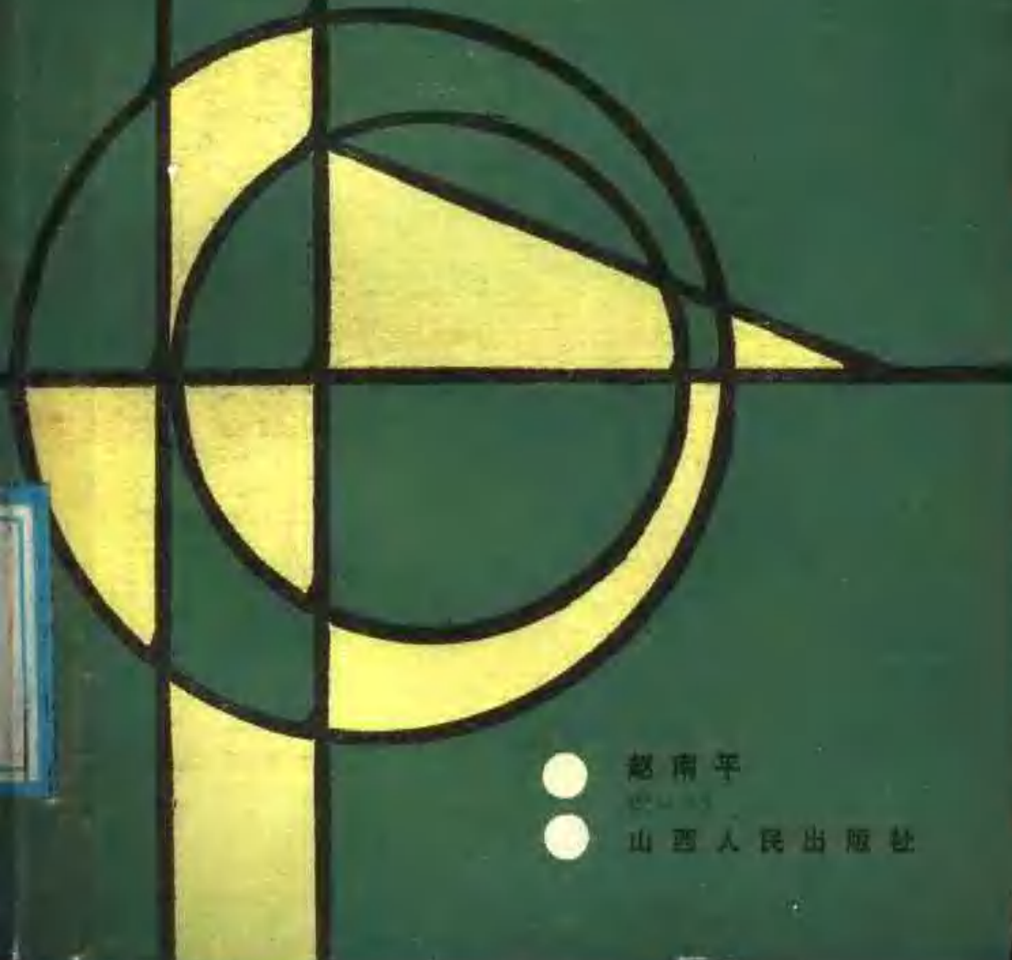
高中数学选择题分析



赵南平

山西人民出版社

高中数学选择题分析

赵南平 编

山西人民出版社

高中数学选择题分析

赵南平　编

山西人民出版社出版　（太原并州北路十一号）
山西省新华书店发行　山西新华印刷厂印刷

•

开本：787×1092　1/32　印张：15.25　字数：326 千字
1989年1月第1版　1989年1月太原第1次印刷
印数：1—4,000 册

•

ISBN　7—203—00579—8
G·204　　定 价：4.40 元

前　言

随着全国高考命题标准化的改革潮流的出现，数学选择题作为热门题已出现于各类试题和课堂教学中，因而对数学选择题解法的研究也开始为人们所重视。不少学生由于未掌握选择题的一些特殊解法，解起选择题来就既费时又易错。鉴于此，本人企图通过本书向读者介绍一下选择题的一些常用解法。在选择例题对，本书能注意从高中数学的各部分内容中选出一些典型范例（134题），从而使例题的知识覆盖面尽量广。对有的范例还作了解题规律和解题方法的小结，目的是使同学们在更好地掌握“双基”的同时，能提高自已的解题能力。对某些较难的题目，在题号前都打了“*”号。

