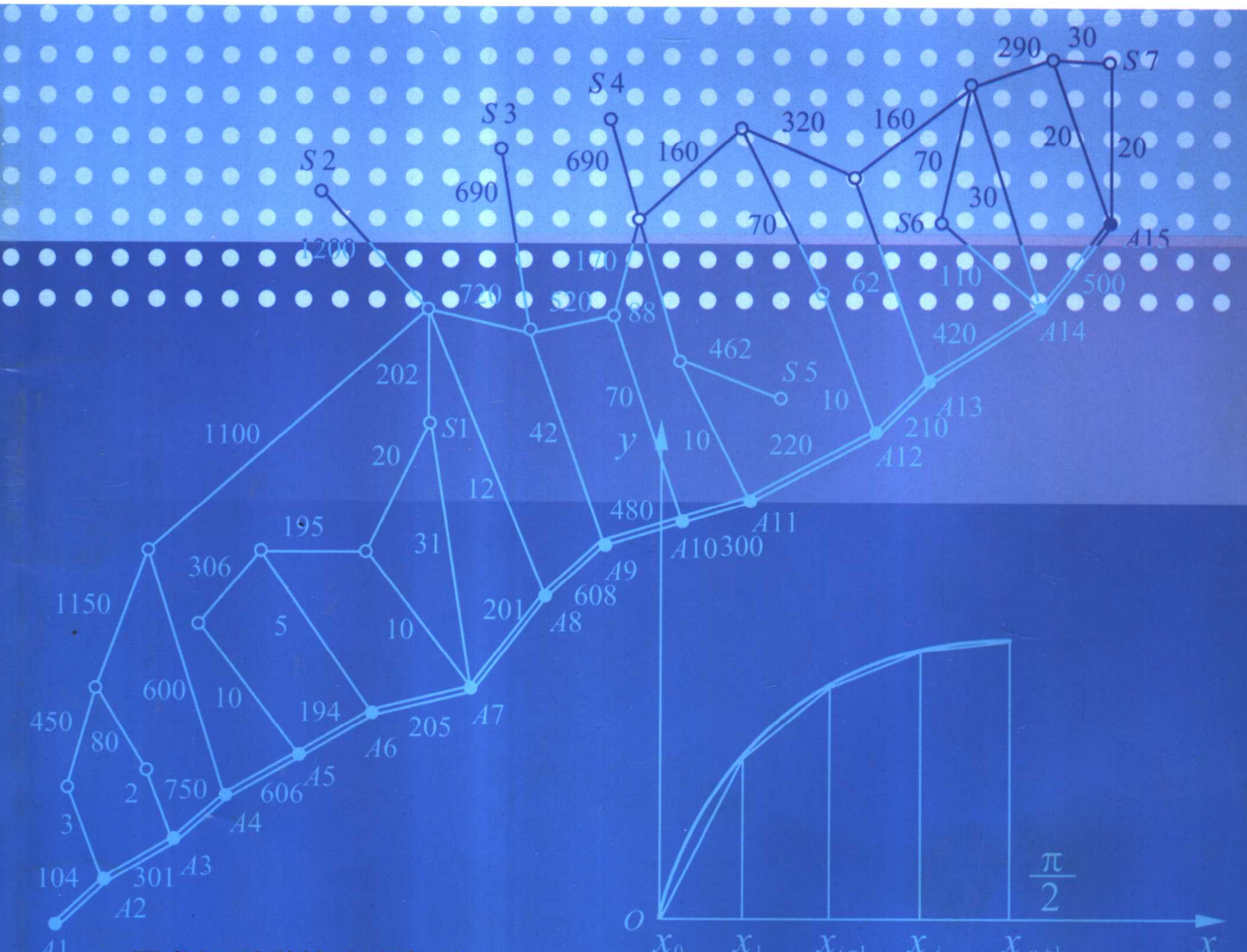
高等学校数学改革教材

数学实验

Mathematics Experiment

主编 朱捷 徐晶 蔡吉花



黑龙江科学技术出版社

高等学校数学改革教材

数 学 实

Mathematics Experiment

主 编 朱 捷 徐 晶 蔡吉花

黑龙江科学技术出版社
中国·哈尔滨

图书在版编目(CIP)数据

数学实验/朱捷,徐晶,蔡吉花主编.—哈尔滨:黑龙江科学技术出版社,2005.6

ISBN 7-5388-4851-7

Ⅰ.数... Ⅱ.①朱...②徐...③蔡... Ⅲ.高等数学-实验-高等学校-教材 Ⅳ.013-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 029514 号

