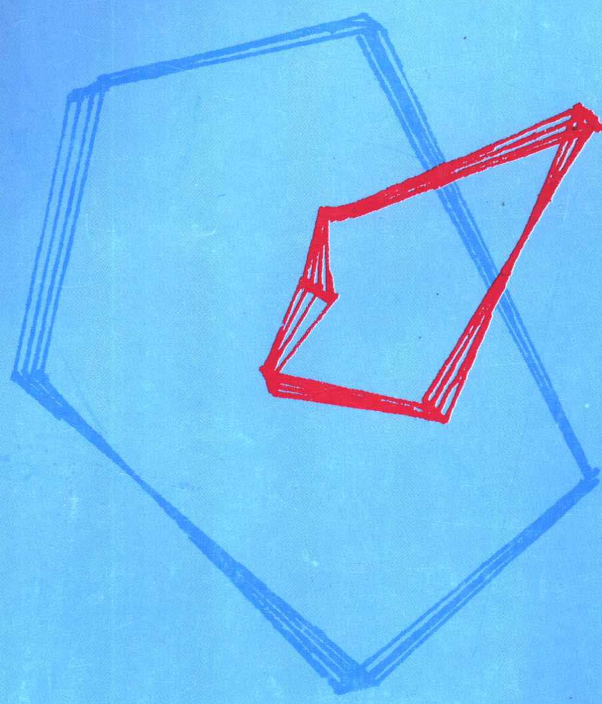
高等学校教材

大学物理实验

赵万霖　戚小平 主编



华南理工大学出版社

高等学校教材

大学物理实验

赵万霖　戚小平 主编

华南理工大学出版社
·广州·

内容简介

本书根据《高等工业学校物理实验课程教学基本要求》,针对普通院校的特点与教学条件,在南昌大学多年使用的自编实验教材的基础上,总结和吸收历年来的教学经验和其他教材的优点修改编写而成。全书内容包括绪论(第一章)和28个实验。28个实验按力学和热学(第二章)、电磁学(第三章)、光学和近代物理(第四章)分为三章。内容着重于基础实验,书后附有部分常用物理常数。

本书为高等工业院校本科各专业的物理实验教材基础部分,可作为工科本、专科物理教学实验教材或供成人教育、函授大学、职工大学使用。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理实验/赵万霖,戚小平主编. —广州:华南理工大学出版社,1999.7
ISBN 7-5623-1452-7

Ⅰ. 大…
Ⅱ. ①赵… ②戚…
Ⅲ. 物理-实验
Ⅳ. O4-33

华南理工大学出版社出版发行
(广州五山 邮编 510640)
责任编辑 孙 莉
各地新华书店经销
华南理工大学印刷厂印装
*
1999年7月第1版 1999年7月第1次印刷
开本:787×1092 1/16 印张:13 字数:300千
印数:1—5 000册
定价:18.90元

前　言

本书根据《高等工业学校物理实验课程教学基本要求》，结合普通院校的实际教学情况和仪器设备状况而编写。全书内容包括绪论(第一章)和28个实验。28个实验按力学和热学(第二章)、电磁学(第三章)、光学和近代物理(第四章)分为三章。

为了更好地适应社会主义现代化对人才素质的要求，本书以着重培养大学生严谨的科学态度为目的，初步掌握科学的实验方法，锻炼实验技能和加深对物理理论的理解。在编写本书时，以南昌大学多年使用的自编物理实验教材为基础，吸收其他教材的优点，兼顾本、专科通用。选材注重于基本内容，同时注意体系性和适当提高扩充。本书的特点有：

1. 所选28个实验中，大多数实验内容为各校通用，且适用于专科和成人教育使用。

2. 常用基本仪器均分述于二、三、四章各部分实验之前，各实验所用主要仪器则在各实验中介绍。

3. 各实验的原理、方法和步骤等的介绍力求详简适度而易懂，并配有预习思考题和分析讨论题，以利培养学生独立分析问题和解决问题的能力。

4. 本书选用了少量难度较大的实验作为提高和扩充的内容，以供因材施教。

5. 鉴于目前正推广使用不确定度表示实验结果的方法，本书在绪论中作了必要的阐述，并提供了选择性的过渡方法，以便灵活掌握。

本书由赵万霖、戚小平主编，参加编写的有：赵万霖(第一章绪论及全书初审)，戚小平(第四章实验20、实验21及帮助统稿工作)，胡萍、陈淑文(第二章力学和热学实验)，钱小霞(第三章电磁学实验)，刘崧、邹春华(第四章的光学实验部分)，杨淑芬、欧阳红(第四章的近代物理实验部分)。

本书由王鸣教授主审。第四章近代物理实验由李菊芳副教授审阅，第三章电磁学实验由曾金根副教授审阅。

在本书的编写过程中得到了南昌大学物理实验教学小组全体同志的大力协助，参阅了兄弟院校的有关教材，在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限，疏漏之处恳请读者批评指正。

编　者

1999年2月6日

目　　录

第一章 绪 论

一、物理实验课程的地位、作用和任务

物理实验课已成为我国高校工科专业的一门独立的必修基础课程，它和物理学理论课教学具有同等重要的地位。两者既有深刻的内在联系和配合，又有各自的任务和作用。

本课程是对工科大学生进行系统的实验方法和实验技能训练的开端，也是对学生进行科学实验训练的重要基础。本课程应在中学物理实验的基础上，按照循序渐进的原则，指导学生学习物理实验知识、方法和技术，使学生初步掌握实验的主要程序与基本方法，为后继课程的学习和今后的工作奠定良好的实验基础。

