高等学校教学用书

数学物理方程

SHUXUE WULI FANGCHENG

中　册

A. H. 吉洪諾夫
A. A. 薩馬尔斯基　著

人民教育出版社

本书系根据苏联国立技术理論书籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的吉洪諾夫（А. Н. Тихонов）与薩馬尔斯基（А. А. Самарский）合著的“数学物理方程”（Уравнения математической физики）的1953年修訂第二版譯出。原书經苏联高等教育部审定为国立大学物理系及数学物理系教科书。

中譯本原分上下两册出版。現重新分成上、中、下三册出版。上册包括第一、二、三章共三章，中册包括第四、五章共两章，下册包括第六、七章和附篇。上中两册可作为四年制综合大学及高等师范学校数学各专业数学物理方程課程的教材，也可供高等工业学校相近专业选用。

本书譯者是黃克欧、黃寿恒、郭可詹、黃盛清、曹俊、忻鼎定、詹謙。校閱者是黃克欧、黃寿恒、刘紹唐。

数 学 物 理 方 程

中 册

А. Н. 吉洪諾夫，А. А. 薩馬尔斯基著

黃克欧等譯

人民教育出版社出版 高等学校教学用书編輯部 北京宣武門内承恩寺7号

（北京市书刊出版业营业許可証出字第2号）

上海洪兴印刷厂印装

新华书店上海发行所发行

各地新华书店經售

統一书号13010·964　开本850×1168 1/32　印張6 4/16

字数165,000　印数1—3,000　定价（4）¥0 60

1961年6月新1版　1961年6月上海第1次印刷

中冊目錄

第四章　橢圓型方程

當研究物理上的各種現象（例如：振動，熱傳導，擴散等等）的穩定過程時，通常得到橢圓型方程。這類型中的最普通的方程就是拉普拉斯方程：

$$\Delta u=0\,。$$

假使函數 u 與它的自一階到二階的導函數在區域 T 是連續的，而且滿足拉普拉斯方程，那麼，函數 u 就叫做在區域 T 的調和函數。

當研究調和函數時，曾研究出各種數學方法，這些方法用到雙曲線型與拋物線型方程上也很有效果。

§1. 能化爲拉普拉斯方程的問題

1. 穩定熱場．邊界問題的提法　讓我們考慮一個穩定的熱場。在第三章中已經指出：非穩定熱場的溫度應滿足熱傳導微分方程：

$$u_t=a^2\Delta u\quad\left(a^2=\frac{k}{c\rho}\right)。$$

假使這過程是穩定的，那麼，並不隨着時間而變化的溫度 $u(x,\,y,\,z)$ 的分佈就建立起來，所以溫度 $u(x,\,y,\,z)$ 必能滿足拉普拉斯方程：

$$\Delta u=0\,。\tag{1}$$

在有熱源時，我們得到下列的方程：

$$\Delta u=-f,\quad f=\frac{F}{k},\tag{2}$$

上式中的 F 是熱源密度，而 k 是熱傳導係數。非齊次拉普拉斯方程（2）通常叫做泊瓦松方程。

讓我們來考察一個以曲面 Σ 為界的體積 T。溫度 $u(x, y, z)$在物體 T 內部的穩定分佈問題敍述如下:

試求出函數 $u(x, y, z)$，它在 T 內部能滿足方程

$$\Delta u=-f(x, y, z), \tag{2}$$

而且能滿足下列三種邊界條件中的一個條件:

I. 在 Σ 上，$u=f_1$ （第一種邊界問題）;

II. 在 Σ 上，$\frac{\partial u}{\partial n}=f_2$ （第二種邊界問題）;

III. 在 Σ 上，$\frac{\partial u}{\partial n}+h(u-f_3)=0$ （第三種邊界問題）。

上式中的 f_1, f_2, f_3 與 h 都是已給的函數，而 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 是沿曲面 Σ① 的外法線方向導數。

這些邊界條件的物理意義是很明顯的（參看第三章，§1）。拉普拉斯方程的第一種邊界問題，通常叫做狄立克雷問題，而第二種問題通常叫做牛孟問題。假使要找在曲面 Σ 外部的區域 T 的解，那麼這問題就叫做外邊界問題。