本书还根据课本的知识前后顺序精选了一千四百道的练习题，其中练习A的要求较基本，练习B的要求略有提高。同学们可根据自已的程度结合平时的学习来选用。

在本书编写过程中，詹振照、李有权两位老师帮助做了一些具体工作，在此表示衷心的感谢。由于本人水平有限，错误和不妥之处在所难免，恳请读者多加批评指正。

编　者

目　录

第一章　选择题的优缺点

数学选择题作为一种新颖的题型与常规的“求解题”和“求证题”相比，有以下的几个优点：

（1）由于题目小，数量多，考查知识的覆盖面宽，因而有利于较全面地考查学生掌握知识的情况；

（2）由于解选择题常常用到某些特殊解法，因而可以考查学生思维的灵活性，促使学生平时要养成选择最佳判断方法和解题途径的习惯；

（3）有利于培养学生思维的敏捷性。国外有些考试试题全是选择题，考生几乎每两、三分钟就要完成一题。如美国每年举行一次的中学生数学竞赛，规定要在90分钟内解完30道选择题。这就促使学生平时要注意解题速度的训练，提高思维的敏捷性；

（4）有利于考查学生的判断能力。因为不是所有的选择题都要解得最后答案才去与题给的答案对照，而往往可从正面肯定与反面否定同时进行而迅速判断出答案的正确性，这就使学生要养成选择最佳判断方法和解题途径的习惯；

（5）便于老师对作业的批改和对试卷的评阅，还可利用电脑来阅卷、评分和计分，这样可以大大节省时间，节约人力、物力；

（6）评分标准统一，减少了主观因素对评定成绩的影响。

由于有上述的优点，数学选择题已被世界许多国家所采用。

当然，由于选择题仅是命题的一种形式，因而也有一些缺点：

（1）看不出解题的思维过程，对学生数学语言的训练及推理论证能力的培养会受到一些影响；

（2）不易考查学生综合运用数学知识解决实际问题的能力；

（3）不易考查学生对一些重要的数学方法，如反证法、数学归纳法等的应用能力；

（4）对培养学生良好的学习态度存在不利因素；

（5）不能完全反映出考生产生错误的原因。

第二章　选择题的题型

数学选择题就其编写形式而言，有是非题、配对题和多项选择题等。所谓配对题就是给出一组条件和一组结论，要求选择哪个条件和哪个结论对应组成一个正确命题；所谓多项选择题，就是给出一定的条件（称为题干）及若干个结论（称为选择支），要求选择哪一个或哪几个结论是正确的.目前较广泛流行的是“供选择的答案中有且只有一个是正确的”（称为指令性语言．通常写在总题号的后面、所有选择题的前面）这一种类型的多项选择题，因此本书也只研究这一种类型的选择题的解法．这一点请读者注意．指令性语言是这种选择题的特点，它的作用非同小可，因为它是选择题特殊解法的依据，没有了它，选择题的一些特殊解法也就失去了意义。

选择题中的选择支是常规题所没有的，它是根据命题者的考查目的而精心设计的。命题者常将学生中由于概念理解失偏，运用条件“顾此失彼”，画图时“挂一漏万”，思维过程欠周，运算方法不当等产生的典型错误渗透到选择支中去，这些似是而非的答案往往对学生有很大的吸引力，使他们在选择正确答案时举棋不定，从而起了干扰的作用。

