

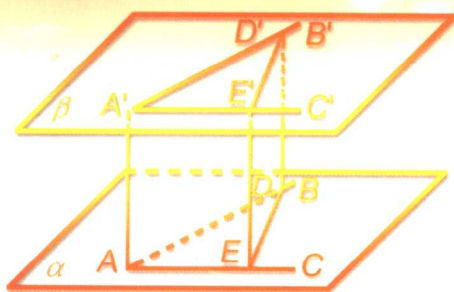
高中数学

空间直线和平面

主编 傅荣强

本册主编 刘贞彦

最新修订



龍門書局

www.Longmen.com.cn

空间直线和平面

最新修订



主 编 傅荣强

本册主编 刘贞彦

编 者 刘贞彦

常 青 韩丽云



龍門書局

北京

版权所有 翻印必究

举报电话:(010)64034160,13501151303(打假办)

邮购电话:(010)64034160

图书在版编目(CIP)数据

空间直线和平面/傅荣强主编;刘贞彦本册主编. —修订版. —
北京:龙门书局,2005

(龙门专题)

ISBN 7-80160-140-8

I. 空… II. ①傅…②刘… III. 几何课—中学—教学参考资料
IV. G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 081089 号

责任编辑:马建丽 韩安平/封面设计:朱 平

龙 门 书 局 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.longmen.com.cn>

北京人卫印刷厂 印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

2001 年 2 月第 一 版 开本:A5(890×1240)

2005 年 8 月第四次修订版 印张:8 3/4

2005 年 8 月第十二次印刷 字数:312 000

印数:290 001—320 000

定 价:11.50 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

参考书几乎是每一位学生在学习过程中必不可少的。如何发挥一本参考书的长效作用,使学生阅读后,能更透彻、迅速地明晰重点、难点,在掌握基本的解题思路和方法的基础上,举一反三、触类旁通,这是教参编者和读者共同关心的问题。这套《龙门专题》就是龙门书局本着以上原则组织编写的。它包括数学、物理、化学、语文、英语、地理、生物七个学科,共计 112 种。

本套书在栏目设置上,主要体现了循序渐进的特点。每本书内容分为两篇——“基础篇”和“综合应用篇”(高中为“3+X”综合应用篇)。“基础篇”中的每节又分为“知识点精析与应用”、“视野拓展”两个栏目。其中“知识点精析与应用”着眼于把基础知识讲透、讲细,帮助学生捋清知识脉络,牢固掌握知识点,为将成绩提高到一个新的层次奠定扎实的基础。“视野拓展”则是在牢固掌握基础知识的前提下,为使学生成绩“更上一层楼”而准备的。需要强调的是,这部分虽然名为“拓展”,但仍然立足于教材本身,主要针对教材中因受篇幅所限言之不详,但却是高(中)考必考内容的知识点(这类知识点,虽然不一定都很难,但却一直是学生在考试中最易丢分的内容),另外还包括了一些不易掌握、失分率较高的内容。纵观近年来高(中)考形势,综合题与应用题越来越多,试行“3+X”高考模式以后,这一趋势更加明显。“综合应用篇”正是为顺应这种形势而设,旨在提高学生的综合能力与应用能力,使学生面对纷繁多样的试题,能够随机应变,胸有成竹。

古人云:授人以鱼,只供一饭之需;授人以渔,则一生受用无穷。这也是我们编写这套书的宗旨。作为龙门书局最新推出的《龙门专题》,有以下几个特点:

1. 以“专”为先 本套书共计 112 种,你尽可以根据自己的需要从中选择最实用、最可获益的几种。因为每一种都是对某一个专题由浅入深、由表及里的诠释,读过一本后,可以说对这个专题的知识

就能够完全把握了。

2. 讲解细致完备 由于本套书是就某一专题进行集中、全面的剖析,对知识点的讲解自然更细致。一些问题及例题、习题后的特殊点评标识,能使学生对本专题的知识掌握起来难度更小,更易于理解和记忆。