本课程的具体任务：

1. 通过对实验现象的观察、分析和对物理量的测量，学习物理实验知识，并加深对物理学原理的理解。

2. 培养和提高学生的科学实验能力，其中包括：

(1) 独自阅读实验教材或资料，作好实验前的准备；

(2) 借助于教材或仪器说明书正确使用常用仪器；

(3) 运用物理学理论对实验现象进行初步分析判断；

(4) 正确记录和处理实验数据，绘制曲线，说明实验结果，撰写合格的实验报告；

(5) 完成简单的设计性实验。

3. 培养与提高学生的科学实验素养。要求学生具有理论联系实际和实事求是的科学作风，严肃认真的工作态度，主动研究的探索精神和遵守纪律、爱护公共财物的优良品德。

以上三项任务是不能由物理学理论课程代替完成的。

应当指出，对于工程技术人员来说，只有既具备较为深广的理论知识又有足够的现代科学实验能力，才能适应科学技术飞速发展的需要，担负起建设社会主义祖国的重任。

二、物理实验课程的基本教学程序

物理实验课一般按三个阶段进行。

1. 实验前的预习

学生进入实验室做实验之前必须认真阅读实验教材，理解实验的基本原理，以便能够抓住实验的关键，控制实验过程，及时、迅速、准确地测得实验数据。通过预习，还要了解仪器的工作原理和用法。要写好预习报告，否则不准做实验。预习报告的内容为：

(1) 目的要求　说明所做实验的目的和学习要求。

(2) 实验原理　写出本实验中获得实验结果所依据的主要公式，并说明公式中各物理量的意义、单位和公式适用的条件及测量方法。必要时应画出所需的原理图（如电路图、光路

图或装置系统示意图等)。

(3) 所用仪器　列出本实验所用的主要仪器(应对其结构、原理及性能有初步的了解)。

(4) 数据表格　画好记录各项实验数据的表格(应了解相应的实验步骤)。在条件允许的情况下,课外开放实验室,使学生能对照仪器仔细阅读有关资料,进一步熟悉仪器使用方法和理解实验原理,以便能更加主动地独立地做好实验。

2. 课堂实验

学生应按时进入实验室,交实验预习报告,按分组就位,熟悉实验条件,并在教师的指导下(或独立地)进一步明确实验的有关原理、方法、步骤及注意事项。然后检查仪器、材料是否完好、齐备,筹划仪器的布局和操作的分工(当有合作者时),再根据实验要求正确地将有关仪器组成所需的测试系统。经检查确保无误(需经教师认可),便可按步骤进行实验操作。

做实验时,要正确地调试仪器,仔细观察和分析现象,控制过程,测量有关物理量。要根据仪器的精度和实验条件正确运用有效数字,及时如实地记录测量数据,防止差错或遗漏。

测取数据时必须十分认真、仔细。一要保证数据的真实性,二要保证应有的精确度。当对测量结果不满意时,应分析原因,改善条件,重新测量;不允许无根据地修改实验数据。测量结果的优劣将影响实验的成败。

两人合作时,要合理分工,适当轮流,配合得当,协调一致,共同达到实验要求;切忌一人消极或一人包办。

实验完毕,应将所测得的数据交给教师审阅。经教师认可后,再细心收拾仪器,恢复整洁,保证不留事故隐患,然后才能离开实验室。

3. 写实验报告

实验报告是对实验过程及其结果的全面总结,要用简明的形式将实验结果完整而又真实地表达出来。实验报告要用统一规格的纸张书写(可加附页),必须各自独立地及时完成。要做到文字通顺、表述明确、字迹端正、图表规范、结果正确和讨论认真。好的实验报告应作为研究资料保存。

完整的实验报告内容通常包括下列几个部分:实验名称、目的要求、实验条件(主要仪器设备)、实验原理、数据表格、数据处理与结果表述、误差分析、问题讨论。

三、测量及数据处理

1. 测量与误差

(1) 测量

在物理实验中,要以不同方式对各种物理量进行测量。通常按测量方式把测量分为直接测量和间接测量。所谓直接测量,就是在一定条件下利用一定的仪器将被测的量与同类量的标准单位进行比较,直接得出它的量值,例如用米尺量长度,用天平称质量,用伏特计测电压等;而间接测量则是指被测量的量值要用相关的直接测量量值通过公式运算间接地获得,例如用单摆测重力加速度。

(2) 误差

如果测量对象本身不变,那么对于一个被测的物理量,客观上存在一个真实的量值,称为真实值或真值。实际上,不管使用多么精密的仪器,测量出来的只是真值的近似值。测量值 $\tilde{x}$ 和真值 x 之间总存在差异。其差 $(\tilde{x}-x)$ 称为误差或绝对误差,记为 Δx。用公式表示为

$$\Delta x = \tilde{x} - x \neq 0 \tag{1-1}$$

2. 误差的分类

按误差的基本性质和特点，可把误差分为三大类：过失误差、系统误差和偶然误差。正常情况下只有后两类误差。

(1) 过失误差(又叫粗差)

