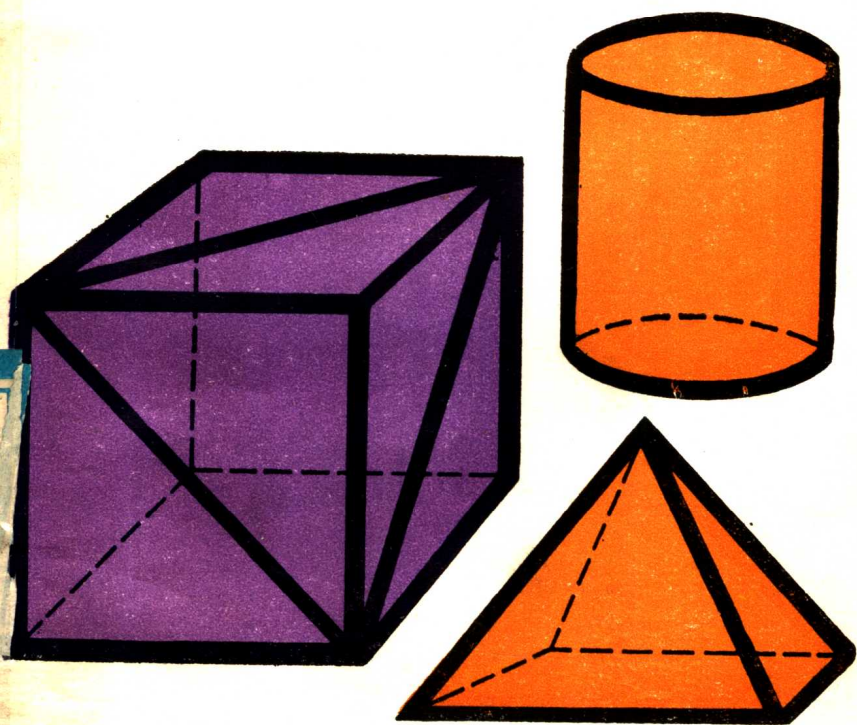


中学理科学学习指导丛书

高一立体几何

辅导与练习



北京市海淀区教师进修学校主编 重庆出版社



中学理科学习指导丛书

高一立体几何辅导与练习

北京市海淀区教师进修学校主编

重 庆 出 版 社

一九八四年·重庆

编 者

北京市立新学校	任光辉
北京市工业学院附中	关民乐
北京市海淀区教师进修学校	张士充
责任编辑	夏树人

高一立体几何辅导与练习

重 庆 出 版 社 出 版 (重庆李子坝正街102号)
辽 宁 人 民 出 版 社 重 印
辽 宁 省 新 华 书 店 发 行
沈 阳 新 华 印 刷 厂 印 刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 4 字数 85 千
1984年7月第一版 1984年8月沈阳第一次印刷
印数: 1—212,000

书号: 7114·219 定价: 0.35 元

前 言

长期以来，我们感到学生迫切需要一种能帮助他们学好功课的课外读物；家长希望有一种能督促和检查自己孩子学习的材料；教师欢迎出版一种能帮助自己辅导学生的书籍。为了解决这种问题，我们组织一些有教学经验的教师编写了这套丛书。

通过实践，我们认识到中学数学的学习和练习应做到以下几点：

(1) 只有把知识的结构分析清楚时，知识才易于学生理解、记忆和运用，并从而掌握知识的整体；

(2) 打好基础，是学生学好全部知识的前提。在基础知识中，重点和难点掌握不好，是有些学生学习不好的原因之一；

(3) 引导学生对所学过的那些主要题型做到心中有数，同时又掌握各级题型的解题规律，是帮助学生消化知识、提高解题能力的有效途径；

(4) 知识必须通过不断地复习、检查，才能逐步深化、巩固；

(5) 对学习较好的学生来说，在学好基础知识的前提下，要不断提高他们综合运用知识，以及把知识向深、广两个方面进行适当引伸的能力，这不但是可以的，而且是应该的。

基于以上认识，本书在编写时，各章都包含以下几部分：

(1) 结构分析：有些章分析比较简单，可以在学习开始时看；有些则分析较深入，可以在学完全章后再看。

(2) 重点和难点分析：说明重点内容的重要性在哪里，特别是如何通过它们掌握全章内容；说明难点之所以难的原因，特别是通过解决难点能学到哪些思考方法，解题技巧，促进哪些能力的增长。