3. 省时增效 由于“专题”内容集中,每一本书字数相对较少,学生可以有针对性地选择,以实现在较短时间里对某一整块知识学透、练透的愿望。

4. 局限性小 与教材“同步”与“不同步”相结合。“同步”是指教材中涉及的知识点本套书都涉及,并分别自成一册;“不同步”是指本套书不一定完全按教材的章节顺序编排,而是把一个知识块作为一个体系来加以归纳。如归纳高中立体几何中的知识为四个方面、六个问题,即“点、线、面、体”和“平行、垂直、成角、距离、面积、体积”。让学生真正掌握各个知识点间的相互联系,从而自然地连点成线,从“专题”中体味“万变不离其宗”的含义,以减小其随教材变动的局限性。

5. 主次分明 每种书的前面都列出了本部分内容近几年在高考中所占分数的比例,使学生能够根据自己的情况,权衡轻重,提高效率。

本套书的另一特点是充分体现“减负”的精神。“减负”的根本目的在于培养新一代有知识又有能力的复合型人才,它是实施素质教育的重要环节。就各科教学而言,只有提高教学质量,提高效率,才能真正达到减轻学生负担的目的。而本套书中每本书重点突出,讲、练到位,对于提高学生对某一专题学习的相对效率,大有裨益。这也是本书刻意追求的重点。

鉴于本书立意的新颖,编写难度很大,又受作者水平所限,书中难免有疏漏之处,敬请不吝指正。

编 者

2005年8月

编者的话

《龙门专题·高中数学》在面世近几年的时间里,以其传承经典、创新脱俗的写作风格,赢得了广大读者的一致称道。策划、作者、编辑、版务于其中呕心沥血、殚精竭虑,使得每一次修订后的《龙门专题·高中数学》年年更上新台阶。

本次《龙门专题·高中数学》修订版有以下特点:

一、知识讲解有广度有深度

“知识点精析与应用”栏目,覆盖了本阶段的全部内容,循序渐进,深入浅出,除了基本的讲解之外,还校正了一些思维上的偏差,有广度,有深度。

二、题目搭配有梯度有难度

书中例题与习题的选取,瞄准高考,从易到难,使潜心研读的读者能一步跃上一个台阶;同时本书又为学有余力的读者配置了一定数量的难题,尤其是创新脱俗的开放性试题。此外,本书配备例题、习题时,注意到联系已经学过的内容,使之形成上下贯通、前后衔接、左右协调、立体交叉的优良格局。

三、视野拓展有高度有尺度

“视野拓展”栏目,旨在学习方法、思维形式、解答策略等方面的拓展,对许多知识点实施了引入、扩充、推广,在力求高度的同时,又把握一定的尺度,使之既超过了高考试题的难度,又不偏离高考方向。

四、高考探索有精度有力度

“高考探索”栏目收集了最新的高考试题,一年一更新。作者精辟分析了试题产生的背景、形成过程乃至发展,并附高考探索训练题、精度高、力度大。近几年高考试题与书中例题、习题相似、相同的不乏其例,足见使用《龙门专题·高中数学》复习高考的广阔前景。

由于水平所限,书中还有缺点和不足,敬请广大读者批评指正。

编者

2005年8月

目 录

第一篇 基础篇	(1)
第一讲 平面	(3)
1.1 平面	(3)
1.2 平面的基本性质	(10)
1.3 水平放置的平面图形的直观图的画法	(23)
高考热点题型评析与探索	(31)
本讲测试题	(33)
第二讲 空间两条直线	(43)
2.1 两条直线的位置关系	(43)
2.2 两条直线的平行关系	(52)
2.3 两条异面直线所成的角	(60)
高考热点题型评析与探索	(73)
本讲测试题	(76)
第三讲 空间直线和平面	(85)
3.1 直线和平面的平行关系	(85)
3.2 直线和平面的垂直关系	(101)
3.3 斜线在平面内的射影,直线和平面所成的角, 三垂线定理	(117)
高考热点题型评析与探索	(140)
本讲测试题	(147)
第四讲 空间两个平面	(157)
4.1 两个平面的平行关系	(157)
4.2 二面角	(174)

4.3 两个平面的垂直关系	(211)
高考热点题型评析与探索	(243)
本讲测试题	(247)
第二篇 综合应用篇	(257)
一、空间两条直线的应用	(257)
二、空间直线和平面的应用	(259)
三、空间两个平面的应用	(262)
综合应用训练题	(269)

第一篇 基础篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科,简说研究“数”和“形”的学科.初等数学按其知识体系可划分为平面几何、代数、三角函数、解析几何、立体几何等五个分支.本书研究的空间直线和平面是立体几何的基础部分.