过失误差是由于测量者在测量过程中操作、读数、运算和记录等方面的差错而造成的误差。其特点是：它使得测量结果大大地偏离真实值(即误差“粗大”)，并且使得数据的结构显著地偏离正常规律。由于这类误差是与人的过失相联系的，故实验者应加强责任心，做到充分准备(如预习)，熟悉步骤，集中精力，认真正确地完成实验测量的全过程，尽力避免出现差错；一旦出现差错而又未及时发现，就会造成个别数据的异常取值。处理数据时应按一定的原则判别取舍量值，以排除粗差。粗差严重或难以判别时，实验要重做。

(2) 系统误差

在相同条件下多次测量一个量时，若每次的测量值总是比真值偏大或偏小一个固定的量值，或者按一定的规律变化，具有这种特点的误差就称为系统误差。仪器的缺陷、个人的习惯、公式和测量方法的不完善等都会引起这种误差。系统误差不能通过在相同条件下重复测量而发现；往往是通过在不同条件下对同一量的测量结果进行比较或利用已有知识对有关因素进行分析才能发现。

为了尽可能消除系统误差，在设计实验时应加以周密的考虑。若无法消除，则应设法抵偿或修正(具体方法将在各实验项目中有针对性地介绍)。

(3) 偶然误差(又叫随机误差)

在相同条件下多次测量同一个量时，误差的绝对值时大时小，符号时正时负，不可预定而随机出现者，称为偶然误差。它是由于实验条件和环境因素的微小变化、测量者的生理分辨能力及操作熟练程度等多方面的影响而产生的。这些大量微小变化因素的不定组合，使偶然误差显得毫无规律性。但在相同条件下发生的大量同类随机事件却具有一定的统计规律性。偶然误差通常遵循“正态分布”(即“高斯分布”)规律。

如果以误差 Δx 为横坐标，以误差出现的概率密度(即相应的测量值出现的概率密度)$P(x)$ 为纵坐标，则多次测量结果的偶然误差概率密度可用图 1-1 所示的正态分布曲线表示。不难看出偶然误差有如下特点：

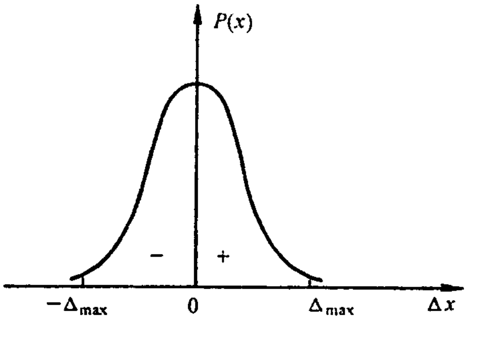


图 1-1 误差正态分布曲线

①误差的绝对值不会超过某一最大值 Δ_{max} ——具有有界性。

②绝对值小的误差出现的概率大，而绝对值大的误差出现的概率小——具有单峰性。

③绝对值相同的正、负误差出现的概率相等——具有对称性。

④误差的算术平均值随着测量次数的无限增加而趋于零——具有抵偿性。

由此可见，偶然误差虽因不可预知而无法避免，但却可以通过多次测量，利用其统计规律性而达到互相抵偿，因而能找到真值的最佳近似值(又叫最佳值或最近真值)。

在一般情况下，实验测量的系统误差和偶然误差是同时存在的。有时系统误差突出，有时偶然误差突出，而且有时两者难以严格区分。这就要求我们对每一个实验作具体的误差分析，并采取有效而方便的方法进行数据处理。在评估测量结果的优劣时，通常把偶然误差小的评为精密度高，把系统误差小的评为准确度高，而把这两种误差都小的评为精确度高。

3. 直接测量中偶然误差的估计

(1) 多次测量的算术平均值

设在相同条件下对某一物理量进行了 n 次独立的直接测量，所得 n 个测量值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，则其算术平均值为

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n \tag{1-2}$$

若无系统误差，则由偶然误差特点可证：当 $n \to \infty$ 时，$\bar{x}$ 与真值 x 趋于重合；当 n 为有限次数时，$\bar{x}$ 则为根据 n 次测量数据所得的最佳值。

(2) 多次测量结果的偶然误差

在多次测量时，各次测量值不同，误差也就不同。如何表示其测量的误差呢？这里有两个问题：一是如何说明这一列多次测量值的分散性(或精密度)；另一是如何估计所得平均值 $\bar{x}$ 的误差范围(或准确度)。

在一般情况下，真值无法确切知道，误差也就无法算出。因此，当可忽略系统误差时，常以算术平均值 $\bar{x}$ 代替真值；相应地以测量值 x_i 与平均值 $\bar{x}$ 之差(即所谓“残差”或“偏差”)代替各次测量的误差，即

$$\delta x_i = x_i - \bar{x} \approx x_i - x = \Delta x_i$$

很明显，基于偶然误差的对称性和抵偿性，各次偏差的直接平均值总为零或者接近于零(当有舍入误差时)，即

$$\overline{\delta x_i} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) / n = 0$$

它不能说明测量的精密度。因此，为了说明测量的精密度就要避免正负偏差完全抵消。为此，取绝对值或平方是常用的数学手段。所以，通常采用平均绝对偏差或标准偏差来表示一列测量值的分散性(亦指精密度)。具体介绍如下：