(3) 各级题型：配以典型的例题，并说明解题规律。

(4) 习题和自我检查题：在每单元之后，配备知识面尽量全、有一定综合性、用以练习和检查本单元学习的一套题目，以帮助学生了解自己学习后的收获与存在的问题。

(5) 启发与体会：着重介绍教师的经验和体会，教科书上一般不讲思路、观点、方法等，以及适当启发学生对所学知识作更深入的思考。

本书尽量做到体现以上各项中的要求，紧密配合教材，但又不重复教材内容。但是，限于编者水平，未必都能做到，且不免出现错误或不妥之处，我们诚恳地希望读者给予批评和指正。

北京市海淀区教师进修学校

1984年1月

目 录

引言	(1)
第一章 直线和平面	(2)
一、结构分析	(2)
二、重点、难点分析	(6)
1. 平面	(6)
2. 空间两条直线	(8)
3. 空间直线和平面	(12)
4. 空间两个平面	(18)
三、各级题型	(23)
练习题	(38)
自我检查题	(43)
四、启发与体会	(49)
发挥“题型”的作用, 提高解题能力	(49)
第二章 多面体和旋转体	(53)
一、结构分析	(53)
二、重点、难点分析	(54)
三、各级题型	(79)
练习题	(97)
自我检查题	(106)
四、启发与体会	(112)

引 言

我们在日常生活和学习的过程中，总离不开几何图形。这些几何图形大体可以分为两种：一种图形上的点都在同一个平面内，如三角形、圆、……，我们把这种图形叫做平面图形；一种图形上的点不全在同一个平面内，如桌子、铅笔、书……，我们把这种图形叫做空间图形，或叫做立体图形。也就是说，平面图形是由同一平面内的点、线组合而成的，而空间图形则是由不全在同一平面内的点、线、面组合而成的。

在初中的平面几何中，我们研究了一些平面图形（如平行线、三角形、四边形、圆）的性质、形状、大小、位置关系及其应用。在立体几何中，我们将研究某些空间图形的性质、形状、大小、位置关系及其应用。

本书分为两大部分，第一部分内容包括平面、空间两条直线、空间直线和平面、空间两个平面，主要研究平面的基本性质、直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系。第二部分内容包括多面体和旋转体及其表面积、多面体和旋转体的体积，主要研究柱体（棱柱和圆柱）、锥体（棱锥和圆锥）、台体（棱台和圆台）、球体等简单几何体的概念、性质及其表面积和体积的计算。其中第一部分内容是研究第二部分内容的理论基础，所以学好第一部分内容是学好本书内容的关键。

第一章 直线和平面

一、结构分析

本章主要研究平面和直线，其中平面的概念及其性质是研究空间图形性质的基础，也是将空间图形的问题转化为平面图形的问题的重要依据。在此基础上，分别研究了直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系及有关的性质和判定方法。本章内容的结构可见表1-1。

1. 平面的基本性质及其作用可见表1-2。
2. 空间两条直线的位置关系可见表1-3。
3. 空间直线和平面的位置关系可见表1-4。
4. 空间两个平面的位置关系可见表1-5。
5. 直线与平面以及平面与平面的平行和垂直的判定定理及性质定理可见表1-6。

