

$$\sum m_i=0,\quad N_B\cdot AB\cdot\cos30^\circ-M=0$$

所以 $$N_A=N_B=121.55\ \mathrm{N}$$

(2) 欲求 C,D,E 处的约束力,应分析各构件的受力。注意到 DE 杆是二力杆,则可着重分析 CD 构件的受力。其上所受 $\boldsymbol{N}_D$ 沿 DE 连线方向,主动载荷只有力偶 M,故 C 处约束力 $\boldsymbol{N}_C$ 必定与 $\boldsymbol{N}_D$ 形成力偶,CD 件受力图如图(d)所示。且有

$$\sum m_i=0,\quad N_C\cdot CD\cdot\cos45^\circ-M=0$$

所以 $$N_D=N_C=\frac{M}{CD\cdot\cos45^\circ}=148.86\ \mathrm{N}$$

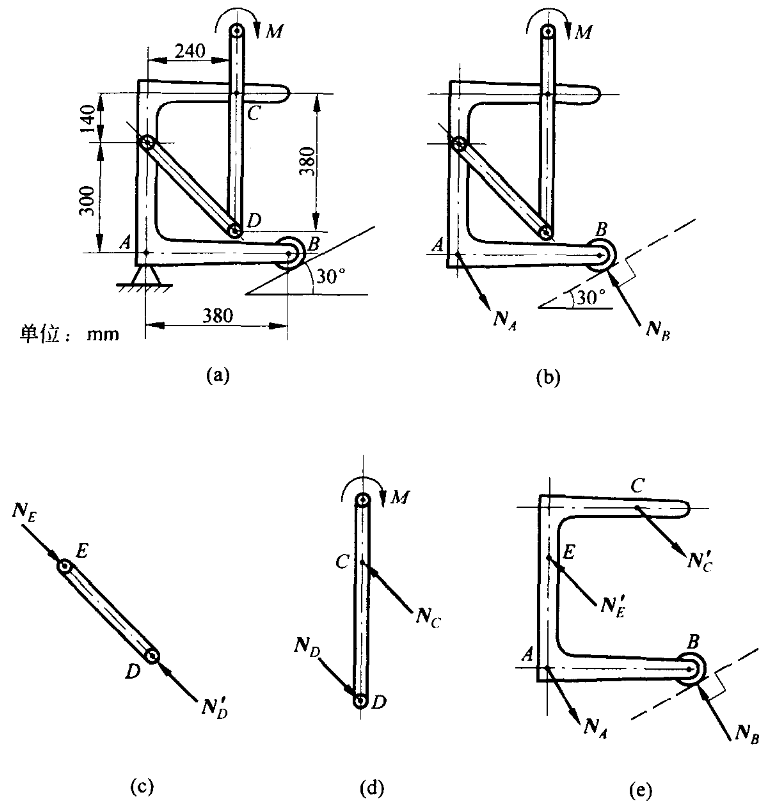
由 DE 杆受力可知

$$N_E=N_D=N_C=148.86\ \mathrm{N}$$

此外,在图(e)中画出了 $ABCE$ 构件受力图,可见它也是在两个力偶作用下平衡。

要点及讨论

(1) 一般地说,力偶平衡条件的应用比较简单,力偶矩的计算也无多少困难。解题重点仍在受力分析,并应能迅速地判断结构中有哪些构件的受力状况属于力偶系的平衡,这样,往往可以简化计算工作。



例图 1.6

（2）各研究对象在平面力偶系作用下平衡时，只有一个独立的平衡方程式，可求解一个未知量。在求解过程中，可得知力偶的两个组成力在任意轴上的投影均为零，这正是力偶的特征之一。

（3）从静力平衡的观点看，构件 CD 上作用的主动载荷力偶 M 可以在其上转移至任何位置，不会影响它的平衡状态及导致 $\boldsymbol{N}_C$、$\boldsymbol{N}_D$ 的变化。但从 CD 构件内部实际受载状态看（特别是在将来考虑选用材料时），不应将力偶作转移。类似地，就整体平衡说，主动的力偶 $\boldsymbol{M}$ 在构架上可以任意转移，不会影响它整体平衡，也不会改变约束力 $\boldsymbol{N}_B$ 和 $\boldsymbol{N}_A$；但是，力偶转移后，会改变构架内部各构件的受力状态。譬如，将力偶 M 转移至 $ABCE$ 构件上，则 DE 件和 CD 件均不受力了，且 $ABCE$ 构件的实际受力状态也改变了。所以，读者不应作这种转移。