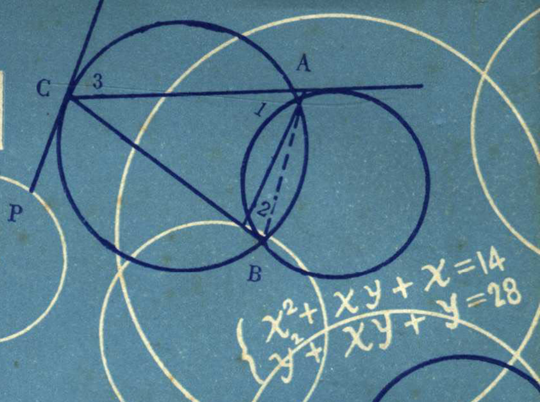
数理化基础知识

M



代 数

(一)

山东科学技术出版社

数理化基础知识

代　　数

（一）

烟台师专编写

山东科学技术出版社

一九八〇年·济南

内 容 提 要

本书是《数理化基础知识》中的一本，系统地介绍了有理数、无理数、实数、整式、分式、根式以及方程、不等式等方面的基础知识。书中介绍的内容，简明扼要，通俗易懂，联系实际，对重点、难点都做了较详细的说明，并附有较多的例题和习题，以提高广大读者分析问题和解决问题的能力。

本书可供中等业余学校作教材用，也可作为知识青年和干部的自学用书，还可供考大学的青年和在校学生学习参考。

数理化基础知识

代 数

(一)

烟台师专编写

*

山东科学技术出版社出版

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　9.25印张　189千字

1980年6月第1版　1980年6月第1次印刷

印数：1—115,000

书号 13195·27　定价 0.75 元

编 者 的 话

数学、物理、化学是重要的基础学科。它已经渗透到人们的全部实践活动。纵览宇宙，运算天体，探索粒子之微，揭示生命之谜，从高深抽象的科学理论，到人们丰富繁杂的日常生活无处不用数理化。今天，在向四化进军中，越来越显示出学好数学、物理、化学的重要作用。

从提高整个中华民族的科学文化水平出发，为配合业余教育的全面开展，满足广大读者自学的急切需要，特别是为了帮助考大学的青年和在校学生加深对课本知识的理解，提高分析问题和解决问题的能力，我们编写了这套《数理化基础知识》。其中，《代数》3册；《几何》、《三角》、《解析几何》、《微积分》各一册；《物理》4册；《化学》2册。

在编写过程中，我们根据成人和速成的特点，参照教育部现行中学教学大纲的内容，由浅入深，循序渐进，着重讲清数学、物理、化学的基本概念和基本知识，对每一章中的关键性问题都做了重点介绍，并重视了运算技巧的训练和分析总结解题规律。每册书都选有一定数量的综合性习题，在选习题时还注意了习题的典型性，以培养读者举一反三的能力。每章后有小结，难度大的习题有提示，每册书末有答案备查。

这套基础知识丛书，可供中等业余学校作教材用，也可作为知识青年和干部的自学用书，还可供考大学的青年和在校学生学习参考。

目　　录

第一章　实　数 …… 1
§1·1　有理数的概念 …… 1
§1·2　有理数的四则运算 …… 8
§1·3　有理数的乘方和开平方 …… 21
§1·4　实数的概念 …… 29
§1·5　实数的运算 …… 37
小　结 …… 42
复习题一 …… 43
第二章　代数式 …… 46
§2·1　代数式 …… 46
§2·2　整式的运算 …… 52
§2·3　多项式的因式分解 …… 68
§2·4　多项式因式分解范例 …… 78
§2·5　分式的运算 …… 82
§2·6　根　式 …… 92
小　结 …… 108
复习题二 …… 109
第三章　方　程 …… 113
§3·1　一元一次方程 …… 113
§3·2　一次方程组 …… 130
§3·3　一元二次方程 …… 153
§3·4　二元二次方程组 …… 196
小　结 …… 207

复习题三 ……………………………………………………208
第四章 不等式 ……………………………………………………215
§4·1 一元一次不等式 ……………………………………………215
§4·2 一元一次不等式组 …………………………………………222
§4·3 一元二次不等式 ……………………………………………227
§4·4 一元二次不等式组 …………………………………………232
§4·5 分式不等式 …………………………………………………234
§4·6 高次不等式 …………………………………………………237
§4·7 无理不等式 …………………………………………………240
§4·8 不等式的证明 ………………………………………………242
§4·9 含有绝对值符号的不等式的解法 …………………………246
小 结 ……………………………………………………………251
复习题四 …………………………………………………………253
总复习题 …………………………………………………………256
习题答案 …………………………………………………………266