[说明]：(1)：“异面直线”，应理解为不能含于任何一个平面的两直线，而不是在两个平面内的两直线。

(2)贯穿全章的思维训练，是空间想象中的推理思维训练；以培养把空间问题化到平面问题来理解和处理的能力为主，同时也注意在平面内表现空间问题的能力。

表 1-1 各项内容间的联系 结合进行的思维训练

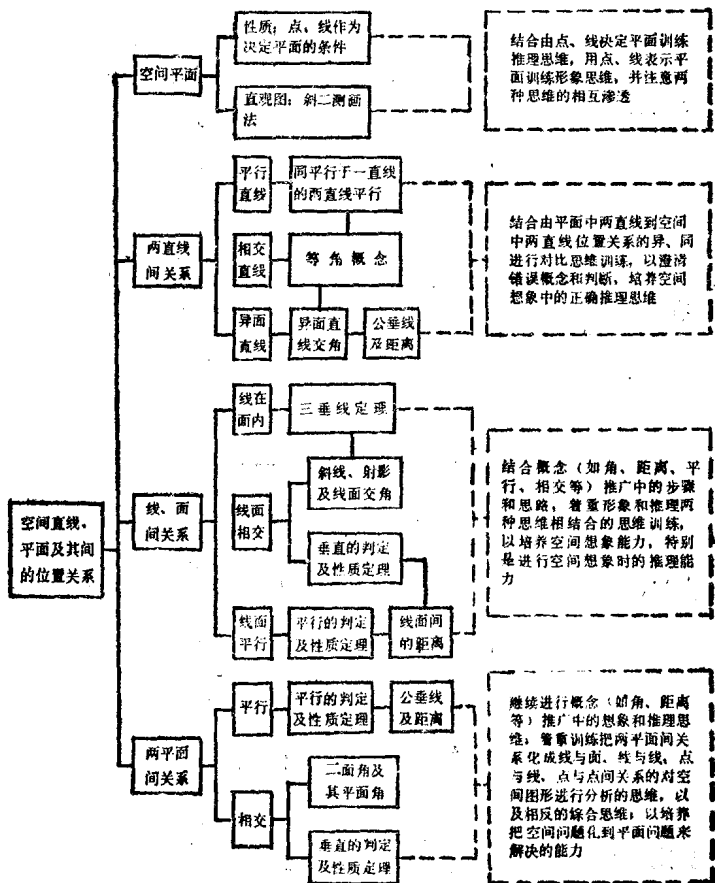


表1-2

平面的基本性质和作用

基 本 性 质	作 用
公理1. 如果一条直线上的两个点在一个平面内, 那么这条直线上所有的点都在这个平面内.	判定直线是否在平面内的依据.
公理2. 如果两个平面有一个公共点, 那么它们相交于过这个点的一条直线.	判定两个平面相交于一条直线及确定交线的位置的依据.
公理3. 经过不在同一直线上的三点, 有且只有一个平面. 推论1.2.3 (内容略)	确定平面的位置以及判定两个平面重合的依据.

表1-3

空间中两条直线的位置关系

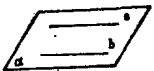
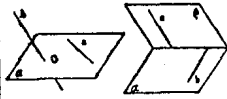
位置关系	图 示	表示方法	公共点个数
两直线共面	两直线相交 	$a \cap b = A$	一个
	两直线平行 	$a \parallel b$	无
两直线不在同一平面内		a, b 是异面直线	无

表1-4 空间直线和平面的位置关系

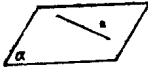
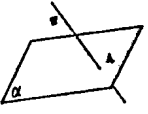
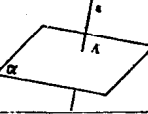
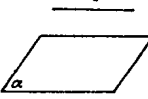
位置关系			图 示	表示方法	公共点个数
直线在平面内				$a \subset \alpha$ $(a \cap \alpha = a)$	无穷多个
直线不在平面内	直线与平面相交	斜 交		$a \cap \alpha = A$ 且 a 不垂直 α	一 个
		垂直相交		$a \perp \alpha$, $a \cap \alpha = A$	一 个
	直线与平面平行			$a \parallel \alpha$	无

表1-5 空间两平面的位置关系

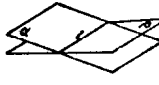
位置关系		图 示	表示方法	公共点个数
两平面平行			$\alpha \parallel \beta$ 或 $\alpha \cap \beta = \phi$	无
两平面相交	斜 交		$\alpha \cap \beta = l$ 且 α 不垂直 β	无穷多个
	垂直相交		$\alpha \perp \beta$ 且 $\alpha \cap \beta = l$	无穷多个

表1-6 直线、平面间的平行和垂直的判定定理和性质定理

位置关系	判定定理	性质定理
直线和平面平行	如果平面外的一条直线和这个平面内的一条直线平行, 那么这条直线和这个平面平行.	如果一条直线和一个平面平行, 经过这条直线的平面和这个平面相交, 那么这条直线就和交线平行.
直线和平面垂直	如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直, 那么这条直线就垂直于这个平面.	如果两条直线同垂直于一个平面, 那么这两条直线平行.
平面和平面平行	如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面, 那么这两个平面平行.	如果两个平行平面分别和第三个平面相交, 那么它们的交线平行.
平面和平面垂直	如果一个平面经过另一个平面的一条垂线, 那么这两个平面垂直.	如果两个平面互相垂直, 那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

二、重点、难点分析

1. 平面

(1) 平面的概念 平面是不定义的最基本的概念, 通过对玻璃窗、黑板面、桌子面……的观察很容易得出平面的形象. 但在学习过程中要着重强调我们所见到的“平面”, 只是数学里所说的“平面”的一部分, 而数学里所说的“平面”则是无限延展的.