立体几何的本质是研究空间形体的位置关系和数量关系,并且有所侧重位置关系的讨论.

立体几何研究的主要对象可概述为“点,线,面,体”,即空间的点、直线、平面、简单几何体.

立体几何研究的主要任务可归纳为“平行,垂直,成角,距离,面积,体积”等六大类问题.即

平行:空间的两条直线、直线和平面、平面和平面在什么条件下平行?平行成立后,它们又具有什么样的性质.

垂直:讨论空间两条直线的相互垂直,空间直线和平面的相互垂直,空间平面和平面的相互垂直.

成角:两条异面直线所成的角,直线和平面所成的角,二面角.

距离:点与点、点与直线、点与平面,直线与直线、直线与平面,平面与平面的距离.

面积:简单几何体的侧面积.

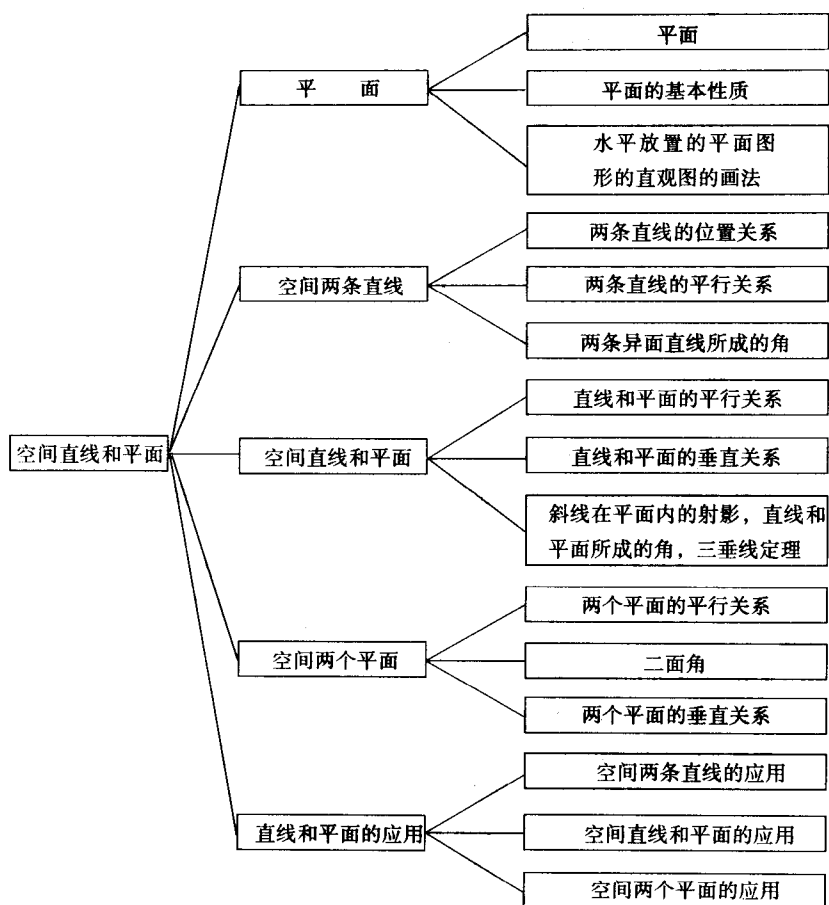
体积:简单几何体的体积.