责任编辑 梁祥崇

封面设计 洪 冰

数学实验

SHUXUE SHIYAN

主 编 朱捷 徐晶 蔡吉花

出 版 黑龙江科学技术出版社

(150001 哈尔滨市南岗区建设街 41 号)

电话(0451)53642106 电传 53642143(发行部)

印 刷 黑龙江省文化印刷厂

发 行 黑龙江科学技术出版社

开 本 787×1092 1/16

印 张 16

字 数 355 000

版 次 2005 年 5 月第 1 版·2005 年 5 月第 1 次印刷

印 数 1-1 000

书 号 ISBN 7-5388-4851-7/G·499

定 价 28.00 元

《数　学　实　验》
编委会名单

主　编　朱　捷　徐　晶　蔡吉花

副主编　杨春玲　刘彦慧　王　葳

前　言

数学实验是计算机技术和数学软件引入教学后出现的新事物，是数学教学体系、内容和方法改革的一项尝试。

随着计算机的飞速发展，在自然科学、工程技术、经济管理等各领域中，数学日益成为解决实际问题的有利工具。在这种形势下，大学数学教育除了培养学生的逻辑推理能力、几何直观能力和运算能力外，还应注重培养对数学的应用意识、创新能力和科学计算能力。数学实验为综合培养这些能力提供了用武之地。

在大学中开设数学实验课，是教育部组织的"高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划"课题组的主要研究成果。在数学实验中，由于计算机的引入和数学软件包的应用，为数学的思想和方法注入了更多、更广泛的内容，使学生摆脱了繁重的数学演算和数值计算，有更多时间去做创造性的工作，促进了数学同其他学科之间的结合。

数学实验是一门新的改革课程。对这门课程的定位、内容选取和教学方式等诸多方面都有不同的理解与多样选择。结合多年从事科研和教学的经验，我们编写了这本数学实验教材。全书共 9 个部分，内容包括：微积分实验、线性代数实验、数理统计实验、数值分析实验、最优化实验、复变函数实验、积分变换实验、矢量分析与场论和数学建模实验。数学实验的目的是使学生掌握数学实验的基本思想和方法，学会借助数学软件解决数学基础课的数学实验问题，强调以学生动手为主，在教师指导下注重用所学的数学知识和计算机技术解决实际问题，使学生在做数学实验中能对所学数学基础课的概念、内容有更深入的体验和理解。全书层次清晰、重视实用，便于教学和自学。本教材的出版，吸取了以往教材之精华，弥补了以往同类教材中数学基础课部分实验的不足，是一本较系统、全面地介绍数学基础课方面的数学实验教科书。

本书在编写过程中，参阅了许多文献和数学软件的资料，特别得到了母丽华副教授、刘照升副教授的指导和帮助，在此向文献及资料的作者和关心支持本书的有关领导、专家和同行表示诚挚的谢意。

本书共 9 个部分。1;4;9(9.1,9.2,9.3,9.4)由徐晶编写，2 由蔡吉花编写，3;5;9(9.5,9.6,9.7,9.11)由朱捷编写，6;7;8;9(9.8,9.9,9.10,9.12)由苑延华编写。

由于数学实验课尚处于摸索阶段，加之作者水平有限，书中难免会存在一些不当之处，恳请各位专家及同行批评指正。

编　者

2005 年 3 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

1 微积分实验

1.1 函数作图

1.1.1 实验目的

① 学习 Mathematica 软件的基本操作。

② 掌握 Mathematica 软件的绘图命令，通过图形来认识函数，并运用函数图形来观察和分析函数的有关特性，建立数形结合的思想。

1.1.2 原理与方法

(1) 函数的几种表示形式

① 显函数　用 $y = f(x)$ 这种方式表达的函数称为显函数。其特点是等号左端为因变量 y，右端为含自变量 x 的算式 $f(x)$。当 x 在某一集合内取定任何一个值时，由这个算式能确定对应的函数值 y。

② 隐函数　在方程 $F(x,y) = 0$ 中，当 x 在某一区间内取定任何一个值时，相应地总有满足方程的惟一的 y 值存在，这时就称方程 $F(x,y) = 0$ 在该区间内确定了一个 y 关于 x 的隐函数。同时满足方程的 x 值和 y 值就是这个隐函数的一组对应值。

③ 由参数方程所确定的函数　一般说，若参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

确定 y 与 x 之间的函数关系，则称此函数为由参数方程所确定的函数。

(2) 平面曲线的参数方程与极坐标方程的转化

若已知一平面曲线的极坐标方程为 $r = r(\theta)$，则其参数方程为

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \end{cases} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)。$$