2. 液體的勢流．穩定電流與靜電場的勢 讓我們研究沒有源的液體的勢流作為第二個例子。設在以 Σ 為界的體積 T 的內部，有不可壓縮的液體（密度 $\rho=$ 常數）的穩定流，其速度用 $\boldsymbol{v}(x, y, z)$來表示。倘使這液流沒有渦流（即沒有旋度），那麼速度 $\boldsymbol{v}$ 是有勢矢量，即

$$\boldsymbol{v}=-\operatorname{grad}\varphi, \tag{3}$$

這裏的 φ 是純量函數，它叫做速度勢。倘使源不存在，那麼

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0。 \tag{4}$$

把 $\boldsymbol{v}$ 的表達式(3)替入(4)式，則得:

---

① 顯然只有在熱量經過一個區域的界面的總流量等於零的條件下，才有可能建立起溫度的穩定分佈。由此推得這函數 f_2 應滿足附加的要求:

$$\iint_\Sigma f_2 d\sigma=0,$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=0$$

卽

$$\Delta\varphi=0, \tag{5}$$

就是說，速度勢滿足拉普拉斯方程。

設在均勻的導電媒質內有穩定電流，而電流的體積密度是 $\boldsymbol{j}(x, y, z)$。假使在媒質內沒有電流的體積源，那麼

$$\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0。 \tag{6}$$

電場 $\boldsymbol{E}$ 是用電流密度自微分形式的歐姆定律確定出：

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{j}}{\lambda}, \tag{7}$$

這裏的 λ 是媒質的電導率。旣然這過程是穩定的，那麼，這電場是無旋度的，也就是有勢場①，就是說，有這樣的純量函數 $\varphi(x, y, z)$ 存在，使

$$\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}\varphi。 \tag{8}$$

根據公式(6)與(7)，由(8)得到結論：

$$\Delta\varphi=0, \tag{9}$$

就是，穩定電流所生電場的勢函數必滿足拉普拉斯方程。

讓我們來考慮穩定電荷的電場。因爲這過程是穩定的，所以推出

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0。 \tag{10}$$

就是說，這電場是有勢場，而

$$\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}\varphi。 \tag{8}$$

設 $\rho(x, y, z)$ 是在媒質內電荷的體積密度，而該媒質的介電常數 $\varepsilon=1$。根據電動力學的基本定律則有

$$\iint\limits_S E_n\,dS=4\pi\sum e_i=4\pi\iiint\limits_T \rho\,d\tau, \tag{11}$$

上式的 T 是某一體積，S 是 T 的界面，而 $\sum e_i$ 是在 T 內部的所有電荷的總和，利用奧斯德洛格拉特斯基定理，就有

① 自麥克斯韋第二方程 $\frac{\mu}{c}\dot{H}=-\operatorname{rot}E$，推得

$$\operatorname{rot}E=0。$$

$$\iint_S E_n\,dS=\iiint_T \operatorname{div}\boldsymbol{E}\,d\tau, \tag{12}$$

卽得：

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}=4\pi\rho。$$

把 $\boldsymbol{E}$ 的表達式(8)替入上式，就有

$$\Delta\varphi=-4\pi\rho, \tag{13}$$

就是說，靜電勢 φ 滿足泊瓦松方程。假使沒有體積電荷 $(\rho=0)$，那麼，勢函數 φ 應該滿足拉普拉斯方程

$$\Delta\varphi=0。$$

這過程的主要的邊界問題也屬於前面已舉出的三種類型。我們這裏不細講那標誌各種物理過程的其他邊界問題，但這些問題中的某些問題在(本章)附錄中將要講到。

3. 曲線坐標系的拉普拉斯方程　讓我們導出曲線坐標系的拉普拉斯運算子的表達式。設在空間內，藉助於下列的關係式：

$$q_1=f_1(x,y,z),\quad q_2=f_2(x,y,z),\quad q_3=f_3(x,y,z), \tag{14}$$

引入曲線坐標 q_1, q_2, q_3，以代替笛卡兒坐標 x, y, z。設(14)式對 x, y 及 z 解出後可以寫爲：

$$x=\varphi_1(q_1,q_2,q_3),\quad y=\varphi_2(q_1,q_2,q_3),\quad z=\varphi_3(q_1,q_2,q_3)。\tag{15}$$