【例1】　函数 $y=-3\sin^2x+12\sin x-1$ 的最大值是

(A) 11；(B) 8；(C) -16；(D) -1；(E) 不存在。

解本题时先配方得 $y=-3(\sin x-2)^2+11$。

结论（A）对学生具有很大吸引力，粗心的同学会马上选（A）。实际上由于$|\sin x|\leqslant 1$，所以最大值应为8，即应选（B）。

但由于选择支的存在，就比一般题目提供了更多的信息，从而对解题又起了暗示的作用。

【例2】 两条异面直线在同一平面内的射影是

（A）两条相交直线； （B）两条平行直线；

（C）两条相交直线或两条平行直线；

（D）前三个答案都不完整。

原先只想到射影为两条相交直线或两条平行直线。如果没有选择支(D)的暗示，必然会选择(C)，后来考虑到(D)，再仔细一想，还有一直线和直线外一点的可能，才改为选择（D）。

第三章　选择题的解题原则

解选择题的原则是既要注意题目的特点，充分应用供选择的答案所提供的信息，又要有效地排除错误答案可能造成的干扰。这一解题原则是由选择题的特点所确定的。为了贯彻解题原则，须注意以下几点：

(1) 要认真审题；

(2) 要大胆地猜想；

(3) 要小心地验证；

(4) 要先易后难、先简后繁；

(5) 要分组选择：对某些类型的选择题，可以将选择的对象按性质类型进行分组，特别是对某些具有对称关系的两个对象可以先行选择。一般情况是二者中必有一个正确。

第四章　选择题的常用解法

由于数学选择题与常规题相比，有它自身的特殊结构，因而选择题的解法也有与常规题的解法不尽相同的地方．观察——猜想——验证是探索解题途径的主要方法，对数学选择题更是如此．因此，在解选择题时一定要周密地思考、敏捷地分析、正确地判断、仔细地运算，要在鱼目混珠的答案中，不为假象所迷惑、不以错觉当结论，切忌乱猜，以免堕入陷阱．

数学选择题的常用解法有：(1)直接求解对照法；(2)剔除法；(3)特殊值判断法；(4)作图法；(5)观察分析法；(6)验证法；(7)反证法．除第一种方法与常规题解法一样外，从第二种方法开始均称特殊解法．对这些特殊解法，读者更应充分注意，因为若掌握了这些特殊解法，往往可收事半功倍之效．在解题时一定要根据题目的特点，灵活地运用各种方法．对有的题目，有时还必须将几种方法结合起来使用，这就是本章第八节所要介绍的“综合解法”．

最后，必须指出的是，与常规题有多种解法一样，一道数学选择题也往往不只有一种解法．我们一定要学会从不同的角度去观察分析它，通过不同的途径去猜想，运用不同的方法并从中选择最优的解法予以解决．一般来说，可以用特殊解法来解的选择题也都可以用直接求解对照法来解．在本书中，为节省篇幅，有的范例的直接解法就不再给出．

第一节　直接求解对照法

有的选择题可以直接从命题的条件出发，通过正确的运算或严密的逻辑推理得出正确的结论，然后再与选择支提供的结论进行对照，从中选择正确的答案，我们把这种解法称为直接求解对照法（这种解法其实就是将选择题当作通常的计算题或证明题来解）。这是解选择题的最常用的解法。

【例1】　函数 $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ 的最值为

(A)　最小值为 $-\sqrt{2}$，最大值为 $\sqrt{2}$；

(B)　最大值为 $\sqrt{2}$，无最小值；

(C)　最小值为 $-\sqrt{2}$，无最大值；

(D)　无最值。

【解】　已知函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，故可设 $x=\operatorname{ctg}\alpha(0<\alpha<\pi)$，代入得

$$y=\frac{\operatorname{ctg}\alpha+1}{\csc\alpha}=\cos\alpha+\sin\alpha$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

$\because\quad 0<\alpha<\pi,\qquad \therefore\ \frac{\pi}{4}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}.$

因为 $\sin x$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ 内有且仅有最大值1，所以 y 有且仅有最大值 $\sqrt{2}$。

因此应选（B）.