①平均绝对偏差 $\overline{\Delta x}$

设 $\bar{x}$ 为前述 n 个测量值的平均值，$\Delta x_1 = |x_1 - \bar{x}|, \Delta x_2 = |x_2 - \bar{x}|, \cdots, \Delta x_n = |x_n - \bar{x}|$ 为各次测量的偏差的绝对值，并把它们的平均值定义为平均绝对偏差

$$\overline{\Delta x} = \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| / n \tag{1-3}$$

显然，$\overline{\Delta x}$ 的值越大，表明这一列测量值的分散性越大；$\overline{\Delta x}$ 越小，则表明测量的精密度越高。

②标准偏差(即均方根偏差) σ

若按贝塞尔公式将各次偏差求平方和，再除以 $(n-1)$ 取平均值，然后再取其平方根，便得到所谓单次测量的标准偏差

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{1-4}$$

它表示，根据这列 n 次测量值可知，在同一条件下任作一次测量，所得测量值有 68.3% 的概率会落在 $\bar{x} \pm \sigma$ 的范围内(n 应足够大，下同)。

同样，标准偏差 σ 的值越大，表示测量列的分散性越大；σ 值越小，则表示测量的精密度越高。

在科学实验和工业计量中常用标准偏差来表示测量的精密度，但在简单的物理教学实验中，测量次数较少，迄今仍常用平均绝对偏差来表示。

③测量平均值的标准偏差 $\sigma_{\bar{x}}$

对测量平均值 $\bar{x}$ 的误差作估计，本应涉及系统误差。对于(已知)系统误差，可设法消除或对测量值进行修正。但总会有一些微小的系统误差因素难以消除或查明；有限次测量本身也使 $\bar{x}$ 会偏离真值。这些因素综合起来，使平均值 $\bar{x}$ 也成为一个随机量，因而可用统计方法来估计 $\bar{x}$ 的误差。可以证明，平均值的标准偏差 $\sigma_{\bar{x}}$ 是单次测量的标准偏差 σ 的 $\frac{1}{\sqrt{n}}$，即

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{1-5}$$

$\sigma_{\bar{x}}$ 在一定程度上反映了测量的准确度，也反映了测量的精密度。

(3) 相对误差

评价测量结果的优劣，既要看绝对误差的大小，又要看被测量本身的大小。为此引入相对误差的概念。

相对误差被定义为绝对误差与真值之比(或它们的对应同类量之比)，常以百分数表示：

$$\sigma_r = \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta x}{x} \times 100\% \tag{1-6}$$

根据具体情况，Δx 可取为 $\overline{\Delta x}$、σ 或 $\sigma_{\bar{x}}$；而 x 则常以最佳值 $\bar{x}$ 表示。对于验证性测量，常取理论值或公认值表示真值，则(1-6)式可相应地写为

$$\sigma_r = \frac{x_{测} - x_{公认}}{x_{公认}} \times 100\%$$

4. 直接测量结果的表达与不确定度的估计

一般说来，测量的目的是为了找到真值 x，而实际上我们只能找到真值的最佳近似值(通常取为多次测量值的平均值 $\bar{x}$)，同时估计其误差的存在范围 $\mp \Delta$。因此，通常将测量结果表示为

$$x = \bar{x} \pm \Delta \tag{1-7}$$

这就是说，我们的测量结果表明：在某一很大的概率下，真值 x 可能处在 $(\bar{x} - \Delta, \bar{x} + \Delta)$ 的范围之内，然而不能确定真值的位置。显然，最佳值 $\bar{x}$ 的误差仍是未知的，它并不等于 $\mp \Delta$。但 Δ 的取值说明了测量结果的不确定程度。Δ 越大，不确定程度越大；Δ 越小，测量结果的精确度越高。因此，把 Δ 称为不确定度，或者称为总不确定度(以区别于其分量)。

对不确定度的估计是以误差分析为基础的。通常，已知的系统误差已被设法消除或者从测量值中扣除，因而其余的各种误差分量都影响着不确定度的大小。由于误差的来源很多，很难按偶然误差和系统误差来严格区分全部误差分量(有的甚至难以发现)，故不宜按误差的性质来划分不确定度的分量。因此，国际计量委员会通过一项指导性文件：《BIPM 实验不

确定度的说明　建议书INC－1(1980)》。根据此建议精神，应将测量结果的不确定度按其数值评定方法划分成两类分量：A类为用统计方法计算的分量(记为 Δ_A)；B类为用其他方法估计的分量(记为 Δ_B)。它们均适用“方和根法”合成：

$$\Delta = \sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_B^2} \tag{1-8}$$

对于特殊用途，还须乘以一个因子，才能得到总不确定度。

在普通物理实验中，为了回避一些新的概念和运算，宜选择重复测量次数在 $5 < n \leqslant 10$ 的范围内，使 $\Delta_A = t_p(n-1) \cdot \sigma_{\bar{x}} \approx \sigma$，从而可简化地直接引用单次测量的标准偏差 σ 来计算 Δ_A，即取

$$\Delta_A = \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

但 Δ_A 与 σ 概念不同。

对于某些条件很好的可直接测量，其 Δ_B 可以忽略，则有 $\Delta = \Delta_A = \sigma$。这时真值落在 $\bar{x} \pm \sigma$ 范围内的概率约为95%或更大(前已指出，按 σ 的原义，它表示单次测量值落在此范围的概率为68.3%)。