現令 $q_1=C_1$, $q_2=C_2$, $q_3=C_3$，這裏的 C_1, C_2 及 C_3 都是(任意的)常數，這樣我們就得到三組坐標曲面族：

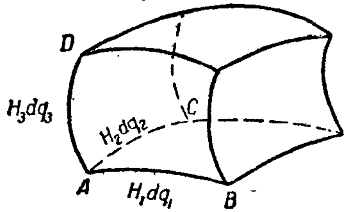

圖　44

$$f_1(x,y,z)=C_1,$$
$$f_2(x,y,z)=C_2$$
及
$$f_3(x,y,z)=C_3。\tag{16}$$

讓我們來考慮新坐標系中的一個體積元素，假定這體積元素是以三對坐標曲面爲界面(圖 44)。沿稜邊 AB：則 $q_2=$常數，$q_3=$常數；沿 AD：則 $q_1=$常數，$q_2=$常數；沿 AC：則 $q_1=$常數，$q_3=$常數。與稜邊 AB, AD, AC 相切的切線的方向餘弦依次與下

列諸數成比例：

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1},\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1},\quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1};$$
$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2},\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2},\quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2};$$
$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3},\quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3},\quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}。$$

稜邊正交的條件如下：

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i}\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_k}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_i}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_k}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i}\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_k}=0,\quad (i\neq k)。\tag{17}$$

計算出在新坐標中的弧長元素如下：

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx)^2+(dy)^2+(dz)^2=\\ &=\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}dq_3\right)^2+\\ &\quad+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}dq_3\right)^2+\\ &\quad+\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}dq_2+\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}dq_3\right)^2。\end{aligned}\tag{18}$$

去括弧後並考慮到其正交條件[參看(17)式]，則得：

$$ds^2=H_1^2dq_1^2+H_2^2dq_2^2+H_3^2dq_3^2,\tag{19}$$

此處

$$\left.\begin{aligned} H_1^2&=\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}\right)^2,\\ H_2^2&=\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}\right)^2,\\ H_3^2&=\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}\right)^2。\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

沿體積元素的每一稜邊上只有一個坐標能變動，因此據公式(19)這些稜邊的長度將是：

$$ds_1=H_1dq_1,\quad ds_2=H_2dq_2,\quad ds_3=H_3dq_3,\tag{21}$$

所以體積元素等於：

$$dv=ds_1\,ds_2\,ds_3=H_1\,H_2\,H_3\,dq_1\,dq_2\,dq_3\text{。}\tag{22}$$

現在讓我們考察一矢量場 $A(x,\ y,\ z)$。我們將計算 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$，它是用矢量分析中熟知的公式

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\lim_{v_M\to 0}\frac{\iint\limits_S A_n dS}{v_M}\tag{23}$$

來確定的，此公式中的 v_M 是包含所考察的 M 點的體積，而 S 是 v_M 的界面。把公式(23)應用到圖 44 中的體積元素 dv 上，利用"中值定理"，那就可以把經過二個相對的稜面(例如說經左稜面與右稜面)的矢通量的差表爲下列形式：

$$Q_1=A_1\,ds_2\,ds_3\big|_{q_1+dq_1}-A_1\,ds_2\,ds_3\big|_{q_1}\text{。}$$

注意到公式(21)，卽得：

$$\begin{aligned}Q_1&=[H_2H_3A_1\big|_{q_1+dq_1}-H_2H_3A_1\big|_{q_1}]\,dq_2\,dq_3=\\&=\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3A_1)\,dq_1\,dq_2\,dq_3\text{。}\end{aligned}\tag{24}$$

