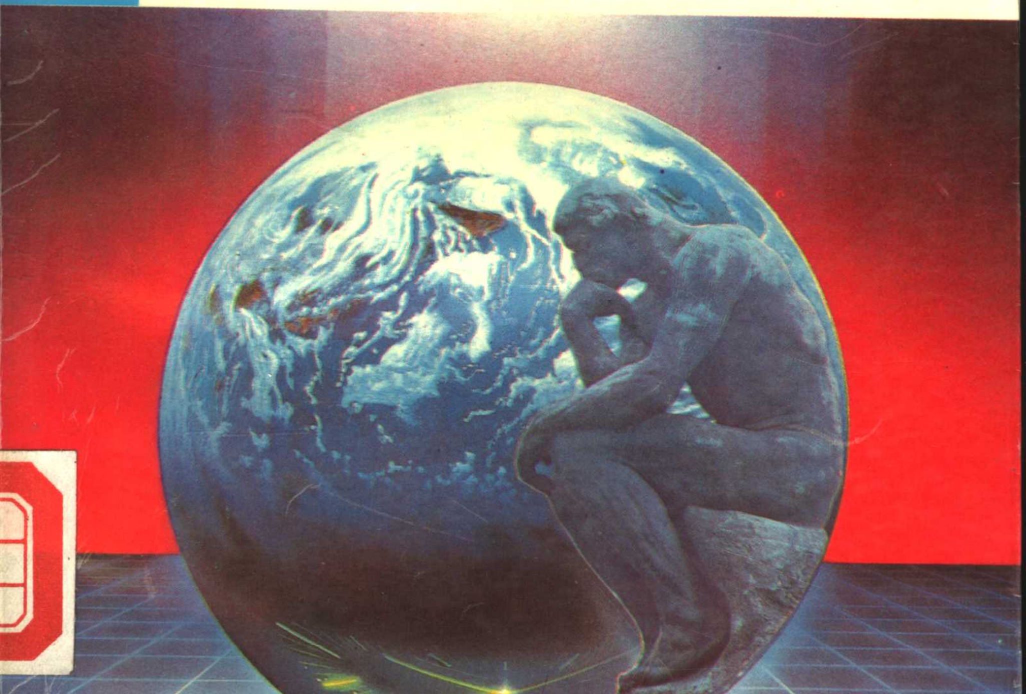
通向大学之路丛书

（第二版）

高中数学解析

刘典权 陆殿豪 编



上海交通大学出版社

通向大学之路丛书(第二版)

高中数学解析

刘典权 陆殿豪 编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书以国家教育委员会颁布的高中数学教学大纲为依据，积作者数十年教学经验，把高中数学的重点和难点提炼出来，加以精析。

全书分代数、立体几何和解析几何三篇，共14章。每章都有四部分：一、基础知识；二、重点与难点；三、例题分析；四、习题。

另附有一套高中数学会考模拟试题和两套高考模拟试题，书末附有全部习题、试题的简解或提示。

本书可供广大高中学生和青年自学者高考复习时使用。

(沪)新登字205号　　高中数学解析

出版：上海交通大学出版社
(上海市华山路1954号·200030)
发行：新华书店上海发行所
印刷：立信常熟印刷联营厂
开本：850×1168(毫米) 1/32
印张：19.375
字数：440,000
版次：1993年12月　第1版
印次：1994年1月　第1次
印数：1—10,000
科目：306—255

ISBN 7-313-01266-7/G·633·6　　定价：12.00元

前　　言

80年代末，我们编撰了《通向大学之路》丛书，深受读者欢迎，成为许多高中学生的主要辅助读物。

近年来，教学改革有很大进展。各地区普遍实行会考制度。考试纲要经几度修改已基本稳定。各种新版教材陆续开始使用。在此情况下，我们应该向高中学生提供一套能适用于会考复习和高考复习的参考资料，为此，我们编写了第二版《通向大学之路》丛书。

新编的《通向大学之路》仍由上海交通大学附属中学高年资有丰富教学经验的教师编写。丛书凝聚了30多年来交大附中教学经验之精萃。它包括《高中语文解析》、《高中数学解析》、《高中英语解析》、《高中物理解析》和《高中化学解析》等五种。新编的丛书保留了第一版丛书的优点，着重论述基础知识，突出剖析重点和难点，力求提高学生分析问题和解决问题的能力，并紧扣考试要求，既重视基本概念的复习，帮助读者取得会考的好成绩，又针对高考特点选编大量典型的例题和练习题。丛书由浅入深，难易适度，可以指导和帮助同学们更好地学习，达到事半功倍的目的。

我们热忱希望，《通向大学之路》（第二版）陪伴同学们顺利地在通向大学之路上迈进。

《高中数学解析》按照中学数学教学大纲的复习要求、结合我们长期教学实践，在总结历届高三复习的基础上，编写而成的。本书每章都有四个部分：一、基础知识，二、重点与难点，三、例题分析，四、习题。书末附有全部习题的解答或提示，并附会考、高考模拟试题二套。

基础知识：简明扼要地归纳、概括、整理了高中数学教学大纲和高中数学课本的全部内容，同时将我们多年教学实践中所发现的问题和积累的经验教训加了备注或说明。立体几何、解析几何

部分由于类比性的概念和公式较多，因此采用表格形式整理、这样层次分明、编排紧凑，读者一目了然。

重点和难点：根据教学实践中的体会、我们对有些章节的内容作了一些简单的剖析，指出了其中的内在联系及化解难点的关键。

例题和习题：精选典型的、有代表性的及难度适中的习题，避免怪题、偏题和“题海战术”。多数例题加有分析或附注、总结解题方法、规律和技巧，便于读者思考、掌握，以提高解题能力。

