青年自学丛书

数学

QINGNIAN ZIXUE CONGSHU

第三册

内蒙古人民出版社

青年自学丛书

数学

第三册

岳正仁 朱长山 戴春陶 高志懋 谢茂才 陈慕洲 编

内蒙古人民出版社

青年自学丛书
数学
第三册
岳正仁 朱长山 戴春陶 高志懋 谢茂才 陈慕洲 编
内蒙古人民出版社出版 内蒙古新华书店发行
上海商务印刷厂排版 人民日报印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32 印张：7.875 字数：165千
1978年9月第一版 1979年1月第二版
1979年12月第2次印刷
印数：137,281—331,180
统一书号：7089·48 每册：0.66元

编者的话

在以英明领袖华主席为首的党中央“抓纲治国”战略决策指引下，全国出现了大干快上的跃进局面．我们这些多年战斗在教育战线的数学教师，深切感到形势逼人，愿为迅速实现四个现代化贡献自己更大的力量．实现四个现代化，科学技术的现代化是关键，而数学是科学技术现代化的必须的基础知识。应内蒙古人民出版社的邀请，我们承担了青年自学丛书“数学”部分的编写任务．

本书分一、二、三、四册，包括：数和式的基础知识、平面几何基础知识、立体几何基础知识、方程和不等式、函数及其图象，此外，还包括：数列极限、排列、组合与应用数学初步；复数；解析几何；微积分初步等．

在编写过程中，我们本着加强基础理论，坚持理论联系实际，便于自学等原则，根据新的教学大纲精神，增加了新的内容，在安排上注意了由浅入深、由易到难；在文字叙述上尽量做到简明扼要、通俗易懂，并配备了一定数量的例题和较多的习题，以利于培养读者分析问题和解决问题的能力．

由于我们思想水平不高，业务能力的局限，定稿时间紧迫，没有能够更广泛地征求意见，因此，书中一定存在不少缺点甚至错误，欢迎广大读者批评指正．

编　　者

一九七八年二月

于呼和浩特

目　录

第六章　数列极限、排列组合、应用数学初步

第一节　数　　列

一、数列的概念与它的通项

1．数列的概念

把大于 4 的偶数按从小到大的次序依次写成一列数：

$$6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ \cdots.$$

某车工所车零件的个数按每月顺序记录下来，一月，二月，三月，……，的产量依次记录为

$$161,\ 164,\ 165,\ 167,\ 186,\ 190,\ \cdots.$$

象上面两例这样按照某种规则排列着的一列数，称作数列.

下面再看一些数列的例子：

(1) 自然数列：

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n,\ \cdots;$$

(2) 素数数列：

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ \cdots;$$

(3) 正奇数按照从小到大的顺序所排成的数列：

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \cdots;$$

(4) 自然数的倒数依次排列：

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots;$$

(5) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \cdots, -\frac{1}{1024}, \cdots;$

(6) 在大于 1，小于 100 的自然数中，能被 3 整除的数按从小到大的顺序排列，组成一个数列：

$$3, 6, 9, 12, \cdots, 99;$$

(7) $\sqrt{3}$ 的精确到 1, 0.1, 0.01, 0.001, … 的不足近似值组成的数列：

$$1, 1.7, 1.73, 1.732, \cdots;$$

(8) $-5, -5, -5, -5, \cdots.$

上面举出的都是数列的例子. 从这些数列里，我们可以看到，它们都是按照一定的规则排列着的.

例如，在数列(1)中，自然数按从小到大的顺序排列，第一个数是 1，以后每一个数都等于前一个数加 1.

在数列(2)中，素数按从小到大的顺序依次排列. 我们能写出它的每一个数，但目前还不能写出它的一般表达式.

数列(3)是正奇数数列，按照从小到大的顺序依次排列，它的第一个数是 1，以后每个数都比它的前一个数多 2.

数列(4)每一个位置上的数都等于自然数列(1)里相同位置上的数的倒数.