經過其他的相對的稜面的矢通量的差亦可仿照此法算出如下：

$$Q_2=\frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1A_2)\,dq_1\,dq_2\,dq_3,\tag{25}$$

$$Q_3=\frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2A_3)\,dq_1\,dq_2\,dq_3\text{。}\tag{26}$$

把下式的值

$$\iint\limits_S A_n\,dS=Q_1+Q_2+Q_3$$

代入公式(23)，並利用公式(22)，則得在正交曲線坐標系的散度表達式

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3A_1)+\frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1A_2)+\frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2A_3)\right]\text{。}\tag{27}$$

我們假定這場 $\boldsymbol{A}$ 是有勢場，就是說

$$\boldsymbol{A}=\operatorname{grad}u\text{。}\tag{28}$$

於是

$$A_1=\frac{\partial u}{\partial s_1}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1};\quad A_2=\frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2};\quad A_3=\frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}。\tag{29}$$

把 A_1, A_2 與 A_3 的表達式(29)代入(27)式,即得拉普拉斯運算子的表達式如下:

$$\Delta u=\operatorname{div}\operatorname{grad}u=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right]。\tag{30}$$

可見在正交曲線坐標 q_1, q_2 及 q_3 內,拉普拉斯方程可以改寫如下:

$$\Delta u=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right\}=0。\tag{31}$$

現在來考慮兩個特殊的情形。

1. 球坐標 在這情形下, $q_1=r$, $q_2=\theta$, $q_3=\varphi$, 而且變換式(15)的形式如下:

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta。$$

現計算 ds^2 如下:

$$ds^2=(\sin\theta\cos\varphi\,dr+r\cos\theta\cos\varphi\,d\theta-r\sin\theta\sin\varphi\,d\varphi)^2+$$
$$+(\sin\theta\sin\varphi\,dr+r\cos\theta\sin\varphi\,d\theta+r\sin\theta\cos\varphi\,d\varphi)^2+$$
$$+(\cos\theta\,dr-r\sin\theta\,d\theta)^2;$$

去括弧並化簡後,得:

$$ds^2=dr^2+r^2\,d\theta^2+r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2,$$

就是, $$H_1=1,\quad H_2=r,\quad H_3=r\sin\theta。$$

把 H_1, H_2 及 H_3 的值替入公式(31),得球面坐標系的拉普拉斯方程:

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right]=0,$$

最後得:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0\text{。} \tag{32}$$

2. 柱坐標 在這種情形下，$q_1=\rho$, $q_2=\varphi$, $q_3=z$;

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z,$$

所以
$$H_1=1,\quad H_2=\rho,\quad H_3=1\text{。}$$

柱坐標拉普拉斯方程有下列的形式：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\text{。} \tag{33}$$

倘使所求函數 u 不依賴於 z，則方程(33)還可簡化成：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0\text{。} \tag{34}$$

4. 拉普拉斯方程的一些特解 拉普拉斯方程的具有球對稱或柱對稱的解(即僅含一個變量 r 或 ρ 的解)最值得注意。

拉普拉斯方程的球對稱的解 $u=U(r)$ 將自下列的常微分方程

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right)=0$$

定出。積分這方程後，則得：

$$U=\frac{C_1}{r}+C_2,$$

此處 C_1 與 C_2 是任意常數。例如說，令 $C_1=1$, $C_2=0$ 則得函數

$$U_0=\frac{1}{r}, \tag{35}$$

這函數 U_0 通常叫做空間拉普拉斯方程基本解。

與前類似，令

$$u=U(\rho),$$

並利用方程 (33) 或 (34)，我們可以找到柱對稱或者(當只含二自變量時)圓對稱的解，其形狀如下：

$$U(\rho)=C_1\ln\rho+C_2\text{。}$$

倘使選擇 $C_1=-1$, $C_2=0$ 則有：

$$U_0=\ln\frac{1}{\rho}。\tag{36}$$

函數 $U_0(\rho)$ 通常叫做平面拉普拉斯方程(對於二自變量)的基本解。

函數 $U_0=\frac{1}{r}$,除 $r=0$ 一點爲例外,處處能滿足 $\Delta u=0$,在點 $r=0$,函數 U_0 爲(正)無窮大。除了比例因子不計外,U_0 與放置在坐標原點的電荷 e 的電場一致;這電場的勢等於:

$$u=\frac{e}{r}。$$

與前面的情形類似,函數 $\ln\frac{1}{\rho}$ 處處滿足拉普拉斯方程,只有點 $\rho=0$ 是例外,在該點上這函數變爲(正)無窮大,而且除了常數因子不計外,這函數是與在原點放置的點電荷 e 的電場一致,這場的勢是等於:

$$u=2e_1\ln\frac{1}{\rho}。$$

此處 e_1 是按單位長度計算的電荷密度。這函數在調和函數理論中有很大的意義(詳細情况參看本章的 §5, 第 2 段)。

5. 調和函數與複變量的解析函數 拉普拉斯的二維問題的一般解法,是利用複變量函數的方法。

設

$$w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$$

是複自變量 $z=x+iy$ 的某一函數,而且 u 與 v 都是實變量 x 及 y 的實函數。具有導數

$$\frac{dw}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

的函數 w 最值得我們注意,這樣的函數就叫做解析函數。顯然,增量 $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ 能以多種方式趨向於零。一般說,對於 Δz 的趨於零的每一種方式,$\frac{\Delta w}{\Delta z}$ 可能有不同的極限值。可是假使函數 $f(z)$ 是解析函

數，那麼極限 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=f'(z)$ 與 Δz 趨向於零的路線無關。

解析函數的必要與充分條件就是——所謂柯西-黎曼條件：

$$\left.\begin{aligned} u_x&=v_y,\\ u_y&=-v_x。\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

我們可以推得這條件如下：

假定 $w=u+iv=f(z)$ 是一個解析函數。計算出它的導數

$$w_x=u_x+iv_x=\frac{\partial w(z)}{\partial z}z_x=\frac{dw}{dz},$$

$$w_y=u_y+iv_y=\frac{\partial w(z)}{\partial z}z_y=i\frac{dw}{dz}。$$

自上面二等式所定出的 $\frac{dw}{dz}$ 的值，必須相等，由此得：

$$u_x+iv_x=v_y-iu_y=\frac{dw}{dz}。$$

由此可知柯西-黎曼條件是必要的。我們不預備詳細證明這條件的充分性。

在複變函數論中證明：若一函數在 $z=x+iy$ 平面的某一區域 G 是解析的，那麼這函數在區域 G 內必有各階的導數，而且它能展開爲冪級數。特別是，對於這樣的函數來說，$u(x, y)$ 與 $v(x, y)$ 有對於 x 與 y 的連續二階導函數。

把公式(37)的第一個等式對 x 微分，把第二個等式對 y 微分，相加後得：

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \quad 或 \quad \Delta_2 u=0。$$

用類似的方法，但改換微分法的次序，則得：

$$v_{xx}+v_{yy}=0 \quad 或 \quad \Delta_2 v=0。$$

可見解析函數的實部與虛部都滿足拉普拉斯方程。通常說，滿足柯西-黎曼條件的 u 與 v 是共軛的調和函數。

現在考察如下的變換式

$$\left.\begin{array}{l} x=x(u, v), \\ y=y(u, v), \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} u=u(x, y), \\ v=v(x, y), \end{array}\right\} \tag{38}$$

這變換把平面 (x, y) 的某一區域 G 映照到 (u, v) 平面的某一區域 G'，使區域 G 的每一個點與區域 G' 的一個定點對應；反過來說，區域 G' 的每一點亦與區域 G 一個定點相對應。