第一章　实　　数

在掌握了自然数、零、分数的基本性质和运算法则以后，就可以开始学习有理数、无理数，从而形成实数的概念．现在，让我们先从有理数讲起吧．

§1·1　有理数的概念

1.　负数的产生

在生产活动和日常生活中，我们经常遇到一些具有相反意义的量．例如，某天最高温度是零上3度，最低温度是零下3度；某水库水位昨天上升4厘米，今天下降2厘米；某银行上午存入5万元，下午支出4万元等．对于这类具有相反意义的量，仅用以前学过的数是无法表示出来的．因此，必须引进新的数．

这种新的数必须既能表示量的大小，又能表示量的相反意义．我们把具有“零上”、“上升”、“存入”等各种意义的量，用带有符号“＋”（读作“正”）的数表示；把具有“零下”、“下降”、“支出”等各种意义的量，用带有符号“－”（读作“负”）的数表示．根据这一规定，凡是具有相反意义的量，就都可以表示出来了．例如，零上3°C记作＋3°C，读作正3°C，零下3°C记作－3°C，读作负3°C；上升4厘米记作＋4厘米，读作正4厘米，下降2厘米记作－2厘米，读作负2厘米；

存入 5 万元记作＋ 5 万元，读作正 5 万元，支出 4 万元记作－ 4 万元，读作负 4 万元．

我们把＋ 3 、＋ 4 、＋ 5 这样的数，叫做**正数**．正数也就是在算术中已经学过的数．为了简单起见，正数前面的符号“＋”可以省略不写．把－ 3 、－ 2 、－ 4 这样的数，叫做**负数**．

正数和负数前面的符号“＋”与“－”，是用来指出一个数的性质，因此，我们把正号“＋”和负号“－”叫做**性质符号**，而加、减运算中的加号“＋”和减号“－”，是用来指出应该进行什么运算，所以叫做**运算符号**．这两者应该区别清楚．

到现在为止，我们有了三种数：正数、负数和零．正数包括正整数、正分数（有限或无限循环的正小数是正分数的另一种表达形式），负数包括负整数、负分数（有限或无限循环的负小数是负分数的另一种表达形式）．零既不是正数，也不是负数．

我们把正数、负数和零统称为**有理数**．

此外，我们应当注意，零同其他有理数一样，也能表示确定的量．例如，水结冰的温度0°C就是一个确定的温度．

在有理数范围内，各种数之间的从属关系，可以列表如下：

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{正数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{正分数(正的有限小数或无限循环小数)}\end{cases}\\ \text{零}\\ \text{负数}\begin{cases}\text{负整数}\\ \text{负分数(负的有限小数或无限循环小数)}\end{cases}\end{cases}$$

2． 数 轴

数和点都是数学研究的对象．从许多实际问题中，可以看

出数与点是密切相关的．例如，直尺上的刻度（点），表示长度的大小（数）；称杆上的刻度（点），表示物体的重量（数）等等．从这些实际问题中，可以抽象出数轴的概念．

任意画一条水平方向的直线，规定向右的方向为正方向（它的相反方向为负方向）．在此直线上规定一点，表示数零，这点叫做原点．并且规定一条线段的长作为单位长度．

我们把规定了正方向、原点和单位长度的一条直线叫做**数轴**．

如图1·1，从原点 O 开始向右，在数轴上按照单位长度逐次截取，所截得的点分别表示正整数＋1，＋2，＋3，

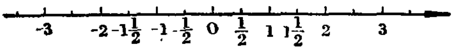


图 1·1

……如果从原点 O 开始向右逐次截取单位长度的一半，或单位长度的三分之一、三分之二等等，所截得的点分别表示正分数$+\frac{1}{2}$，$+\frac{1}{3}$，$+\frac{2}{3}$，……如果从原点 O 开始向左用单位长度逐次截取，所截得的点就分别表示负整数－1，－2，－3，……如果用单位长度的一半、三分之一……从原点向左截取，截得的点就表示负分数$-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{3}$……由此可知，对于任何一个确定的有理数，在数轴上都可以找到代表这个数的点．