数列(5)的第一个数是 $\frac{1}{2}$，以后每个数都等于它前一个数乘以 $-\frac{1}{2}$ 所得的积.

数列(6)的第一个数是 3，以后每个数都等于它的前一个数加 3 所得的和.

数列(7)是 $\sqrt{3}$ 精确到 1, 0.1, 0.01, … 的不足近似值依次排列所得的数列，我们可写出它的每一个位置上的数，但不能给出一般表达式.

数列(8)的每一个位置上都是 -5.

从以上分析，我们看到，给定一个数列之后，对于每一个位置的号码数，都有一个确定的数值和它对应，因此，数列中的每一个不同位置上的值是自然数 n 的函数. 记为 $a_n=f(n)$. 反之，给定了一个以自然数 n 为自变量的函数 $a_n=f(n)$，就能求出数列中每一个位置上的值.

如果自变量 n 依次取 $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ 那么函数值 $a_n=f(n)$ 就依次取值:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

例如给定函数 $a_n=2n-1$，让自变量 n 依次取 $1, 2, 3, \cdots$. 便得到前面所讲的数列(3):

$$1, 3, 5, \cdots$$

数列里的每一个数值称作数列的一项，对应于 $n=1$（即第一个位置）的数值称作第一项，记作 a_1，对应于 $n=2$（即第二个位置）的数值称作第二项，记作 a_2，…一般地，对应于 n（即第 n 个位置）的数值称作第 n 项，记作 a_n，例如数列(5)的 $a_3=\frac{1}{8}$，$a_4=-\frac{1}{16}$. 数列(2)的 $a_2=3$，$a_4=7$，$a_5=11$.

2. 数列的通项公式

一个数列的第 n 项 a_n 和项数 n 之间的函数关系如果能用一个公式表示出来，那么公式 $a_n=f(n)$ 就称作数列的通项公式.

例如，数列(1)的通项公式是 $a_n=f(n)=n$. 数列(3)的通项公式是 $a_n=f(n)=2n-1$，数列(4)的通项公式是 $a_n=f(n)=\frac{1}{n}$，数列(8)的通项公式是 $a_n=f(n)=-5$.

有了数列的通项公式，就可写出它的任何一项. 所以，我

们在研究数列时总是要首先设法找到它的通项公式.

但是，不是所有的数列都能写出它的通项公式的，正如函数不一定都能用公式来表示一样. 例如，数列(2)和数列(7)就写不出它的通项公式.

如果一个数列的通项公式是 $a_n=f(n)$，我们就把这个数列简记作 $\{a_n\}$. 例如数列(6)可记作 $\{3n\}$.

数列的各项可用数轴上的点来表示. 例如数列(4)，(5)表示在数轴上是(图 6-1)：

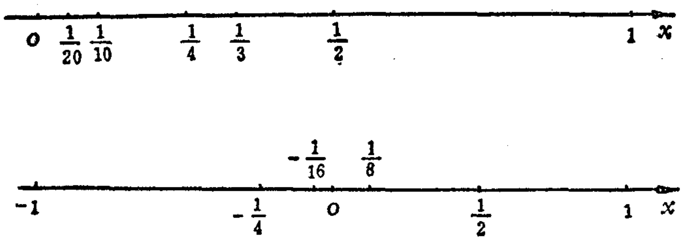

图 6-1

数列(4)所表示的点在原点的右边，从右边逐渐接近原点；数列(5)所表示的点在原点的两边交替出现，从两边逐渐接近于原点.

如果一个数列的项数是无限的，这个数列称作无穷数列. 如果项数是有限的，称作有穷数列. 例如数列(1)，(2)，(3)，(4)，(5)，(7)，(8)都是无穷数列，数列(6)是有穷数列.

如果一个数列各项的值逐渐增加，这个数列称作递增数列. 如果各项的值逐渐减少，称作递减数列. 如果数列各项的值是一个常数，这个数列称作常数列. 如果数列各项的值一会儿增，一会儿减称作摆动数列. 如数列(3)是递增数列，数列(4)是递减数列，数列(8)是常数列，数列(5)是摆动数列.