1.1.3 内容与步骤

(1)Mathematica 的启动与退出

Mathematica 的启动在 Windows 下，启动和结束 Mathematica 的方式与其他 Windows 应用程序相同，只需找到 Mathematica 图标，单击它即可。此时会出现 Mathematica 初始屏，显示版本信息和用户信息。等待一秒即可进入 Mathematica 主窗口，并出现第一个 notebook 窗口(Untitled - 1.nb)，可以开始在此窗口输入命令进行计算工作。

例如，输入 3!后，按 Insert 键，屏幕上就会显示出

In[1]: = 3!

Out[1] = 6

Mathematica 系统将输入命令编号，前面加上 In[a]: = 的信息(a 代表输入命令的序号)，输

出结果前也将加上提示符 Out[a] = 。

特别需要注意的是图形方式下的Mathematica的命令并不是以回车符(Enter)结束的,也就是说,您可以一次输入多行命令,回车并不会使系统执行命令。执行命令的方式是按 Insert 键或 Shift + Enter 键或数字键盘的 Enter 或者按一下执行的快捷按钮。

Mathematica 的退出与一般应用软件一样,退出 Mathematica 也有两种方法:

① 单击右上方中的☒按钮。

② 选"File"菜单,再选"Exit"菜单项。

(2) 利用 Mathematica 作图

Mathematica 的基本作图函数是 Plot[ ], 由它派生出的有 Plot3D[ ],ParametricPlot[ ], ParametricPlot3D[ ],DensityPlot[ ] 等。此外, 还有一些相关的函数, 如 Show[ ],Graphics[ ], ListPlot[ ]。

① 平面作图 Plot[ ]。

基本形式是:Plot[函数表达式,{自变量名,自变量最小值,自变量最大值}]。

例如:Plot[Sin[x],{x, - 2Pi,2Pi}](图 1 - 1),其中 Pi 表示 π。也可以将几个函数的图形同时画在一张图中,例如:Plot[{Sin[x],Cos[x]},{x, - 2Pi,2Pi}](图 1 - 2)。注意不要忘记用一对"{}"将这几个函数括起来,使之构成一个"表"。

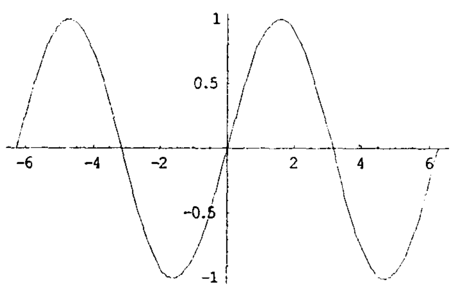


图 1 - 1

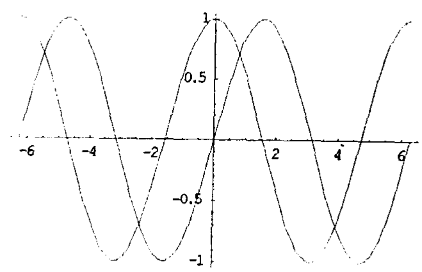


图 1 - 2

若画分段函数的图形可以使用条件语句。例如若画分段函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, \text{当 } x \neq 0 \\ 0 \quad , \text{当 } x = 0 \end{cases}$$

的图形可以输入以下命令:

f[x_]: = x^2Sin[1/x]/;x! = 0;f[x_]: = 0/;x = 0;Plot[f[x],{x, - 1,1}]。

② 三维作图 Plot3D[ ]。

基本形式是:Plot3D[f[x,y],{xmin,xmax},{ymin,ymax}]。

与二维的差别是函数名后多了 3D 两字,内部多了一个自变量,用法是一样的。例如:Plot3D[Sin[x] * Cos[y],{x,0,Pi},{y, - Pi,Pi}](图 1 - 3)。

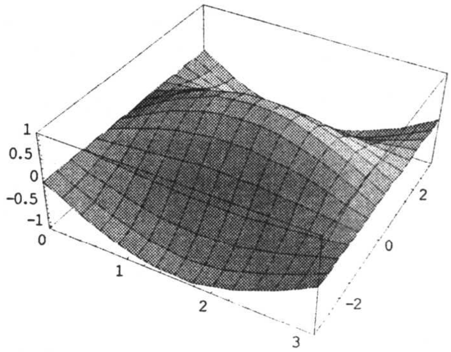


图 1 - 3

③ 图形修饰。

实际应用中为使图形更生动，或者更清楚地说明问题，往往需要作一些修饰，如线条颜色、图形范围、坐标形式、视点、亮度等。Mathematica 提供了大量的词类参数，只要将它们加自变量之后即可。常用的有：