3．绝对值

在解决实际问题时，有时只需考虑量的大小，而不用去考虑量的方向．例如，有两个人同时乘火车，一个人是向东

乘80公里，一个人是向西乘80公里，在计算他们的票价时，都按照80公里的距离来计算就可以了，不用去考虑他们是向东还是向西的方向问题．但是，在需要明确火车行驶的方向时，我们就必须把火车向东行驶的80公里记作＋80公里，向西行驶的80公里记作－80公里．在数学上，80这个数就叫做正数＋80或负数－80的绝对值．记作

$$|+80|=80,\quad |-80|=80.$$

在数轴上，＋80和－80是用两个点来表示的，＋80用原点 O 右方的点 A_1 表示，－80用原点 O 左方的点 A_2 表示．显然，＋80、－80的绝对值就是 A_1、A_2 到原点 O 的距离．A_1 和 A_2 两点与原点 O 的距离相等，它们分别位于原点 O 的右、左两个方向上．由这样的两点所表示的数叫做**相反数**（图1·2）．

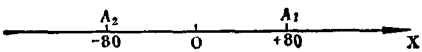


图 1·2

根据以上讨论，可以定义数的**绝对值**如下：

正数的绝对值，就是这个正数本身，负数的绝对值，就是这个负数的相反的数，零的绝对值仍是零．

两个相反的数的绝对值相等．

习 题 1

1． 下列各数中，哪些是整数？哪些是分数？哪些是正数？哪些是负数？哪些是有理数？

$$6,\ -\frac{1}{2},\ -37,\ 0,\ -1,\ 0.16,\ 3\frac{1}{2}.$$

2．说明下列各个句子的意义：

（1）飞机先上升8,000米，又上升了－5,000米；

（2）修路机先前进50米，又前进了－50米；

（3）李同志在月初存入银行15元，又在月中旬存入－8元；

（4）甲和乙两个篮球队进行比赛，第一次甲队胜8分，第二次甲队胜－12分．

3．某厂根据计划每月应当生产机器500台，如果一月份生产了530台；二月份生产了496台，三月份生产了585台，试用有理数写出每月超额完成计划的台数．

4．整数与自然数有什么区别？有理数中有没有既不是自然数，也不是正数，也不是负数的数？如果有的话，是什么数．

5．在数轴上离开原点4个长度单位的点有几个？离开原点三分之一长度单位的点有几个？它们各代表什么数？

6．在数轴上表示出下列各数的相反的数：

-6，-4.5，3.1，0，4，$\frac{2}{3}$．

7．是不是所有有理数的绝对值都是正数？为什么？

8．计算下列各题：

（1）$|-12|+|-25|+|20|$；　（2）$|-12|-|-25|+|20|$；

（3）$|-12|\times\left|-2\frac{1}{2}\right|$；　（4）$|-7.5|-|-4.5|$；

（5）$|-1.5|\times|-2.1|$；　（6）$|-225|\div|-1.5|$．

9．写出$+5$与-5的绝对值．

10．写出绝对值等于$3\frac{1}{2}$的数．

4．有理数大小的比较

在算术中，整数与整数、整数与分数、分数与分数可以比较大小．现在数的范围已经扩展到有理数，就必须进一步考虑怎样比较正数与负数、负数与负数以及零与负数的大

小.

温度计上，上面的刻度表示的温度一定高于下面的刻度表示的温度（图1·3）.例如，零上12°C高于零下5°C；零下1°C高于零下9°C；零度高于零下3°C等等．前面讲过，一般用正数表示零上的度数，用负数表示零下的度数，用0表示零度，这样，就可以得到下面的结果：

$12°C > -5°C$， $-1°C > -9°C$，

$0°C > -3°C$.

如果把温度计看作是一条数轴，就可以用数轴上的对应点表示－9，－5，－3，－1，0，＋12这些有理数.

由这个具体问题，可以归纳出比较有理数大小的规定：

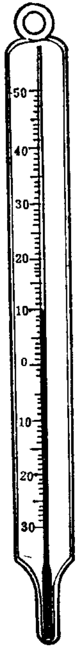


图 1·3

在数轴上，把向右的方向作为正方向，则数轴上右边的点所表示的有理数大于左边的点所表示的有理数；反过来说，左边的点所表示的有理数小于右边的点所表示的有理数(图1·4).