立体几何研究过程中所采用的方法是公理法.其结构是

- 公理体系
- ①延续平面几何学说——首先承认只要被研究的对象在同一个平面内,无论平面在空间的位置如何,平面几何学说成立.
 - ②原始概念——原始的不定义的概念.如,点、直线、平面等.什么是点?点就是点,无法对它加以定义,因为它是源头.
 - ③定义——揭示某个概念的本质属性,以区别于其他概念的逻辑方法.如,异面直线的定义;直线与平面平行的定义等.
 - ④公理——作为一切论证的基础,而本身不加任何证明的事实.
 - ⑤定理——已被证明的正确命题.

本书为《空间直线和平面》,它上承平面几何,使其得到延续和发展;下启简单几何体,为其奠定基础.

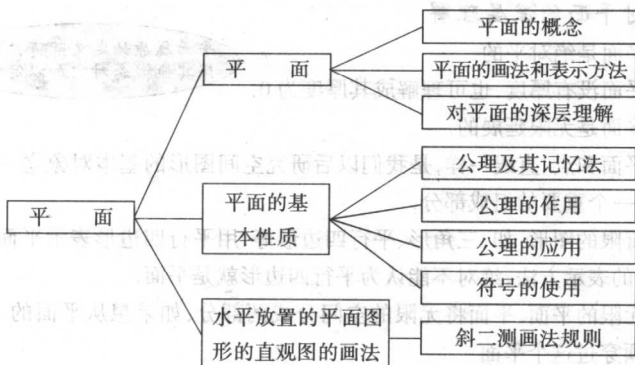
本书知识框图





第一讲 平面

本讲知识框图



1.1 平面



重点难点归纳

重点 ①理解平面的概念. ②会用符号语言、图形语言表示平面.

难点 对从实际生活中的平面抽象出立体几何中的平面的领悟.

本节需掌握的知识 平面的画法和平面的表示方法.

知识点精析与应用

【知识点精析】

1. 平面的概念

平面是一个描述而不定义、只需理解的最基本的原始概念. 立体几何里所说的平面是从生活中常见的桌子的表面、黑板面、平静的水面等中抽象出来的. 生活中的平面是人们直观感觉中的比较平且大小有限的具体模型, 而立体几何中的平面则是理想化的绝对的平且可以无限延展的空间图形.

2. 平面的画法和表示方法

在立体几何中,通常画平行四边形来表示水平放置的平面,平行四边形的锐角画成 45° ,横边画成等于邻边的 2 倍. 当一个平面的一部分被另一个平面遮住时,应把被遮部分的线段画成虚线或不画.

平面通常用一个希腊字母表示,如平面 α ,平面 β ,平面 γ 等. 也可用表示平行四边形的两个相对顶点的字母来表示,如平面 AC 等等.

3. 对平面的深层理解

(1) 平面是绝对平的.

平面属原始定义范畴,无法用其他概念对它加以定义

(2) 平面没有厚度,也可理解成其厚度为 0.

(3) 平面是无限延展的.

(4) 平面和点、直线一样,是我们以后研究空间图形的基本对象之一,也是空间图形的一个重要的组成部分.

(5) 有限的图形,如,三角形、平行四边形等. 用平行四边形表示平面,只是一种形式上的表示方法,绝对不能认为平行四边形就是平面.

(6) 无限的平面. 平面将无限的空间分成两部分,如果想从平面的一侧到另一侧,必须穿过这个平面.

(7) 平面可以看作空间的点的集合,它当然是一个无限集.

(8) 用希腊字母 α 、 β 、 γ 等表示平面时,在不会引起混淆的情况下,“平面”二字可以省略不写;但用拉丁字母表示平面,如:平面 AC,“平面”二字不可省略,甚至在一些复杂图形中为了区别起见,还要表示为平面 ABCD. 表示三角形所在的平面,一般将三个顶点的字母都写出来. 如,平面 ABC,平面 ABD 等等.

(9) 在平面几何中,凡是后引的辅助线都画成虚线. 立体几何则不然,凡是被平面遮住的线(简称暗线),都画成虚线;凡是不被遮住的线(简称明线)都画成实线. 无论是题中原有的还是后引的辅助线.