(i) 图形颜色。PlotStyle → {RGBColor[r,g,b]}。

其中 r,g,b 分别是 0 ~ 1 之间的实数，表示"红""绿""蓝"三种颜色的成分。例如：

Plot[{Sin[x],Sin[2x]},{x,0,2Pi},PlotStyle → {RGBColor[1,0,0],RGBColor[0,1,0]}]

(ii) 图形范围。PlotRange → {{xmin,xmax},{ymin,ymax}}，或 PlotRange → All

该参数可指定输出图形的范围，它可使细节处更清晰。例如：

Plot[x^4 + Sin[10x],{x,0,5},PlotRange → {{0,1},{-1,2}}]

(iii) 坐标轴的修饰。

指定坐标轴的颜色 AxesStyle → {RGBColor[r,g,b]}。与(i) 的用法一样。

样点的个数 PlotPoints → a,a 表示样点的个数。数字越大，图形就越清晰，运行需要的时间就越长。

指定坐标轴的名称 AxesLable{横轴名称,纵轴名称}。

(iv) 视点。ViewPoint → {x,y,z}。

只适用与三维图形的描绘，其中{x,y,z} 的缺省值为{1.3, -2.4,2}。例如：

Plot3D[1/((x - 1)^2 + (y - 2)^2),{x, -2,2},{y, -3,3},
    AxesLabel → {"x","y","z"},PlotPoints → 120,ViewPoint{1.2,1.2,1.2}]

④ 参数图形函数 ParametricPlot[ ],ParametricPlot3D[ ]。

基本形式是：ParametricPlot[{横轴变量函数,纵轴变量函数},{参数,参数最小值,参数最大值}]。

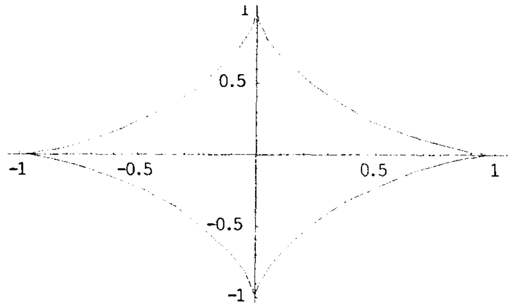
例如：星形线，摆线的参数方程分别为

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

输入命令：

ParametricPlot[{(Cos[t])^3,(Sin[t])^3},{t,0,2Pi}]
ParametricPlot[{t - Sin[t],1 - Cos[t]},{t,0,4Pi}]

执行可得以上两参数方程图形，观察图 1 - 4 的特点。



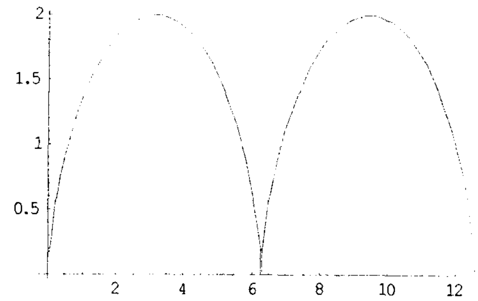


图 1 - 4

若画极坐标图形,只需将极坐标转换成参数方程即可。例如:四叶玫瑰线的极坐标方程是 $r = \sin 2t$。输入命令 ParametricPlot[{Sin[2t] * Cos[t],Sin[2t] * Sin[t]},{t,0,2Pi}],即可画出四叶玫瑰线的图形。其中 * 表示乘法,另外还可以用空格表示相乘。

⑤ 等高线和密度线 ContourPlot,DensityPlot。

基本形式是:ContourPlot[f[x,y],{xmin,xmax},{ymin,ymax}];

DensityPlot[f[x,y],{xmin,xmax},{ymin,ymax}]

为了从图形上直观的了解隐函数的定义域、值域、单调性、凹凸性、周期性以及其他一些特殊性质,有时需要画出隐函数的图形。由于不容易得到或根本无法得到隐函数所确定的函数关系,因此不能使用 *Plot* 命令来画图。不过,我们可以利用绘制等高线的方法,绘出隐函数的函数曲线。下面以一个例子(双纽线图 1 - 5)来说明这一过程。