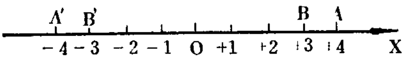


图 1·4

由此可以得到**比较有理数大小的法则**：

（1）任意正数都大于任意负数；

（2）任意正数都大于零，任意负数都小于零；

（3）任意两个正数中，绝对值较大的数大于绝对值较小的数；

(4) 任意两个负数中，绝对值较小的数大于绝对值较大的数.

运用以上法则比较有理数的大小时，其结果可以用大于号“>”（读作“大于”）或小于号“<”（读作“小于”）表示出来，如$-\frac{5}{4}<-\frac{1}{3}$，$2>-5$等.

【例1】 比较0.11，0.01，$-\frac{1}{3}$，0，$-\frac{3}{4}$的大小，并按照由小到大的顺序用“<”号连接起来.

解 ∵ 0.11与0.01是正数，∴ $0.01<0.11$；

又∵ $\left|-\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$，$\left|-\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$，

并且$\frac{9}{12}>\frac{4}{12}$，∴ $\left|-\frac{3}{4}\right|>\left|-\frac{1}{3}\right|$，$-\frac{3}{4}<-\frac{1}{3}$.

因此，$-\frac{3}{4}<-\frac{1}{3}<0<0.01<0.11$.

习 题 2

1. 在数轴上表示下列各数，并将它们从小到大用“<”号连接起来：

1，-2，-4，$\frac{5}{2}$，4，$-\frac{1}{4}$，4.5，$-5\frac{1}{2}$，0.

2. 写出所有适合于下列条件的数，并且把它们记在数轴上：

(1) 小于6的正整数；

(2) 大于-5的负整数；

(3) 绝对值小于4的整数.

3. 比较下列每对数的大小：

(1) $|-4|$和-4；　　(2) $|-8|$和$|-7|$；

(3) $\left|3\frac{1}{2}\right|$和$\left|-3\frac{1}{2}\right|$；　　(4) $-|-2|$和$-(-2)$；

(5) $-\left(-7\frac{2}{5}\right)$和$\left|+7\frac{3}{5}\right|$；　(6) $-(+3.25)$和$-|-3.245|$.

4．水结冰的温度是0°C，海水结冰的温度是 −2.5°C，酒精冻结的温度是−117.3°C，氨冻结的温度是−77.7°C．试比较这四个温度的高低，并把它们从低到高用“<”号连接起来．

5．比较下列各组数的大小：

(1) 0，$-\frac{1}{2}$，−0.75（用“<”号连接起来）；

(2) $2\frac{1}{2}$，$2\frac{3}{4}$，$-4\frac{1}{5}$（用“<”号连接起来）．

§1·2　有理数的四则运算

有理数的四则运算与算术中的四则运算是不同的．下面，将通过对具体事例的分析，按照加、减、乘、除的顺序，归纳出有理数的四则运算法则．

1．有理数的加、减运算

已知某一天气温变化的情况是：

(1) 气温上升了2°C后，又上升了3°C，结果共上升了5°C（图1·5）．列成算式

$$(+2)+(+3)=+5.$$

(2) 气温下降了2°C后，又下降了3°C，结果共下降了5°C（图1·6）．列成算式

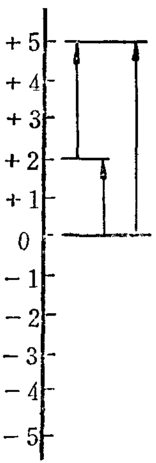


图　1·5

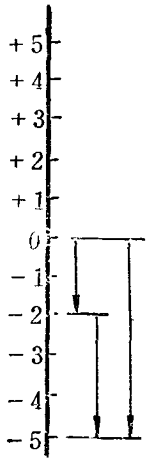


图　1·6

$(-2)+(-3)$

$=-5$.

(3) 气温上升了2°C后，又下降了3°C，结果下降了1°C（图1·7）. 列成算式

$(+2)+(-3)$

$=-1$.

(4) 气温下降了2°C后，又上升了3°C，结果上升了1°C（图1·8）. 列成算式

$(-2)+(+3)$

$=+1$.