在一般情况下，不确定度的B类分量不可忽略。然而，要对 Δ_B 作恰当的估计是需要足够的计量知识和经验的，这已超出本课程的要求。为了便于教学，我们仅用仪器的示值误差限或基本误差限 $\Delta_{仪}$ 来估计 Δ_B：当测量条件符合标准时，常取 $\Delta_B = \Delta_{仪}/\sqrt{3}$(对于均匀分布)；当条件改变需考虑变动误差等因素时，常取 $\Delta_B = \Delta_{仪}$(或者由实验直接给定)。

对于另外两种特殊情况，即 $\sigma < \frac{1}{3}\Delta_B$，或者仅作一次测量时，则可不计 Δ_A，而取 $\Delta = \Delta_B$。

需要说明，在实验教学中，目前仍相当广泛地按传统方法，当可不计系统误差时，用平均值和平均绝对偏差来表示测量结果，即

$$x = \bar{x} \pm \overline{\Delta x} \tag{1-9}$$

这是方便的。但其含义则是说明单次测量值有57.5%的概率会落在 $(\bar{x} - \overline{\Delta x}, \bar{x} + \overline{\Delta x})$ 范围之内。当 $\overline{\Delta x} < \frac{1}{3}\Delta_{仪}$ 时(相当于 $\sigma < \frac{1}{3}\Delta_B$)，或者只作一次测量时，也常将结果表示为 $x = \bar{x} \pm \Delta_{仪}$。

下面讨论一实例。

设用一级螺旋测微器对钢球的直径进行了6次测量。消去零点偏差后，所得测量值分别为：$D_1 = 9.543$ mm，$D_2 = 9.545$ mm，$D_3 = 9.544$ mm，$D_4 = 9.543$ mm，$D_5 = 9.542$ mm，$D_6 = 9.544$ mm，则其算术平均值为

$$\begin{aligned}\overline{D} &= \frac{9.543 + 9.545 + 9.544 + 9.543 + 9.542 + 9.544}{6} \\ &= 9.5435 \approx 9.544\ (\text{mm})\end{aligned}$$

各次偏差的绝对值为(单位：mm)

$$\Delta D_1 = |9.543 - 9.544| = 0.001,\quad \Delta D_2 = |9.545 - 9.544| = 0.001$$

$$\Delta D_3 = |9.544 - 9.544| = 0.000,\quad \Delta D_4 = |9.543 - 9.544| = 0.001$$

$$\Delta D_5 = |9.542 - 9.544| = 0.002,\quad \Delta D_6 = |9.544 - 9.544| = 0.000$$

其平均绝对误差为

$$\overline{\Delta D}=\frac{0.001+0.001+0.000+0.001+0.002+0.000}{6}\approx 0.001\ (\mathrm{mm})$$

而一级螺旋测微器的示值误差限为 $\Delta_{仪}=0.004\ \mathrm{mm}$，可见$\overline{\Delta D}<\frac{1}{3}\Delta_{仪}$，于是测量结果可按简易方式表示为

$$D=\overline{D}\pm\Delta_{仪}=(9.544\pm 0.004)\ \mathrm{mm}$$

$$\sigma_r=\frac{\Delta_{仪}}{\overline{D}}\times 100\%\approx 0.04\%$$

若采用不确定度来表示，则相应的估算如下：

$$\Delta_A=\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(D_i-\overline{D})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{(1+1+0+1+4+0)\times 10^{-6}}{6-1}}$$

$$\approx 1.2\times 10^{-3}(\mathrm{mm})$$

$$\Delta_B=\frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}\approx\frac{0.004}{1.73}\approx 2.3\times 10^{-3}(\mathrm{mm})$$

$$\Delta=\sqrt{\Delta_A^2+\Delta_B^2}=\sqrt{(1.2^2+2.3^2)\times 10^{-6}}=2.6\times 10^{-3}\approx 0.003\ (\mathrm{mm})$$

于是测量结果应表示为

$$D=\overline{D}\pm\Delta=(9.544\pm 0.003)\ \mathrm{mm}$$

$$\sigma_r=\frac{\Delta}{\overline{D}}\times 100\%=0.03\%$$

5. 间接测量的结果及其表示

在实验中，常常对某些物理量只能进行间接测量。设间接测量量 φ是几个相互独立的直接测量量 $x,y,z,\cdots$ 的函数，即

$$\varphi=f(x,y,z,\cdots)$$

并已测出各直接测量量 $x=\overline{x}\pm\Delta x, y=\overline{y}\pm\Delta y, z=\overline{z}\pm\Delta z,\cdots$，那么，当各直接测量量取值为 $\overline{x},\overline{y},\overline{z},\cdots$ 时，可得间接测量量的近真值

$$\tilde{\varphi}=f(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\cdots) \tag{1-10}$$

当各直接测量值分别有一微增量 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z,\cdots$ 时，间接测量量必然会有相应的变化。按全微分公式有