输入命令:

```
ContourPlot[(x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2,{x, - 1,1},{y, - 1,1},PlotPoints → 300,
    Contours → {0},ContourShading → False,AspectRatio → 1/2]
```

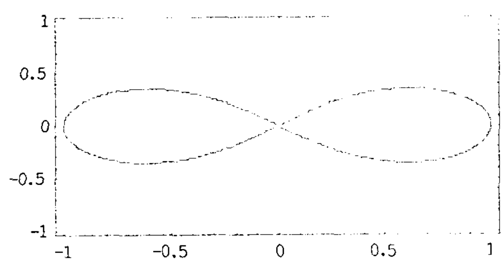


图 1 - 5

在 ContourPlot 命令中的第一项是隐函数方程 $F(x,y) = 0$ 左端的函数;第二、第三项是所要了解的函数的范围;第四项是样点的个数;第五项是所要画出的等高线的值,即,$z = F(x,y)$,为了画出由隐函数方程 $F(x,y) = 0$ 所确定的函数的图形,只需取 $z = 0$。ContourShading 是指不同等高线区域是否要用明暗不同的颜色加以区分,这里取 False,表示不加以区分。AspectRatio 表示图形的输出比例,使图形更美观。当然,我们知道双纽线的极坐标方程是 $r^2 = \cos 2\theta$,也可以利用前面讲过的参数图形函数画出它的图形。

⑥ 散点图的绘制。

在许多实际问题中,我们并不知道函数的实际表达式,而仅仅能测量到函数的某些型值点,这些型值点的值可以列成数据表,这就是函数的列表表示法,画出的图形就是散点图(图 1 - 6)。

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

基本形式是：ListPlot[ ]。

例如：画出坐标为(i, i^2)，$(i = 1, 2, \cdots, 10)$ 的散点图，并划出折线图。

输入命令：

```
t1 = Table[i^2, {i,10}];g1 = ListPlot[t1,PlotStyle→PointSize[0.02]];
g2 = ListPlot[t1,PlotJoined→True];Show[g1,g2]
```

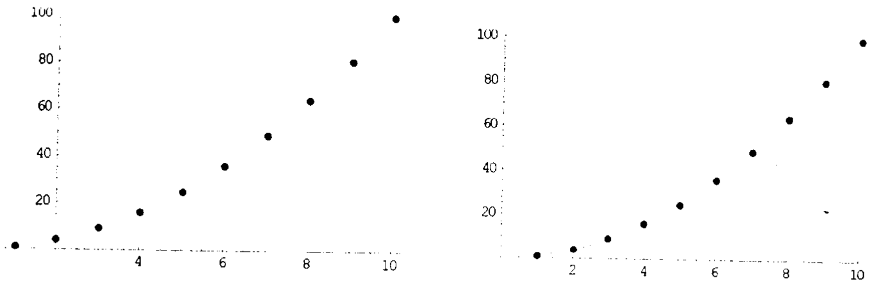


图 1－6

通过上面对 Mathematica 软件作图功能的一个简单介绍，我们看到 Mathematia 的作图函数非常简单，但功能是强大的。并且可以使你方便地指定各种视角、比例、明暗、颜色，从各个角度进行观察。

注意事项

① 利用 Mathematica 软件作图时，每个语句及其中函数的第一个字符必须大写。

② 如果函数的图形在某一点处回转的次数特别多时，图中有些模糊，这是由于在回转多的地方尽量取多的样点，但样点不会无穷多而造成的。例如：函数 $y = \sin \frac{1}{x}$ 就是如此。

③ 由于有些函数不是一一对应的，用上面的方法无法画出它们的图形，这时只能利用参数。此外还有些图形，是只能用参数来画的，比如空间曲线，在计算机上不接受“两个曲面的交线”这种表示。用参数的关键在于找出合适的参数表示，尤其是不能有奇点，最好也不要用到开方。所以找的参数最好是有几何意义的。当然这也不可一概而论，最好多积累经验。

练 习 题

1. 画出下列函数的图形。

(1) $y = \sqrt{1 + x^2}, x \in [-5, 5]$　　(2) $r = 1 - \cos\theta$

(3) $y = \begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t) \\ y = 2(\sin t - t\cos t) \end{cases}$，$0 \le t \le 4\pi$（平面螺线）　(4) $y = \begin{cases} x\sin \frac{1}{x} & 当\ x \neq 0 \\ 0 & 当\ x = 0 \end{cases}$