設

$$U=U(x, y)$$

是定義於區域 G 內部的某一實函數，並設它具有對 x 與對 y 的連續二階導函數。

讓我們來闡明：經過這變換後，函數 $U[x(u, v), y(u, v)]=\widetilde{U}(u, v)$ 的拉普拉斯運算子是怎樣變化的。

$$U_x=\widetilde{U}_u u_x+\widetilde{U}_v v_x, \quad U_y=\widetilde{U}_u u_y+\widetilde{U}_v v_y,$$

$$U_{xx}=\widetilde{U}_{uu}u_x^2+\widetilde{U}_{vv}v_x^2+2\widetilde{U}_{uv}u_x v_x+\widetilde{U}_u u_{xx}+\widetilde{U}_v v_{xx},$$

$$U_{yy}=\widetilde{U}_{uu}u_y^2+\widetilde{U}_{vv}v_y^2+2\widetilde{U}_{uv}u_y v_y+\widetilde{U}_u u_{yy}+\widetilde{U}_v v_{yy},$$

把以上二式相加後，得：

$$\begin{aligned} U_{xx}+U_{yy}=&\widetilde{U}_{uu}(u_x^2+u_y^2)+\widetilde{U}_{vv}(v_x^2+v_y^2)+ \\ &+2\widetilde{U}_{uv}(u_x v_x+u_y v_y)+\widetilde{U}_u(u_{xx}+u_{yy})+\widetilde{U}_v(v_{xx}+v_{yy})。\end{aligned} \tag{39}$$

若 u 與 v 是共軛調和函數，則變換(38)就相當於：由解析函數

$$w=f(z)=u+iv \quad (z=x+iy) \tag{40}$$

所作的變換。

在這情況下，由於 u 與 v 滿足柯西-黎曼條件，下面幾個關係式必成立：

$$u_x^2+u_y^2=u_x^2+v_x^2=v_y^2+v_x^2=|f'(z)|^2,$$

$$u_x v_x+u_y v_y=0。$$

公式(39)因此取得形式

$$U_{xx}+U_{yy}=(\widetilde{U}_{uu}+\widetilde{U}_{vv})|f'(z)|^2 \tag{41}$$

或

$$\Delta_{u,v}\widetilde{U}=\frac{1}{|f'(z)|^2}\Delta_{x,y}U, \tag{41'}$$

由此推得：只要假定$|f'(z)|^2\neq 0$，則區域 G 的調和函數 $U(x, y)$，經過變換(40)後在區域 G' 仍爲一個調和函數 $\widetilde{U}=\widetilde{U}(u, v)$。

6. 逆矢徑變換　當研究調和函數時，時常採用逆矢徑變換。所謂半徑是 a 的球的逆矢徑變換是指這樣的變換——它使每一點 M 與具有下列二性質的一點 M' 對應：

（1）M 點與 M' 點都在自坐標原點射出的同一射線上。

（2）M 點的矢徑 r 與 M' 點的矢徑 r' 間的關係如下：

$$r'r=a^2 \text{ 或 } r'=\frac{a^2}{r}。 \tag{42}$$

以後我們將假定 $a=1$，只要改變長度的尺寸這是總可以做到的。

讓我們來證明：含二自變量的調和函數 $u(\rho, \varphi)$ 經逆矢徑變換後變爲另一個調和函數：

$$v(\rho', \varphi)=u(\rho, \varphi), \quad \text{此處} \quad \rho=\frac{1}{\rho'}。 \tag{43}$$

事實上，函數 $u(\rho, \varphi)$ 滿足下列的方程

$$\rho^2\Delta_{\rho,\varphi}u=\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,$$

所以函數 $v\left(\frac{1}{\rho}, \varphi\right)$ 看作變量 ρ, φ 的函數時也應該滿足這方程

$$\rho^2\Delta_{\rho,\varphi}v=\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}=0。$$

化到變量 ρ' 與 φ，則得：

$$\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}=\rho\frac{\partial v}{\partial\rho'}\frac{\partial\rho'}{\partial\rho}=-\rho'\frac{\partial v}{\partial\rho'},$$

所以

$$\rho'^2\Delta_{\rho',\varphi}v=\rho'\frac{\partial}{\partial\rho'}\left(\rho'\frac{\partial v}{\partial\rho'}\right)+\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}=0,$$

由此推得 $v(\rho', \varphi)$ 必滿足方程 $\Delta_{\rho',\varphi}v=0$。

現在來討論含三個自變量的情況，我們將證明：若函數 $u(r, \theta, \varphi)$