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z+\cdots$$

若近似地以误差取代微分，并考虑正负号的最不利组合，则可估算间接测量值的误差：

$$\Delta\varphi=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right|+\cdots \tag{1-11}$$

$$\sigma_r=\frac{\Delta\varphi}{\tilde{\varphi}}=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\tilde{\varphi}}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\tilde{\varphi}}\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{\tilde{\varphi}}\right|+\cdots \tag{1-12}$$

相应地可将间接测量结果表示为

$$\varphi=\tilde{\varphi}\pm\Delta\varphi$$

但是，按(1-11)式和(1-12)式计算误差时，一般会扩大误差，与实际情况有较大的出人；若用

不确定度 $\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z,\cdots$ 表示直接测量值的微小增量，并考虑其统计性质，则可用方和根合成公式估算间接测量值的不确定度，即有

$$\Delta_\varphi=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\Delta_x^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\Delta_y^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\Delta_z^2+\cdots}\tag{1-13}$$

相应地有

$$\sigma_r=\frac{\Delta_\varphi}{\tilde{\varphi}}=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta_x}{\tilde{\varphi}}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta_y}{\tilde{\varphi}}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta_z}{\tilde{\varphi}}\right)^2+\cdots}\tag{1-14}$$

以上两式是不确定度传递的一般公式。当函数 $f(x,y,z,\cdots)$ 为单纯的和差关系时，(1-13)式将化为简单的方和根关系，有

$$\Delta_\varphi=\sqrt{\Delta_x^2+\Delta_y^2+\Delta_z^2+\cdots}$$

宜直接按此式求 Δ_φ；当函数为单纯的积商关系时，则常将(1-14)式改写成

$$\sigma_r=\frac{\Delta_\varphi}{\tilde{\varphi}}=\sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x}\Delta_x\right)^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial y}\Delta_y\right)^2+\left(\frac{\partial \ln f}{\partial z}\Delta_z\right)^2+\cdots}\tag{1-15}$$

且在此情况下，(1-15)式可变得更简单，即变为

$$\sigma_r=\frac{\Delta_\varphi}{\tilde{\varphi}}=\sqrt{\left(\frac{\Delta_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\Delta_y}{y}\right)^2+\left(\frac{\Delta_z}{z}\right)^2+\cdots}$$

这时先算 σ_r，再按 $\Delta_\varphi=\sigma_r\cdot\tilde{\varphi}$ 计算不确定度 Δ_φ 较为方便。最后也可将结果表示为

$$\varphi=\tilde{\varphi}\pm\Delta_\varphi$$

间接测量结果的表示应与有关直接测量结果的表达形式一致。不要用错传递公式。为方便起见，此处提供误差传递与不确定度(标准差)传递的常用公式表(见表 1-1)，以供参考和比较。

表 1-1　误差和不确定度传递的常用公式

函数关系式	误差传递公式	不确定度传递公式
$\varphi=x\pm y$	$\Delta\varphi=\lvert\overline{\Delta x}\rvert+\lvert\overline{\Delta y}\rvert$	$\Delta_\varphi=\sqrt{\Delta_x^2+\Delta_y^2}$
$\varphi=x\cdot y$	$\frac{\Delta\varphi}{\varphi}=\left\lvert\frac{\overline{\Delta x}}{\overline{x}}\right\rvert+\left\lvert\frac{\overline{\Delta y}}{\overline{y}}\right\rvert$	$\frac{\Delta_\varphi}{\varphi}=\sqrt{\left(\frac{\Delta_x}{\overline{x}}\right)^2+\left(\frac{\Delta_y}{\overline{y}}\right)^2}$
$\varphi=\frac{x}{y}$		
$\varphi=x^n$	$\frac{\Delta\varphi}{\varphi}=n\left\lvert\frac{\overline{\Delta x}}{\overline{x}}\right\rvert$	$\frac{\Delta_\varphi}{\varphi}=n\frac{\Delta_x}{\overline{x}}$
$\varphi=\sqrt[n]{x}$	$\frac{\Delta\varphi}{\varphi}=\frac{1}{n}\left\lvert\frac{\overline{\Delta x}}{\overline{x}}\right\rvert$	$\frac{\Delta_\varphi}{\varphi}=\frac{1}{n}\frac{\Delta_x}{\overline{x}}$
$\varphi=\sin x$	$\Delta\varphi=\lvert\cos\overline{x}\cdot\overline{\Delta x}\rvert$	$\Delta_\varphi=\lvert\cos\overline{x}\rvert\Delta_x$
$\varphi=\ln x$	$\Delta\varphi=\left\lvert\frac{\overline{\Delta x}}{\overline{x}}\right\rvert$(有 φ 的单位)	$\Delta_\varphi=\frac{\Delta_x}{\overline{x}}$(有 φ 的单位)

例：设已知一块梯形板的上底、下底和高的直接测量结果分别为 $a=(32.43\pm0.02)$ cm，$b=(65.20\pm0.03)$ cm，$h=(20.05\pm0.02)$ cm，求其面积 S 的间接测量结果(各量均带不确定度表出)。

解：梯形面积公式为 $S=\frac{a+b}{2}h$，以 $\bar{a},\bar{b},\bar{h}$ 的值代入式中得

$$\bar{S}=\frac{1}{2}\times(32.43+65.20)\times 20.05\approx 978.7\ (\text{cm}^2)$$