【解题方法指导】

【例 1】判断下列说法是否正确? 并说明理由.

(1) 平行四边形是一个平面;

剖析平面的概念,辨别实线与虚线

(2) 任何一个平面图形都是一个平面;

(3) 画空间图形,先画的线画成实线,后画的线画成虚线.

解 (1) 不正确. 平行四边形仅仅由空间中的四条线段组成,更谈不上无限延展.

点评 我们只不过是有限的、可看得到的平行四边形来表示无边际的平面,而不是说平行四边形就是平面. 随着知识的深化,我们将来可以说“平行四边形是一个平面图形”,即它是某一个平面内的几何图形.

(2)不正确.平面图形和平面是两个截然不同的概念;平面图形是有大小的,而平面是无限延展的. **切不可将平面图形与平面混为一谈**

(3)不正确.在空间图形中,能够看见的线画成实线,看不见的线画成虚线.实线、虚线与画线的先后顺序无关.

点评 画空间图形,线的“虚实”与线的由来之先后顺序无关,这是一个全新的观念.平面几何中的“先实后虚”,在立体几何中不可沿用. **平面画法的拓展**

[例 2] 图 1-1 中表示两个有公共点的平面,其中画法正确的是 ()

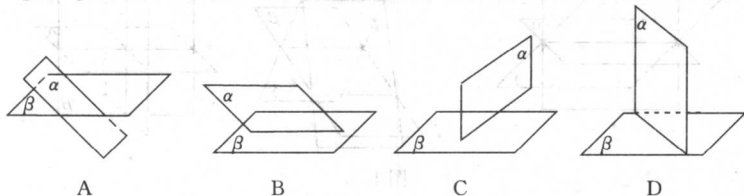


图 1-1

解 D 正确.

因为 A 中的两个平面没有按照画虚线的画法规则去画;同理答案 B、C 也不正确.

点评 由于高中阶段没有设立系统地“画法几何”学习课程,所以画立体图形的方法要靠平时课堂的积累.

[例 3] 分别画出满足下列条件的图形:

培养空间想像能力

(1)两个有公共点的平面;

(2)三个平面两两有公共点,画出两种情形即可.

解 (1)如图 1-2. (2)参看图 1-3.

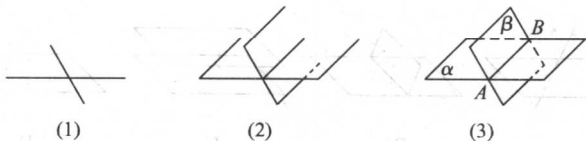


图 1-2

点评 画两个有公共点的平面要画出交线,交线把表示每个平面的平行四边形分成两个小的平行四边形,注意画好实虚线.

[例 4] 一个平面将空间分成 _____ 部分,两个平面将空间分成 _____ 部分,三个平面将空间分成 _____ 部分.

这是难点,结论需要记住

解 本题对平面在空间的位置分类讨论.

一个平面将空间分成两部分.

两个平面有公共点时将空间分成 4 部分;两个平面没有公共点时将空间分成 3 部分. 所以,两个平面将空间分成 3 部分或 4 部分.

三个平面没有公共点时将空间分成 4 部分;三个平面有公共点时分别将空间分成 6,7,8 部分. 详见图 1-3.

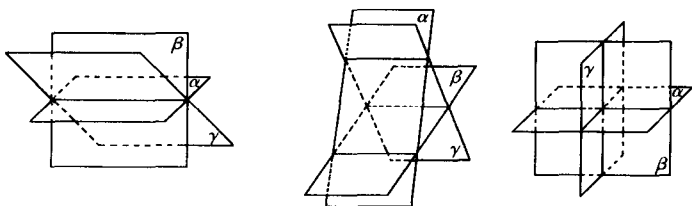


图 1-3

点评 先对两个平面在空间的位置分类讨论,再让第三个平面以不同的形式介入,这样设计分类讨论的程序,在研究空间图形位置关系时,要经常用到.