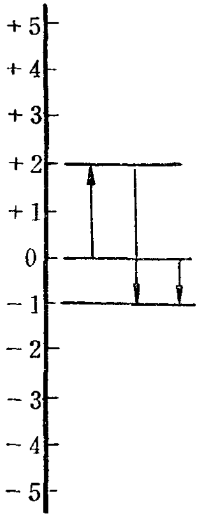


图 1·7

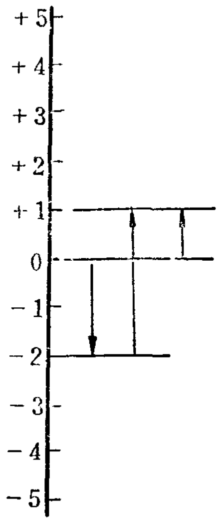


图 1·8

(5) 气温上升了3°C后，又下降了3°C，结果又回到了原来的气温. 列成算式

$$(+3)+(-3)=0.$$

综合以上几种情况，可得出**有理数的加法法则**：

(1) 符号相同的两个数的和，它的符号与这两个数的符号相同；它的绝对值等于这两个数的绝对值的和.

(2) 符号相反的两个数的和，它的符号与绝对值较大的数的符号相同（特殊情况，两个相反的数的和等于0）；它的绝对值等于这两个绝对值的差.

(3) 零与任何一个数的和等于这个数. 当然，零与零的和仍然等于零.

【例1】 计算：

(1) $(-9)+(-13)$;　　　　(2) $0.4+(-0.7)$;

(3) $\left(-4\frac{1}{2}\right)+13\frac{1}{2}$;　　　　(4) $0.864+\left(-\frac{11}{16}\right)$.

解 (1) $(-9)+(-13)=-(9+13)=-22$;

(2) $0.4+(-0.7)=-(0.7-0.4)=-0.3$;

(3) $\left(-4\frac{1}{2}\right)+13\frac{1}{2}=13\frac{1}{2}-4\frac{1}{2}=9$;

(4) $0.864+\left(-\frac{11}{16}\right)=0.864+(-0.6875)=0.1765$.

在算术里，曾经讲到过加法交换律和加法结合律．所谓加法交换律，就是任意两个加数，交换它们的位置，它们的和不变；而加法结合律就是，如果有三个数相加，先把前面两个加数相加，再加上第三个加数，与先把后面两个数相加，再加上第一个数，其结果相同．对于有理数的加法来说，交换律与结合律也是成立的．利用交换律与结合律，常常可以使计算得到简化．

【例2】 计算：$5\frac{3}{4}+\left(-4\frac{1}{4}\right)+3\frac{1}{7}+\left(-2\frac{1}{3}\right)$

$$+\left(-2\frac{1}{7}\right)+\left(-5\frac{2}{3}\right).$$

解 把算式中同分母的分数通过交换律、结合律放在一起，得

$$原式=\left[5\frac{3}{4}+\left(-4\frac{1}{4}\right)\right]+\left[-5\frac{2}{3}+\left(-2\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$+\left[3\frac{1}{7}+\left(-2\frac{1}{7}\right)\right]=1\frac{2}{4}+(-8)+1$$

$=-5\frac{1}{2}$.

【例 3】 某钢厂在质量检查中，统计了15垛钢板中合格的片数是：

152，150，147，146，153，154，159，143，151，145，156，149，157，148，144．用简便方法计算合格钢板的总片数．

解 每垛以150片作为标准．把152记作150＋2，把147记作150＋(－3)等等，则总的片数是

$$150\times15+\{2+0+(-3)+(-4)+3+4+9+(-7)+1+(-5)+6+(-1)+7+(-2)+(-6)\}$$

$$=150\times15+4=2254.$$

答：合格钢片共有2254片．

有理数的减法是有理数加法的逆运算（与算术中的减法相同）．也就是说，我们把已知两个有理数的和（被减数）及其中的一个加数（减数），求另一个加数的运算叫做减法．而求得的另一个加数叫做差．例如：

由$(+5)+(+8)=+13$可以得到

$$(+13)-(+5)=+8,$$

将这一算式与$(+13)+(-5)=+8$

相比较，得$(+13)-(+5)=(+13)+(-5)$．

又由$(-4)+(+11)=+7$可以得到

$$(+7)-(-4)=+11,$$

将这一算式与$(+7)+(+4)=+11$

相比较，得$(+7)-(-4)=(+7)+(+4)$．