今选用(1-15)式算相对误差

$$\sigma_r=\frac{\Delta_S}{\bar{S}}=\sqrt{\left(\frac{\partial\ln S}{\partial a}\Delta_a\right)^2+\left(\frac{\partial\ln S}{\partial b}\Delta_b\right)^2+\left(\frac{\partial\ln S}{\partial h}\Delta_h\right)^2}$$

则需先取对数

$$\ln S=\ln\frac{1}{2}+\ln(a+b)+\ln h$$

再求各项偏导数

$$\frac{\partial\ln S}{\partial a}=\frac{1}{a+b},\quad \frac{\partial\ln S}{\partial b}=\frac{1}{a+b},\quad \frac{\partial\ln S}{\partial h}=\frac{1}{h}$$

代入 σ_r 的表达式便得

$$\frac{\Delta_S}{\bar{S}}=\sqrt{\left(\frac{\Delta_a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{\Delta_b}{a+b}\right)^2+\left(\frac{\Delta_h}{h}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{0.02}{32.43+65.20}\right)^2+\left(\frac{0.03}{32.43+65.20}\right)^2+\left(\frac{0.02}{20.05}\right)^2}\approx 0.001$$

$$\Delta_S=\bar{S}\cdot\frac{\Delta_S}{\bar{S}}=978.7\times 0.001\approx 1\ (\text{cm}^2)$$

所以此梯形面积的间接测量结果为

$$S=\bar{S}\pm\Delta_S=(979\pm 1)\ \text{cm}^2$$

$$\sigma_r=\frac{\Delta_S}{\bar{S}}\times 100\%=0.1\%$$

若将题中各直接测量量的不确定度当作平均绝对偏差，则有

$$\frac{\Delta S}{\bar{S}}=\frac{\overline{\Delta a}+\overline{\Delta b}}{\bar{a}+\bar{b}}+\frac{\overline{\Delta h}}{\bar{h}}=\frac{0.02+0.03}{32.43+65.20}+\frac{0.02}{20.05}=1.5\times 10^{-3}$$

$$\Delta S=\bar{S}\,\frac{\Delta S}{\bar{S}}=978.7\times 1.5\times 10^{-3}\approx 1.5\approx 2\ (\text{cm}^2)$$

于是梯形面积的测量结果可表示为

$$S=\bar{S}\pm\Delta S=(979\pm 2)\ \text{cm}^2$$

$$\sigma_r=\frac{\Delta S}{\bar{S}}\times 100\%=0.2\%$$

两种表示有不同，但无矛盾。

6. 有效数字

(1) 有效数字的概念

测量所得数值都含有误差。用最小刻度为 1 mm 的米尺来测量物体的长度 L 时，一般是将被测物的一端和米尺的“0”刻度线对齐，而读出物体

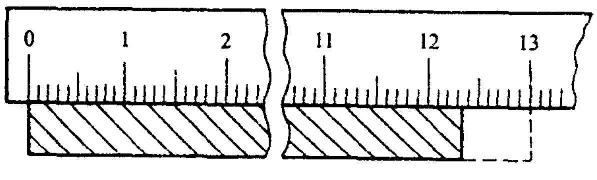


图 1-2　长度的测量

另一端所对应的刻度值。图 1-2 中的物体长度 L 在 12.3 cm 和 12.4 cm 之间，凭经验可将其估读为 12.34 cm 或 12.35cm。显然，在所得读数中，“12.3”是准确的，而最后一位数字“4”或“5”则是估计的，含有误差，故称为存疑数字。读数应尽可能符合实际。读出存疑数字比不读为合理。因此，全部准确数字加上一位存疑数字所组成的一串数字就有效而合理地表示了测量值的数量，人们称这种数字串为有效数字。需要强调指出，有效数字中除全部准确数字外，必须还含有一位存疑数字，也只许末尾一位为存疑数字；有效数字的末位应是误差所在数位。因此，当图 1-2 中物体的右端如虚线所示，恰好与 13 cm 刻度线对齐时，准确数字为“13.0”，再加上对毫米分格内的估读数“0”，则物体长 L 的读数应用有效数字记为 13.00 cm，而不能记为 13 cm 或 13.0 cm(因为它们所反映的误差不同)。

由此可见，以单一的单位表示的测量数字中，从数量级最大的那个非零数字开始，直至误差所在数位，每个数字都是有意义的，包括末尾的“0”在内，都不可省略，也不可凭空加上去。有效数字(串)中数字的个数可粗略地反映相对误差的大小。例如：13，13.0 和 13.00，它们的相对误差分别不超过十分之一，百分之一和千分之一。人们常把由几个数字组成的有效数字相应地称为几位(的)有效数字。例如：108.00 是 5 位有效数字；0.45 是两位有效数字；0.0005 是一位有效数字。有效数字位数的多少是测量精确度的一个标志，必须如实地表达。

同一个测量值，其精度不应随单位的变换而改变。如果是十进制单位的变换，则有效数字的位数保持不变。显然，有效数字的位数与小数点的位置无关。例如：

$$\tilde{L} = 13.00\ \text{cm} = 130.0\ \text{mm} = 1.300 \times 10^5\ \mu\text{m} \neq 130\,000\ \mu\text{m}$$

$$\tilde{V} = 2.50\ \text{cm}^3 = 0.000\,002\,50\ \text{m}^3 = 2.50 \times 10^{-6}\ \text{m}^3 \neq 2.5 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