2. 画出下列常见曲面的图形，其中的参数自定，记录输入方程时所选参数的大小。

(1) 平面：$z = ax + by + c$

(2) 椭球面：$\begin{cases} x = a\sin u \sin v \\ y = b\sin u \sin v, u \in [0, \pi], v \in [0, 2\pi]（当\ a = b = c\ 时为球面） \\ z = c\cos u \end{cases}$

(3) 椭圆抛物面 $\begin{cases} x = au\sin v \\ y = bu\cos v, u \in [0, r], v \in [0, 2\pi] \\ z = u^2 \end{cases}$

(4) 双曲抛物面:$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \dfrac{2}{5}(u^2 - v^2) \end{cases}$ $, u \in [-4,4], v \in [-4,4]$

(5) 圆柱面$\begin{cases} x = a\cos u, \\ y = a\sin u \\ z = v \end{cases}$ $, u \in [0,\pi], v \in [b,c]$

(6) 单叶双曲面:$\begin{cases} x = a\sec u\sin v \\ y = b\sec u\cos v, u \in [-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}], v \in [0,2\pi] \\ z = c\tan u \end{cases}$

(7) 双叶双曲面:$\begin{cases} x = a\sqrt{u^2 - 1}\sin v \\ y = b\sqrt{u^2 - 1}\cos v, |u| \in [1,5], v \in [0,2\pi] \\ z = cu \end{cases}$

(8) 圆锥面$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v, u \in [-a,a], v \in [0,2\pi] \\ z = u \end{cases}$

3.绘制空间曲线$\begin{cases} x = \sin t \\ y = 2\cos t, t \in [0,12] \\ z = t/2 \end{cases}$的图形。

4.画出旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与上半球面 $z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 相交所围成的几何体的图形。

5.画出点列 $x_n = \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ $(n = 1,2,\cdots,100)$ 的散点图。

1.2 极限

1.2.1 实验目的

① 加深对极限概念的理解,了解函数极限与数列极限间的关系,进一步理解无穷小的概念和收敛速度问题。

② 掌握 Mathematica 软件的求极限的命令,从直观上揭示极限的本质。

1.2.2 原理与方法

① 数列的极限　如果存在常数 a,使得对任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在自然数 N,只要 $n > N$,不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立,那么称常数 a 是数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 的极限,或者称数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 a,记为,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,或者 $x_n \to a(n \to \infty)$。如果这样的常数 a 不存在,就说数列没有极限,或称数列发散。

② 函数的极限　如果存在常数 A,使得对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正数 δ,只要 f 的定义域中的点 x 满足不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$,对应的函数值 $f(x)$ 就能满足 $|f(x) - A| < \varepsilon$,那么常数 A 就称作函数$f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限,简称 A 是$f(x)$ 在 x_0 处的

极限,记为$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,或者$f(x) \to A(x \to x_0)$。

③ 数列极限与函数极限的关系　如果函数$f(x)$在x_0的某去心邻域$0 < |x - x_0| < \delta$内有定义,则极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$存在的充要条件是,对任何以$x_0$为极限,且含于$0 < |x - x_0| < \delta$内的数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$,都有$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$。

④ 收敛速度　设$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$,称$x_n$接近其极限$a$的快慢程度为$x_n$的收敛速度。

⑤ 无穷小　如果当$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时函数$\alpha(x)$的极限为零,那么$\alpha(x)$称做$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时的无穷小。以0为极限的数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$也称为$n \to \infty$时的无穷小。

1.2.3　内容与步骤

(1) 求极限

① 数列的极限　Limit[x[n],n → Infinity],它的功能是求数列x_n的极限,即计算$\lim\limits_{n \to \infty} x_n$。

② 函数的极限　Limit[f[x],x → x0],它的功能是求函数$f(x)$当$x \to x_0$时的极限,即计算$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$。

③ 函数在一点处的单侧极限。

Limit[f[x],x → x0,Direction → + 1],它的功能是求函数$f(x)$在x_0处的右极限,即计算$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$。

Limit[f[x],x → x0,Direction → - 1],它的功能是求函数$f(x)$在x_0处的左极限,即计算$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$。

例1　画出数列$x_n = \sqrt[n]{n}$的散点图,并求出它的极限。

解　首先画出数列的散点图,观察数列的趋向,然后求出极限。输入命令:t = N[Table[n^(1/n),{n,100}]];

ListPlot[t,PlotStyle → {RGBColor[1,0,1],PointSize[0.015]}],Limit[n^(1/n),n → Infinity]