【基础训练题】

一、选择题

- 下列说法正确的是 ()
 - 镜面是平面
 - 一个平面长 10m, 宽 2m
 - 两个平面的面积是其中一个平面面积的 2 倍
 - 所有的平面都是无限延展的
- 图 1-4 中画法正确的是 ()

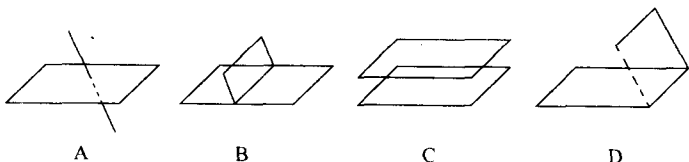


图 1-4

- 下列说法中表示平面的是 ()
 - 平静的水面
 - 玻璃黑板面
 - 桌子的面
 - 铅垂面
- 下列说法中错误的是 ()
 - 平面用一个小写希腊字母就可表示
 - 平面可用表示平面的平行四边形的对角顶点的两个拉丁字母表示

答: 称 C. 三角形 ABC 所在的平面不可写成平面 ABC . 中国从平面中画出. 飞机. 透明面 D. 一条直线和一个平面可能没有公共点.

二、填空题

5. 平面几何所讲的直线是 直线 延长的.

6. 立体几何所讲的平面是 无限.

7. 组成平面图形的点的集合是 A , 这个平面图形所在的平面记为点集 B , 那么 A 与 B 的关系是 $A \subseteq B$.

8. 平面内的两条直线可以把平面分成 2 或 3 部分.

三、解答题

9. 画出满足下列条件的直线和平面:

(1) 直线 a 穿过平面 α ;

(2) 直线 a 穿过两个有公共点的平面 α 和 β .

10. 凭想像画出三棱镜的直观图形.

学习立体几何, 一时一刻都离不开图形. 初学者要反复练习画图.

【答案与提示】

一、1. D (理解平面的定义可直接得出.) 2. A 3. D 4. C (三角形 ABC 所在的平面可以写成平面 ABC . 特别地, 在一些复杂的图形中, 这样的写法更确切、具体.)

二、5. 无限 6. 延展的 7. $A \subseteq B$ 8. 3 或 4 (当两条直线平行时, 分成 3 部分; 当两条直线相交时, 分成 4 部分.)

三、9. 参看图 1-5. 10. 参看图 1-6.

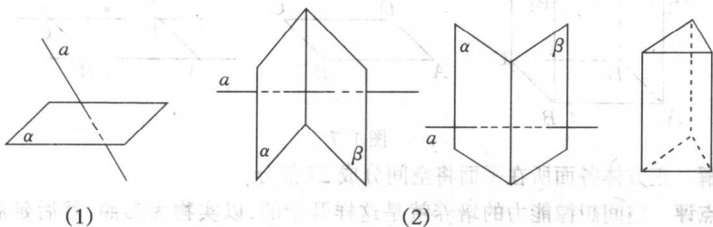


图 1-5

图 1-6

视野拓展

【释疑解难】

空间想像能力的形成始于对几何模型的观察.

本节是立体几何的开篇课, 对空间图形的研究就从这里开始, 可谓帷幕刚刚

拉开.在初中平面几何中,我们是以一个平面为背景,圈定在这个平面内研究各种几何图形的相对位置和数量关系.平面概念的介入,标志着我们研究空间图形的位置关系和数量关系进入了实质性阶段.这时的平面已经不再具有全集的地位,而是以空间对象的地位置于我们的讨论之中.为了直观、形象地表达空间对象的相互位置关系,平面又往往成为空间图形的位置关系的参照物.今后我们无论研究空间的两条直线还是研究空间的直线和平面,都要以平面为参照物去画图去分析和解决问题.由于平面的概念是从生活中抽象出来的,所以在研究有关平面问题时还离不开生活中的模型,如长方体,正方体等等.虽然它们的每一个面都是有限图形,但是这并不影响我们的研究和讨论,因为每个面无限延展的结果都是平面.初学者要善于观察这些几何体的表面特征,从中获得一些感性认识,逐渐培养自己的空间想像能力.