不难看出，单位变换时采用科学计数法可以避免改变数据的精度或写得太冗长。在进行非十进制单位换算时，则以保持误差所在位为有效数字的末位为原则。

例如，某角度的测量值为 $\tilde{\varphi} = 93.5°$，粗略判断其误差不小于 0.1°。若要改用弧度为单位，则先换算其误差约为 0.001 7 rad ≈ 0.002 rad，然后将测量值换算，应保留到误差所在数位(弧度的千分位)为止。所以，$\tilde{\varphi} = \frac{\pi}{180} \times 93.5 = 1.631\,882\,8 = 1.632$ rad。

上述原则是普适的。根据这一原则，要求测量结果中的不确定度或误差一般只用一位有效数字表示；测量值的末位必须与误差所在位划齐。例如：$L = (12.351 \pm 0.01)$ cm 是错误的表达式，应改写为 $L = (12.35 \pm 0.01)$ cm；而 12.3 cm 表示误差在 0.1 cm 量级。若将 $L = (12.3 \pm 0.01)$ cm 改为 $L = (12.30 \pm 0.01)$ cm 也是不可以的，因为不经过测量，凭空加上一个“0”来提高数据精度的做法是违反实事求是的科学原则的。对于此例，则宁可改正成为：$L = (12.3 \pm 0.1)$ cm，这和原数据精度保持一致。

此外应当说明，非测量数字(如纯数、刻度等)不是有效数字。但在计算中遇到 $\sqrt{2}$、π 等常数要取近似值时，所取的位数应不少于测量数据的有效数字位数，以保证不因此而改变测量误差。

(2) 有效数字的运算规则

在间接测量中必然要遇到有效数字的运算。运算结果的有效数字一般要由误差的量级来决定。这样做往往很繁杂。而对于“四则”运算等，却存在较为简便的定位方法。其总的原则是，除遵守数学运算法则外，还规定，准确数字与准确数字的运算结果仍为准确数字；存疑数字与任何数字的运算结果均为存疑数字。下面以竖式举例说明(数字下有横杠者为存疑数

字）。

加法：

$$\begin{array}{r} 71.\underline{3} \\ +\ \ 6.26\underline{2} \\ \hline 77.\underline{5}6\underline{2} \end{array} = 77.\underline{6}$$

减法：

$$\begin{array}{r} 168.\underline{3} \\ -112.2\underline{6} \\ \hline 56.\underline{0}\underline{4} \end{array} = 56.\underline{0}$$

乘法：

$$\begin{array}{r} 32.\underline{6} \\ \times\ \ 2.\underline{4} \\ \hline 1\underline{3}\underline{0}\underline{4} \\ 65\underline{2}\ \ \\ \hline 7\underline{8}\underline{2}.\underline{4} \end{array} = 7.\underline{8}\times10^2$$

除法：

$$\begin{array}{r} 2\underline{1}.\underline{3} \\ 32\overline{)\,68\underline{2}} \\ 6\underline{4}\ \ \\ \hline \underline{4}\underline{2} \\ \underline{3}\underline{2} \\ \hline \underline{1}\underline{0}\ \ \underline{0} \\ \underline{9}\ \ \underline{6} \end{array} = 2\underline{1}$$

从上面的例子可总结出如下法则：

①当几个有效数字相加或相减时，其结果的有效数字末位的量级与参加运算的有效数字中存疑数字量级最大的对齐；

②当几个有效数字相乘或相除时，其结果的有效数字位数一般与参加运算的各数中有效数字最少者相同。

应该指出，上述规则虽然简便，但较粗略。当进行多项运算时，由于误差的积累或进位、退位而可能有例外。所以，普适的规则仍是使结果的末位数字与绝对误差所在数位对齐，其后的尾数应予修约。

对测量值及其运算结果修约时，通常仍采用"四舍五入"（在科学实验和计量工作中，遇尾数为整"5"时，常将修约后的末位维持或者凑成偶数，以免因"5"的一律进位而造成系统误差）。而误差通常修约成一位有效数字，当按一般规则修约将显著缩小误差时，对绝对误差，通常"宁进不舍"；对相对误差则可用两位数字表示，以确保数据的可信度。对于中间运算，也可多留一二位存疑数字（称为"安全数字"），以避免舍入误差因运算而扩大，但最后结果中应将安全数字修约掉。

7. 数据处理的列表法和作图法

(1) 列表法

实验中，在记录和处理数据时，常将数据列成表格。这种做法能简明地表示出有关物理量之间的关系，便于检查测量结果及运算是否合理，有助于发现和分析问题。

列表的要求是：

①表格的格式应简明地反映相关物理量之间的依赖关系和对应关系，易读便查。

②表中各符号代表什么物理量必须明确无疑，并注明单位。单位应统一写在物理量名称栏内，不要重复标记在每个数据后面。

③表中所列测量数据要正确地用有效数字表示，如实地反映测量的精度。

值得指出的是，实验原始记录的内容应着重于直接测量数据的记录，一些反映测量条件的参数也要有所记载；而报告中的数据表格则宜全面、简明，应该包括数据处理和结果表达的内容。