执行上述命令,得数列的散点图(图1-7)和极限值为1。

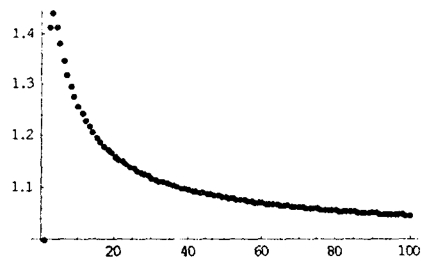


图1-7

例2　求$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$。

解　输入命令:

Limit[(E^x - E^(- x) - 2x)/(x - Sin[x]),x → 0]

执行可得所求极限为2。

(2) 函数极限与数列极限的关系

例3　考察函数极限$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$与数列$n \sin \dfrac{1}{n}$,$\dfrac{n^2}{n+1} \sin \dfrac{n+1}{n^2}$的极限间的关系。

解　输入命令,将函数图形与其子数列的图形加以对照(图1-8)。

```
f[x_]: = Sin[x]/x;t1 = Table[{1/n,n * Sin[1/n]},{n,1,30}];
t2 = Table[{1/n,n^2/(n + 1) * Sin[(n + 1)/n^2]},{n,1,30}];
gt1 = ListPlot[t1,PlotStyle → PointSize[0.02]];
```

gt2 = ListPlot[t2,PlotStyle → PointSize[0.02]];

g = Plot[f[x],{x, - 1,1},PlotStyle → RGBColor[1,0,0]];

Show[g,gt1];

Show[g,gt2]。

可以看出子数列的图形只是函数图形上的一部分,其极限值为 1。

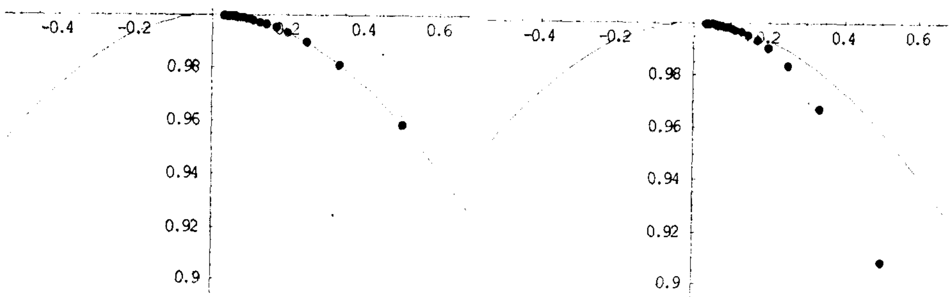


图 1 - 8

(3) 收敛速度与无穷小的阶

例 4 观察以下函数当时的变化趋势,并应用你所学的知识给予合理的解释。

①x^2 与 $2x$ ②$\sin x$ 与 x ③$1-\cos x$ 与 x^2 ④$\tan x-\sin x$ 与 x^3

解 输入命令,分别作出它们的图形(图 1 - 9)。

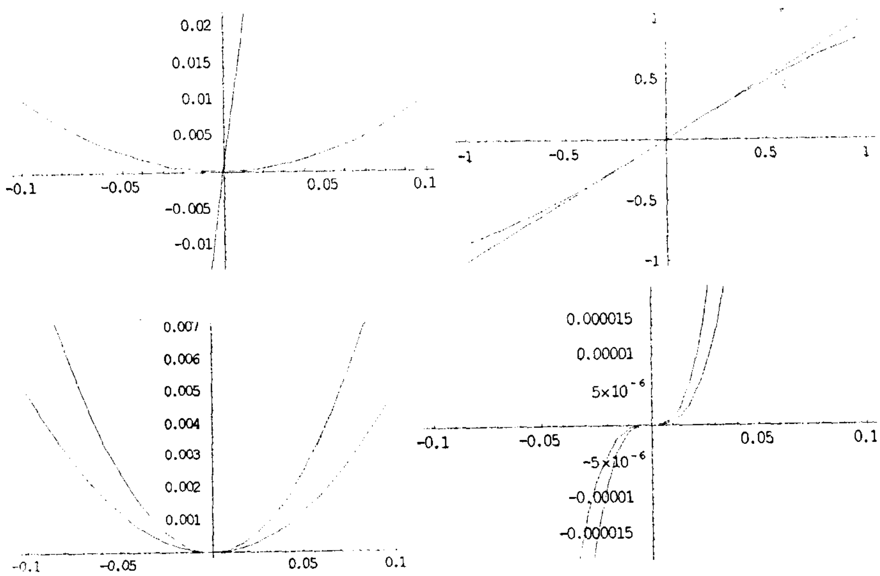


图 1 - 9

Plot[{x^2,2x},{x, - 0.1,0.1},PlotStyle → {RGBColor[1,0,0],RGBColor[0,0,1]}];