可以通过以下几个方面来理解“平面”的概念:

1) 数学上的平面把整个空间分成两部分, 若想从其中

的一部分到达另一部分，必须穿过这个平面。

2) 通过对公理 1 的学习，加深对平面的无限延展性的理解，即“在这样的面上任选两点，过这两点所作的直线上所有的点都在这个平面上”，这样的面就是平面。同时，因为选取的两个点具有任意性，而且直线是可以无限延伸的，所以平面具有无限延展性。

3) 在学习平面的直观图的画法时，应当明确我们所画的平行四边形是表示一个无限延展的平面所在的位置。正是由于这个原因，才可以依据需要把平行四边形扩展或缩小，才可以用三角形、圆、以及其他的平面图形表示平面所在的位置。

(2) 平面的基本性质 平面的基本性质是研究空间图形性质的理论基础，是本章的重点内容，其中公理 1 是判定直线是否在平面内的依据，公理 2 是判定两个平面交于一条直线以及确定直线的位置的依据，公理 3 及其推论是确定平面的位置以及判定两个平面重合的依据。

1) “有且只有一个”的含义可以分开来理解，“有一个”是说明“存在”，“只有一个”说明“唯一”，所以“有且只有一个”也可以说成“存在并且唯一”。有的书里所说的“确定一个”和“有且只有一个”也是同一个意思。

2) 在证明公理 3 的三个推论的过程中，应当注意强调“有且只有一个平面”。下面说明怎样证明这三个推论。

① 如图 1-1， A 是直线 a 外的一点，在 a 上任取 B 、 C 两点，过不共线的三点 A 、 B 、 C 有一个平面 α 。

因为 B 、 C 在平面 α 以内，所以直线 a

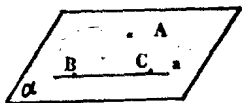


图 1-1

在平面 α 内, 即平面 α 是经过直线 a 和点 A 的平面。

因为过点 A 和直线 a 的平面一定经过 A 、 B 、 C , 又因为 A 、 B 、 C 不在同一直线上, 所以过 A 、 B 、 C 的平面只有一个, 即过点 A 和直线 a 的平面只有一个。

② 如图 1-2, 设 $a \cap b = A$, 且 $B \in a$, $C \in b$, 则过 A 、 B 、 C 有且只有一个平面 α , 因为 A 、 B 均在 α 内, 所以 a 在 α 内, 同理 b 在 α 内, 这就说明过 a 、 b 有一个平面 α 。

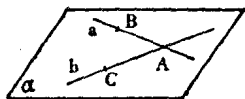


图 1-2

如果过 a 、 b 还有一个平面 β , 则 A 、 B 、 C 三点均在 β 上, 于是平面 β 是过不在同一直线上的三点 A 、 B 、 C 的平面, 由公理 3 可知平面 β 就是平面 α , 所以过两条相交直线 a 、 b 有且只有一个平面。

③ 如图 1-3, 因为 $a \parallel b$, 由平行线的定义可知, 过 a 、 b 有一个平面 α 。

如果过 a 、 b 还有一个平面 β , 那么在 a 上的一个点 A 既在 a 上, 又在 β 上, 从而得出过直线 b 和 b 外一点 A 有

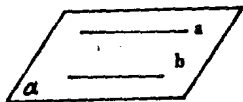


图 1-3

两平面的结论, 但这与推论 1 相矛盾, 所以过 a 、 b 不可能有第二个平面 β , 即过两条平行直线有且只有一个平面。

2. 空间两条直线

空间两条直线的位置关系是进一步研究直线和平面、平面和平面的位置关系的基础。

(1) 异面直线的概念 由于空间想象能力的水平不高, 往往想象不出异面直线是什么样子, 或者画不出图来,

再加上异面直线这一概念容易和分别处于两个平面内的两条直线相混淆，所以异面直线的概念是学习中的难点。

在学习这一概念时应注意对实物的观察，例如对跳高架上的横杆与竖直的电线杆的位置关系的观察，发现它们位置关系的特点是既不平行，也不相交，象这样的两条直线不可能同时处于某一个平面内。把具有这种特点的两条直线叫“不同在任何一个平面内的两条直线”，也就是异面直线。

“不同在任何一个平面内的两条直线”与“分别在某两个平面内的两条直线”的含义是有根本区别的。“不同在任何一个平面内的两条直线”是说不可能找到一个同时包含这两条直线的平面，而“分别在某两个平面内的两条直线”，并不能确定这两条直线一定不可能在同一平面内。如图1-4，虽然 a 、 b 分别在 α 、 β 内，因为 $a \parallel b$ ，过 a 、 b 可以作一个新的平面 γ ，使 a 、 b 在同一平面 γ 内。