如果一个数列各项的绝对值小于某一个定值，即 $|a_n|<M\ (M>0)$，那么，这个数列称作有界数列，否则称作无界数列. 例如数列(2)是一个无界数列，数列(4)是一个有界数列.

例 1 已知：

(1) $f(n)=\dfrac{1}{n(n+1)}$； (2) $f(n)=\dfrac{(-1)^n}{n}$.

求：$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$\cdots$.

解 (1) $f(n)=\dfrac{1}{n(n+1)}$，

$$f(1)=\frac{1}{1\cdot(1+1)}=\frac{1}{1\cdot 2},$$

$$f(2)=\frac{1}{2\cdot(2+1)}=\frac{1}{2\cdot 3},$$

$$f(3)=\frac{1}{3\cdot(3+1)}=\frac{1}{3\cdot 4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

(2) $f(n)=\dfrac{(-1)^n}{n}$.

$$f(1)=\frac{(-1)^1}{1}=-1,$$

$$f(2)=\frac{(-1)^2}{2}=\frac{1}{2},$$

$$f(3)=\frac{(-1)^3}{3}=-\frac{1}{3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

例 2 根据数列的通项公式，写出数列：

(1) $a_n=-2n$； (2) $a_n=\dfrac{n}{2n-1}$；

(3) $a_n=(-1)^{n+1}(2n+3)$.

解 (1) 由 $a_n=-2n$，令 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$，得：

$$a_1=-2,\ a_2=-4,\ a_3=-6,\ a_4=-8,\ \cdots,$$

∴ 数列 $\{-2n\}$ 是:

$$-2,\ -4,\ -6,\ -8,\ \cdots,\ -2n,\ \cdots.$$

(2) 由 $a_n=\dfrac{n}{2n-1}$, 令 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$ 得:

$$a_1=1,\ a_2=\frac{2}{3},\ a_3=\frac{3}{5},\ a_4=\frac{4}{7},\ \cdots,$$

∴ 数列 $\left\{\dfrac{n}{2n-1}\right\}$ 是:

$$1,\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{7},\ \cdots,\ \frac{n}{2n-1},\ \cdots.$$

(3) 由 $a_n=(-1)^{n+1}(2n+3)$, 令 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$ 得:

$$a_1=5,\ a_2=-7,\ a_3=9,\ a_4=-11,\ \cdots,$$

∴ 数列 $\{(-1)^{n+1}(2n+3)\}$ 是:

$$5,\ -7,\ 9,\ -11,\ \cdots,\ (-1)^{n+1}(2n+3),\ \cdots.$$

例3 写出下列各无穷数列的通项公式，并求出每个数列的第10项:

(1) $\dfrac{2}{1}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{6}{5}, \dfrac{8}{7}, \cdots$;

(2) $\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, -\dfrac{1}{81}, \cdots$;

(3) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{15}, \dfrac{1}{24}, \dfrac{1}{35}, \cdots$;

(4) $\dfrac{1}{5}, \dfrac{6}{7}, \dfrac{15}{9}, \dfrac{28}{11}, \dfrac{45}{13}, \cdots$.

解 (1) 数列 $\dfrac{2}{1}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{6}{5}, \dfrac{8}{7}, \cdots$ 中分母是奇数，其通项为 $2n-1$, 分子是偶数,其通项为 $2n$.

$$\therefore\quad a_n=\frac{2n}{2n-1}.$$

$$\therefore\quad a_{10}=\frac{2\times10}{2\times10-1}=\frac{20}{19}.$$

(2) 数列 $\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, -\frac{1}{81}, \cdots$ 中，第一项是 $\frac{1}{3}$，以后各项是前一项的 $\frac{1}{3}$ 倍，符号交替出现正、负号，$\therefore$ 通项公式是 $a_n=(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^n$，$a_{10}=-\frac{1}{3^{10}}=-\frac{1}{59049}$.