Plot[{Sin[x],x},{x, - 1,1},PlotStyle → {RGBColor[1,0,0],RGBColor[0,0,1]}];

Plot[{1 - Cos[x],x^2}, {x, - 0.1,0.1},PlotStyle → {RGBColor[1,0,0],RGBColor[0,0,1]}];

Plot[{Tan[x] - Sin[x],x^3},{x, - 0.1,0.1},PlotStyle → {RGBColor[1,0,0],RGBColor[0,0,1]}]。

对图形的解释留给读者思考。

注意事项

① 利用 Limit[] 语句求极限时,必须指明趋近方向,否则对于某些极限求不出正确结果。

例如 Limit[E^(- 1/x),x→0],它有时求不出极限,而有时求出的结果又是错的,若指明方向,则可求出正确结果:

Limit[E^(- 1/x),x→0,Direction→+ 1];

Limit[E^(- 1/x),x→0,Direction→- 1]。

前者执行的结果是 0,后者的极限不存在。

② 在无穷振荡点处的极限不存在,但它却能求出函数无穷振荡时可能取值的范围。

例如 Limit[Sin[1/x],x→0] 的结果是 Interval[{- 1,1}],即为一个实区间[- 1,1]。

练　习　题

1.已知数列 $x_1 = 2, x_n = \sqrt{2+\sqrt{x_{n-1}}}$,画出它的散点图,并求它的极限。

2.求下列极限。

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(x\sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\sin x)$　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

1.3　导数及其应用

1.3.1　实验目的

① 理解导数、微分的概念。

② 熟悉 Mathematica 软件的求导数和求微分命令。

③ 从几何直观上理解微分中值定理。

1.3.2　原理与方法

(1) 导数

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义,当给 x_0 一个增量 $\triangle x, x_0 + \triangle x \in U(x_0)$ 时,相应地,函数 y 取得增量 $\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$。如果极限

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}$$

存在,那么称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导,并称该极限为函数在点 x_0 处的导数,记为 $f'(x_0)$, $y'|_{x=x_0}$, $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$。

(2) 微分

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义,当给 x_0 一个增量 $\triangle x, x_0 + \triangle x \in U(x_0)$ 时,如果相应的函数值的增量 $\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$ 可以表示为:

$$\triangle y = A\triangle x + o(\triangle x)$$

其中 A 是与 x_0 有关而不依赖于 x 的常数,$o(\triangle x)$ 是比 $\triangle x$ 高阶的无穷小量(当 $\triangle x\to 0$ 时),

那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 是可微的，$A\triangle x$ 称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量的增量 $\triangle x$ 的微分，记为 dy，即 $dy=A\triangle x$。

(3) 罗尔定理

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，并且满足条件：$f(a)=f(b)$，那么至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

(4) 拉格朗日中值定理

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，那么至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

(5) 柯西中值定理

如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，并且在开区间 (a,b) 内 $g'(x)\neq 0$，那么至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

1.3.3 内容与步骤

(1) 求导函数

① 显函数的导函数 D[ ]。

求函数 $f(x)$ 对自变量 x 的一阶导函数的基本形式是 D[f,x]；

求函数 $f(x)$ 对自变量 x 的 n 阶导函数的基本形式是 D[f,{x,n}]。

例 1 求函数 $y=\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x+1)$ 的一阶导函数。

解 输入命令：

D[Log[x - 1]/2 - Log[x + 1]/2, x]

执行可得结果为 $\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}$。

例 2 求函数 $y=\sin ax\cos bx$ 在 $x=3$ 处的导数。

解 先求导函数，输入命令：

v = D[Sin[a * x] * Cos[b * x], x]

此时已自定义了一个函数 v 为导函数，可用下面命令得到函数在已知点处的值。

v/.x→3

执行可得结果为 acos3acos3b - bsin3asin3b。

例 3 求函数 $y=x\sin x$ 的五阶导函数。

解 输入命令：

D[(x * Sin[x]), {x,5}]

执行可得五阶导函数为 xcosx + 5sinx。

当求导得到的结果较复杂时，可用函数 Simplify[ ] 来进行简化，以便得到一个较为简单的结果。

例 4 求函数 $y=\mathrm{arsin}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 的二阶导数在 $x=\frac{1}{3}$ 处的值。

解 输入命令：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com