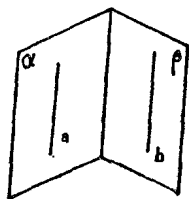


图 1-4

(2) 在画异面直线时，为了显示出 a 、 b 两条异面直线具有既不平行又不相交的特点，可以画成如图1-5那样。

从图1-5可以看出，直线 a 在平面 α 内，直线 b 与平面 α 交于 B ，且 $B \notin a$ 。下面我们证明利用这种画法，可以保证直线 a 、 b 是不同在任何一个平面内的两条直线。

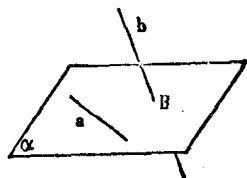


图 1-5

已知：如图1-6， $a \subset \alpha$ ， $A, B \in b$ ，且 $B \in \alpha$ ， $B \notin a$ ， A

$\notin \alpha$.

求证：直线 a 、 b 是异面直线。

证明：假设直线 a 、 b 在同一平面 β 内，则直线 a 与点 B 都在平面 β 内。

因直线 a 与点 B 又都在平面 α 内，又因过直线 a 与直线 a 外一点 B ，有且只有一个平面，所以平面 β 与平面 α 重合，即直线 a 、 b 均在平面 α 内。

于是得到 $A \in \alpha$ ，但这与已知 $A \notin \alpha$ 内相矛盾。

$\therefore$ 直线 a 、 b 不能同在一个平面 β 内，即直线 a 、 b 是异面直线。

在现行教材中把上述命题用黑体字给出，即“平面内一点与平面外一点的连线，和平面内不经过该点的直线是异面直线。”也就是说，这一命题可以作为判定两条直线是异面直线的判定定理。有了这个定理，使得在画两条直线成为异面直线时，有了可靠的理论根据。

例如，有三条直线，每两条直线都不同在任何平面内。试画出这三条直线。

解：如图1-7所示，平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = A_1B_2$ ，

$\therefore A_1A_2 \subset$ 平面 α ， $B_1B_2 \cap$ 平面 $\alpha = B_2$ ，且 $B_2 \notin A_1A_2$ ，

$\therefore A_1A_2$ 和 B_1B_2 是异面直线。

$\therefore A_1A_2 \subset$ 平面 α ， $C_1C_2 \cap$ 平面 $\alpha = C_1$ ，且 $C_1 \notin A_1A_2$ ，

$\therefore A_1A_2$ 和 C_1C_2 是异面直线。

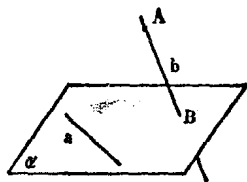


图 1-6

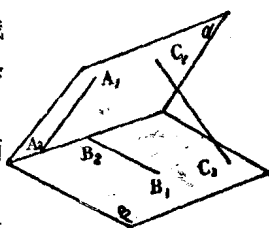


图 1-7

$\because B_1B_2 \subset \text{平面}\beta, C_1C_2 \cap \text{平面}\beta = C_2, \text{且} C_2 \notin B_1B_2,$
 $\therefore B_1B_2 \text{和} C_1C_2 \text{是异面直线.}$

$\therefore$ 直线 A_1A_2 、 B_1B_2 、 C_1C_2 中，每两条直线都不同在任何平面内。

(3) 公理 4 是说明把平行线的传递性推广到空间也能成立。它是可以证明的，因为证明过程较繁，所以现行教材中把平行线的这一重要性质当作公理使用，应当记熟、会用。

(4) 等角定理 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等。

证明“等角定理”的关键是“全等三角形的对应角相等”，而能够作出全等三角形的条件是公理 4。

(5) 两条异面直线所成的角

如图 1-8，直线 a 、 b 是异面直线，经过空间任意一点 O ，分别引直线 $a' \parallel a, b' \parallel b$ ，我们把直线 a' 和 b' 所成的锐角（或直角）叫做异面直线 a 和 b 所成的角。如果两条异面直线所成的角是直角，我们就说这两条异面直线互相垂直。

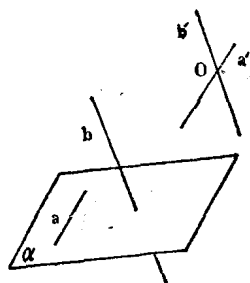


图 1-8

两条异面直线所成的角的概念，是研究空间两条直线垂直、直线和平面垂直、三垂线定理的基础。

在了解了异面直线所成的角的定义之后，应当运用“等角定理”说明这样定义异面直线所成的角不仅是存在的，而且还是唯一的。也就是说，异面直线所成角的大小只由异面