本书共分三篇，第一篇代数，主要由上海交通大学附属中学数学高级教师陆殿豪编写。第二篇立体几何，第三篇解析几何，由上海交通大学附属中学数学高级教师刘典权编写，易元方先生在誊写和绘图方面也付出了不少精力，特在此表示感谢。

由于我们水平有限，倘有疏漏和不足，恳请读者提出宝贵意见，我们将不胜感激。

编　者

1993 年 8 月

目　　录

第　一　篇

代　　数

第一章 实 数

一、基础知识

1. 实数及其分类

$$实数\begin{cases}有理数\begin{cases}整数\\分数(有限小数或无限循环小数)\end{cases}\\无理数(无限不循环小数)\end{cases}$$

将数扩充到实数，就数学学科本身来说，是由于运算的需要。即在正整数(自然数)范围内，加法和乘法运算是总能实施的，也就是说两个正整数的和、积仍是正整数，这个性质叫做正整数对加法和乘法的运算的封闭性。但对除法运算来说，正整数除以正整数所得的商不一定是正整数，因此正整数对除法运算是不封闭的。显然在正整数范围内减法运算也是不封闭的。当引进数零、负整数和分数(正分数和负分数)之后，即将数的范围扩充到有理数范围后，加、减、乘、除(除数不为零)这四种运算就封闭了。

但在有理数范围内，开方运算是不封闭的，如$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$…，以及一般的$\sqrt{N}$(N不是完全平方数)和$\sqrt[3]{2}$、$\sqrt[3]{3}$、$\sqrt[3]{4}$…以及一般的$\sqrt[p]{N}$(p是正整数，N不是某个整数的p次方)都不是有理数(这将在本章的例题分析中加以证明)，但若当我们引进无理数即将数的范围扩充到实数范围后，那末非负实数的 n 次方根 (n是自然数)和负实数的奇次方根仍是实数。

在中学数学中，我们研究函数、不等式都只限于实数范围内讨论；而对代数方程通常要在复数范围内求解。

2. 有理数及其稠密性

整数和分数，统称有理数，任何一个有理数都可以表示为 $\frac{p}{q}$

的形式，其中 p、q 是互质的整数。

任何两个不相等的有理数之间总存在一个有理数。事实上，若 r_1、r_2 是两个不相等的有理数，不妨设 $r_1<r_2$，则 $r_3=\frac{1}{2}(r_1+r_2)$ 仍是有理数（因为有理数对加法、乘法运算是封闭的），且 $r_1<r_3<r_2$。这种性质称为有理数的稠密性。

3. 无理数及其稠密性

任何一个无理数（无限不循环小数）总不能表示为 $\frac{p}{q}$ 的形式（其中 p、q 是互质整数），事实上，若无理数能表示为 $\frac{p}{q}$（p、q 为互质整数）的形式，则当 $q=1$ 时，$\frac{p}{q}$ 为整数与 $\frac{p}{q}$ 是无理数矛盾，当 $q\neq 1$ 时，$\frac{p}{q}$ 为有限小数或无限循环小数，从而也与 $\frac{p}{q}$ 是无理数矛盾！

任何两个不相等的无理数之间总存在一个无理数。事实上若 α_1、α_2 是两个不相等的无理数，不妨设 $\alpha_1<\alpha_2$，则 $\alpha_3=\alpha_1+\frac{\sqrt{2}}{2}(\alpha_2-\alpha_1)$ 仍是一个无理数，且 $\alpha_1<\alpha_3<\alpha_2$。这种性质称为无理数的稠密性。

4. 在中学数学中出现的无理数

(1) 由开方运算产生的无理数。

如 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ …$\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[3]{5}$ …。一般的形如 $\sqrt[p]{N}$（p、N 是正整数，且 N 不是任何正整数的 p 次方）的数是无理数。

又如 $\sqrt{\frac{3}{7}}$，$\sqrt{\frac{2}{3}}$，$\sqrt[3]{\frac{7}{13}}$，$\sqrt[3]{\frac{10}{17}}$…。一般的形如 $\sqrt[p]{\frac{M}{N}}$（p、M、N 都是正整数，M、N 互质，且 M、N 都不是任何整数的 p 次方）的数是无理数。

(2) 由对数运算产生的无理数。

如 lg2、lg3、lg4、lg5…，一般的形如 $\log_a N$(a、N 是大于 1 的整数，N 不是 a 的有理数次方)的数是无理数。

(3) 用三角函数表示的无理数。

如 $\sin\frac{\pi}{3}$、$\sin 10°$、$\cos 70°$、$\mathrm{tg} 20°$…。一般的形如 $\sin\frac{m\pi}{n}$、$\cos\frac{m\pi}{n}$、$\mathrm{tg}\frac{m\pi}{n}$($m$、$n$为互质整数)的数中除去0、$\pm\frac{1}{2}$、$\pm1$以外，都是无理数。

(4) 用无限不循环小数表示的无理数。

如数 0.101001000100001… 是一个无限不循环小数，因而是一个无理数。

5. 实数和数轴

规定了原点、方向和单位长度的直线称为数轴，如图 1-1 所示。

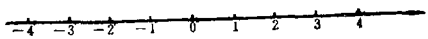


图 1-1

全体实数组成的**实数集**和数轴上所有点的全体组成的**点集**是一一对应的。即实数集中任一元素(实数)都唯一地对应于点集中的某一个元素(点)，反之点集中任一元素(点) 也唯一地对应于实数集中的某一个元素(实数)。也即实数集中的全体元素 (当然是无限个)所对应于数轴上的元素(点)已经占满了整个数轴，这就是实数的连续性。

6. 无理数的证明方法

证明一个数是无理数一般采用反证法。

在以下的证明中还用到如下结论：若 p 与 q 互质，则 p^m 与 q^n