(3) 数列 $\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{15}, \frac{1}{24}, \frac{1}{35}, \cdots$,

各项分子为 1，分母可拆成:

$1\cdot(1+2),\ 2(2+2),\ 3\cdot(3+2),\ \cdots,\ n(n+2),\ \cdots$

$\therefore$ 通项公式是:

$$a_n=\frac{1}{n(n+2)},\qquad a_{10}=\frac{1}{10(10+2)}=\frac{1}{120},$$

(4) 数列 $\frac{1}{5}, \frac{6}{7}, \frac{15}{9}, \frac{28}{11}, \cdots$,

数列可改写成:

$$\frac{1\cdot(2\cdot1-1)}{2\cdot1+3},\ \frac{2(2\cdot2-1)}{2\cdot2+3},\ \frac{3(2\cdot3-1)}{2\cdot3+3},$$
$$\frac{4(2\cdot4-1)}{2\cdot4+3},\ \cdots,$$

$\therefore$ 通项公式是:

$$a_n=\frac{n(2n-1)}{2n+3},\qquad a_{10}=\frac{10(2\cdot10-1)}{2\cdot10+3}=\frac{190}{23}.$$

练　　习

1. 判断下列数列是什么类型？并写出它们的通项公式:

(1) 从小到大排列的所有的正的奇数的倒数;

(2) 从小到大排列的所有的自然数的平方;

(3) $\sqrt{2}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{8}$, …;

(4) 100 以内可被 5 整除的正整数按照从大到小的次序排列;

(5) $-2, 2, -2, 2, \cdots$;

(6) $3, 3, 3, 3, \cdots$;

(7) $\sin\frac{\theta}{1}$, $\sin\frac{\theta}{2}$, $\sin\frac{\theta}{3}$, $\sin\frac{\theta}{4}$, …;

(8) $\frac{4}{3}$, 0, $\frac{6}{5}$, 0, $\frac{8}{7}$, 0, $\frac{10}{9}$, 0, ….

2. 根据下列各数列的通项公式，写出数列来，并求出每个数列的第六项.

(1) $a_n=(-1)^n(n+1)$; (2) $a_n=-3n-1$;

(3) $a_n=\frac{n}{2n-1}$; (4) $a_n=\frac{2n}{n^2+1}$.

3. 写出下列数列的前 5 项，并在数轴上表示出来:

(1) $a_n=(-1)^n\cdot\frac{n}{n+1}$; (2) $a_n=\frac{3n+1}{2n-1}$;

(3) $a_n=\frac{n}{n+1}$; (4) $a_n=\frac{n(n+1)}{2n+1}$.

二、等 差 数 列

1. 等差数列的概念

剧场的座位，第一排十八个座位，第二排二十个座位，第三排二十二个座位，以后每排比前一排多两个座位,(图 6-2). 写成数列的形式就是:

$$18, 20, 22, 24, \cdots \quad (1)$$

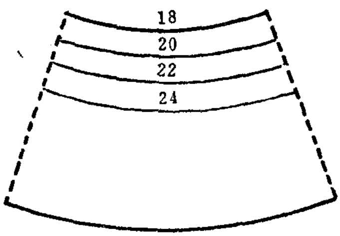

图 6-2

再看下面的数列:

$$100, 97, 94, 91, \cdots \quad (2)$$

数列(1)，从第二项起，每一项都比它的前一项多 2, 数列(2) 从第二项起，每一项都比它的前一项少 3, 也就是说，这两个数列有一个共同的性

质，就是从第二项起，每一项与前一项的差都等于某一个常量.

如果一个数列 $\{a_n\}$，从第二项起，每一项减去它前面的一项所得的差都等于某一个常量，我们就称这数列 $\{a_n\}$ 为等差数列*，并把这个常量称作等差数列的公差，记作 d. 例如数列(1)，(2)都是等差数列. 数列(1)的公差 $d=2$，数列(2)的公差 $d=-3$.