注：

1.对本题，许多学生常采用如下的错误解法：

由已知得 $y\sqrt{x^2+1}=x+1$, （1）

平方整理得 $(y^2-1)x^2-2x+(y^2-1)=0$.

$\because$ x是实数，

$\therefore$ $\varDelta=(-2)^2-4(y^2-1)^2=-4y^2(y^2-2)\geqslant 0$,

解得 $-\sqrt{2}\leqslant y\leqslant\sqrt{2}$.

$\therefore$ $y_{最小}=-\sqrt{2}$, $y_{最大}=\sqrt{2}$.

于是会误选答案(A).

其实，当我们把 $y=-\sqrt{2}$代入方程(1)时得

$$-\sqrt{2(x^2+1)}=x+1,$$

平方整理得 $x^2-2x+1=0$, $x=1$.

但 $x=1$是增根，原方程无解，因而不能得出$y_{最小}=-\sqrt{2}$的结论.

2.求有理分式函数和根式函数的极值的问题常可象上面那样利用"判别式法"来求得，但只有当一元二次方程中的x可以取一切实数时，用判别式法求出的y的范围才是正确的。否则，求出的y的范围常比真值域来得宽。检验的方法是：将求得的y的极值代入原函数解析式，看看是否有与之相对应的x值。如果求不出对应的实数x或求出的x不在原函数的定义域内，则说明这函数不可能达到这个极值，因此所求得的极值就是伪值.

3.在代数中，牵涉到等式或不等式的证明、解方程（或方程组）、求极值、求极限、复数等问题，常可运用三角代换，使一些复杂的问题变得简单，从而使得问题易于得到解决，而且这种方法在高等数学中也是屡见不鲜的。常用的三角代换有：

(1) 利用 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 作代换，

①当题目中出现 $\sqrt{1-x^2}$ 时，就可设 $x=\sin\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 或 $x=\cos\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$，于是 $\sqrt{1-x^2}=\cos\alpha$ 或 $\sqrt{1-x^3}=\sin\alpha$；

②当题目中出现 $\sqrt{1-x}$ 时，就可设 $x=\sin^2\alpha\left(0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 或 $x=\cos^2\alpha\left(0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，于是 $\sqrt{1-x}=\cos\alpha$ 或 $\sqrt{1-x}=\sin\alpha$；

③当题目中出现 $x^2+y^2=R^2$ 时，就可设 $x=R\sin\alpha$，$y=R\cos\alpha$；

④当题目中出现 $a+b=1$ 且 $a>0$，$b>0$ 时，就可设 $a=\sin^2\alpha$，$b=\cos^2\alpha$；

⑤当题目中出现 $|a|\leqslant1$ 时，可设 $a=\sin\alpha$ 或 $a=\cos\alpha$；出现 $|a|\geqslant1$ 时，可设 $a=\sec\alpha$ 或 $a=\csc\alpha$；若 a 为任意实数，可设 $a=\mathrm{tg}\alpha$ 或 $a=\mathrm{ctg}\alpha$。

(2) 利用 $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$ 作代换：

①当题目中出现 $\sqrt{x^2-a^2}$ 时，可设 $x=a\sec\alpha$ 或 $x=a\csc\alpha$，于是 $\sqrt{x^2-a^2}=|a\,\mathrm{tg}\alpha|$ 或 $\sqrt{x^2-a^2}=|a\,\mathrm{ctg}\,\alpha|$；也可设 $a=x\sin\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 或 $a=x\cos\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$，于是 $\sqrt{x^2-a^2}=|x|\cos\alpha$ 或 $\sqrt{x^2-a^2}=|x|\sin\alpha$；

②当题目中出现 $\sqrt{x^2+a^2}$ 时，可设 $x=a\mathrm{tg}\alpha\left(-\frac{\pi}{2}<\right.$

$\alpha<\frac{\pi}{2}$) 或 $x=a\operatorname{ctg}\alpha(0<\alpha<\pi)$，于是 $\sqrt{x^2+a^2}=|a|\sec\alpha$