【典型例题导析】

【例5】 正方体各面所在平面将空间分成几部分? ← 本节难点

分析 如图1-7,若从整体考虑较难入手,不妨分层考虑,采取俯视图法.俯视平面 AB_1 、平面 BC_1 、平面 CD_1 、平面 DA_1 ,依次得 AB 、 BC 、 CD 、 DA .这时,正方体变成正方形 $ABCD$.再将正方形 $ABCD$ 延展为“#”字形,将空间分成9部分.两个互相平行的水平平面又将“#”字分成三层,因此正方体各面所在平面将空间分成27部分.

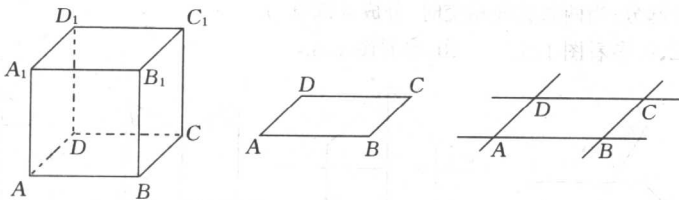


图 1-7

解 正方体各面所在平面将空间分成27部分.

点评 空间想像能力的培养就是这样开始的,以实物为参照,然后延展,归结到题目要求的意境中去.

【例6】 四个平面最多能将空间分成几部分?

分析 在掌握三个平面分空间问题的情况下,考虑第四个平面的放置,则易知将空间分成最多为15部分.

解 四个平面最多将空间分成15部分.由于三个平面最多将空间分成8部分(见例4).第四个平面放入后,最多能将七个空间部分分割成十四空间部分,而有一个空间部分没有被第四个平面分割.

【思维拓展训练题】

1. 把图 1-8 中所给图形补充完整,使它们均表示两个有公共点的平面.

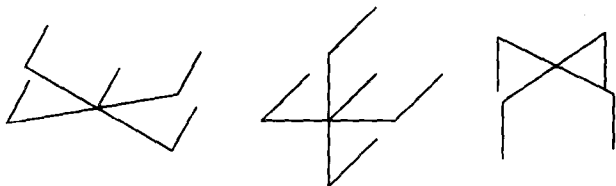


图 1-8

2. 一个西瓜切 3 刀,最多能切出几块? 如果切 4 刀呢?
3. 如果一条直线上有两个点在一个平面内,那么这条直线与这个平面的位置关系如何? 凭想像画出图形.
4. 如果两个平面有一个公共点,那么这两个平面的位置关系如何? 凭想像画图.
5. 如果两个平面没有公共点,那么这两个平面应是怎样的位置关系? 画出图形.
6. 空间的三个平面,可能没有公共直线,可能有一条公共直线,可能有两公共直线,可能有三条公共直线,画出图形.
7. 4 个平面两两相交于 6 条直线,围成一个几何体,画出图形.
8. 一条直线与一个平面没有公共点,画出图形.
9. 一条直线能在一个平面内吗? 为什么,如果能,画出图形.
10. 画出一个长方体的直观图形.

【答案与提示】

1. 如图 1-9.

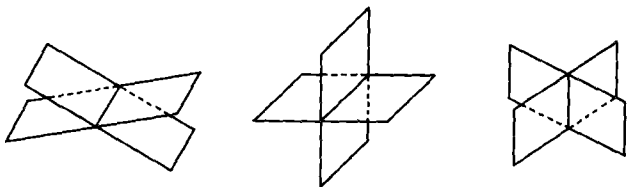


图 1-9

2. 一个西瓜切 3 刀,最多能切出 8 块,如果切 4 刀最多能切出 15 块.
3. 这条直线在平面内. 因为直线是直的,平面是平的,两点确定直线的位置,两点在平面内,就把直线确定到了平面内. 如图 1-10.

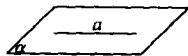


图 1-10

4. 由于平面是平的,又是无限延展的,两平面有一个公共点,它们必相交,且有一条公共直线,如图 1-11.