常数列是等差数列，它的公差 $d=0$. 例如：等边三角形三个角排成一列，构成一个只有三项的常数列：

$$60°, 60°, 60°.$$

它的公差 $d=0$.

摆动数列不是等差数列. 例如：

$$2, -4, 6, -8, 10, -12, \cdots.$$

由于 $a_2-a_1=-4-2=-6$，$a_3-a_2=6-(-4)=10$. 所以它不存在公差，因而不是等差数列.

设有三个量 a, b, c 成等差数列，那么称 b 是 a 和 c 的等差中项**.

根据等差数列的定义，我们得到：

$$b-a=c-b,$$

即

$$2b=a+c,$$

---

* 等差数列又称等差级数或算术级数.

** 一般地说，在 a 和 c 两个数之间可插入 m 个数：$b_1, b_2, b_3, \cdots, b_m$，使 $a, b_1, b_2, b_3, \cdots, b_m, c$ 成等差数列，不难证明：$b_1=a+\frac{c-a}{m+1}$，$b_2=a+\frac{2(c-a)}{m+1}$，$\cdots$，$b_m=a+\frac{m(c-a)}{m+1}$.

这 m 个数 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 称作 a, c 的等差中项。当 $m=1$ 时，在 a, c 之间只插入一个数 b. 因此 $b=\frac{a+c}{2}$ 是等差中项的一个特例。

a, c 的等差中项也称作 a, c 的算术平均值。

$$b=\frac{a+c}{2}.$$

这个式子称作等差中项公式.

例 在$\triangle ABC$中，设A, B, C成等差数列，求证：$B=60°$.

证明 $\because$ A, B, C成等差数列，

$$\therefore \quad B=\frac{A+C}{2}=\frac{180°-B}{2}.$$

即 $$3B=180°,$$

$$\therefore \quad B=60°.$$

2. 等差数列的通项公式

设等差数列$\{a_n\}$的公差是d. 那么，

$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=a_1+3d,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

这说明，等差数列的任何一项都等于第一项加上公差的一个倍数，这个倍数恰好等于这一项的项数减1，也就是：

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

这个式子称作等差数列的通项公式. 在这个式子中有四个量：a_n, a_1, n和d，知道了其中的任何三个，都可求出第四个量来.

例1 判断14是不是等差数列

$$-1,\ \frac{3}{2},\ 4,\ \frac{13}{2},\ \cdots$$

的某一项？

解 $\because$ $a_1=-1$, $d=\frac{3}{2}-(-1)=\frac{5}{2}$,

设这个数列的第 n 项是14，那么，

$$14=-1+(n-1)\times\frac{5}{2}.$$

解这个方程得：$n=7$，因为求得的 n 是自然数，所以14是这个数列的第7项.

例2 求等差数列3，5，7，9，… 的第十二项.

解 $\because\ a_1=3,\ d=5-3=2,\ n=12,$

$\therefore\ a_{12}=3+(12-1)\times 2=25.$

例3 某等差数列的第7项是40，第11项是64，求第15项.

解 设首项为 a_1，公差为 d，那么，由于 $a_7=40$，$a_{11}=64$，得：

$$\begin{cases}a_1+(7-1)d=40,\\ a_1+(11-1)d=64.\end{cases}$$

解此方程组得：

$$a_1=4,\quad d=6.$$

$\therefore\ a_{15}=a_1+(15-1)d=4+14\times 6=88.$

例4 一个等差数列的第 m 项是 n，第 n 项是 m，求第 $(m+n)$ 项.

解 设此等差数列的第一项为 a_1，公差为 d. 那么：

$$\begin{cases}a_m=a_1+(m-1)d=n,\\ a_n=a_1+(n-1)d=m.\end{cases}$$

$\therefore\ d=-1,\ a_1=m+n-1.$

$$\begin{aligned}\therefore\ a_{m+n}&=a_1+(m+n-1)d\\&=(m+n-1)+(m+n-1)\cdot(-1)\\&=0.\end{aligned}$$

即这个等差数列的第 $(m+n)$ 项是0.