或$\sqrt{x^2+a^2}=|a|\csc\alpha$。

(3) 三数和等于三数积的问题：在三角中有这么一个关系式：当 $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$ ($k\in Z$) 时，$\operatorname{tg}n\alpha+\operatorname{tg}n\beta+\operatorname{tg}n\gamma=\operatorname{tg}n\alpha\cdot\operatorname{tg}n\beta\cdot\operatorname{tg}n\gamma$ ($n\in Z$)，因而当题目中有出现三数和等于三数积的问题时，可考虑将这三数分别设为 $\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{tg}\beta$、$\operatorname{tg}\gamma$。

【例 2】 若 $A=20°$，$B=25°$，则 $(1+\operatorname{tg}A)(1+\operatorname{tg}B)$ 的值是

(A) $\sqrt{3}$；　(B) 2；　(C) $1+\sqrt{2}$；

(D) $2(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B)$；　(E) 不同于(A)～(D)的答案。

【解】 ∵ $(1+\operatorname{tg}A)(1+\operatorname{tg}B)$

$=1+(\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B)+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B$

$=1+\operatorname{tg}(A+B)(1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B)+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B$

$=1+\operatorname{tg}45°(1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B)+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B$

$=1+1-\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B=2$。

∴ 应选(B)。

注：

对三角公式，不仅要会正用，还要会逆用、变用．如对正切和、差角公式 $\operatorname{tg}(A\pm B)=\frac{\operatorname{tg}A\pm\operatorname{tg}B}{1\mp\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B}$，变形后即得 $\operatorname{tg}A\pm\operatorname{tg}B=\operatorname{tg}(A\pm B)(1\mp\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B)$。因此，遇两正切之和（差）或之积时，就可考虑逆用正切和（差）角公式．

【例 3】 在绘制 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象时，先作一个表，当表中对 x 的值以相等的间隔的值增加时，$f(x)$所对应的值依次为：3844、3969、4096、4227、4356、

4489、4624、4761。若其中有一个值是不正确的，则这个值是

(A) 4096； (B) 4356； (C) 4227； (D) 4761.

【解】 设自变量 x 的值以 h 的等间隔增加，对应的函数值为 $f(x)$、$f(x+h)$、$f(x+2h)$、…、$f(x+7h)$。设函数值的增量为 $\Delta f(x)$，

$$\because \quad \Delta f(x)=f(x+h)-f(x)$$
$$=[a(x+h)^2+b(x+h)+c]-(ax^2+bx+c)$$
$$=2ahx+ah^2+bh,$$

可见这时函数值的增量 $\Delta f(x)$ 是 x 的一次函数。而已经列出的 8 个函数值的增量分别为：

125、127、131、129、133、135、137。

由于当 $h\neq 0$ 时，$\Delta f(x)$ 是单调递增或单调递减的，因此其中的131、129是错误的，而之所以会出现这个错误，正是由于4227是不正确的。

因此应选 (C)。

注：

设函数 $y=f(x)$ 当自变量 x 取一系列的值：x_1，x_2，…，x_i，x_{i+1}，…，x_n 时，对应的函数值为：y_1，y_2，…，y_i，y_{i+1}，…，y_n。若记 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$，$\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$，我们把 Δx_i 称为 x 的一阶差分，Δy_i 称为 y 的一阶差分。则当 $y=ax^2+bx+c$时，

$$\Delta y_i=(ax_{i+1}^2+bx_{i+1}+c)-(ax_i^2+bx_i+c)$$
$$=a(x_{i+1}^2-x_i^2)+b(x_{i+1}-x_i)$$
$$=a(x_{i+1}+x_i)\Delta x_i+b\Delta x_i$$
$$=a(2x_i+\Delta x_i)\Delta x_i+b\Delta x_i$$