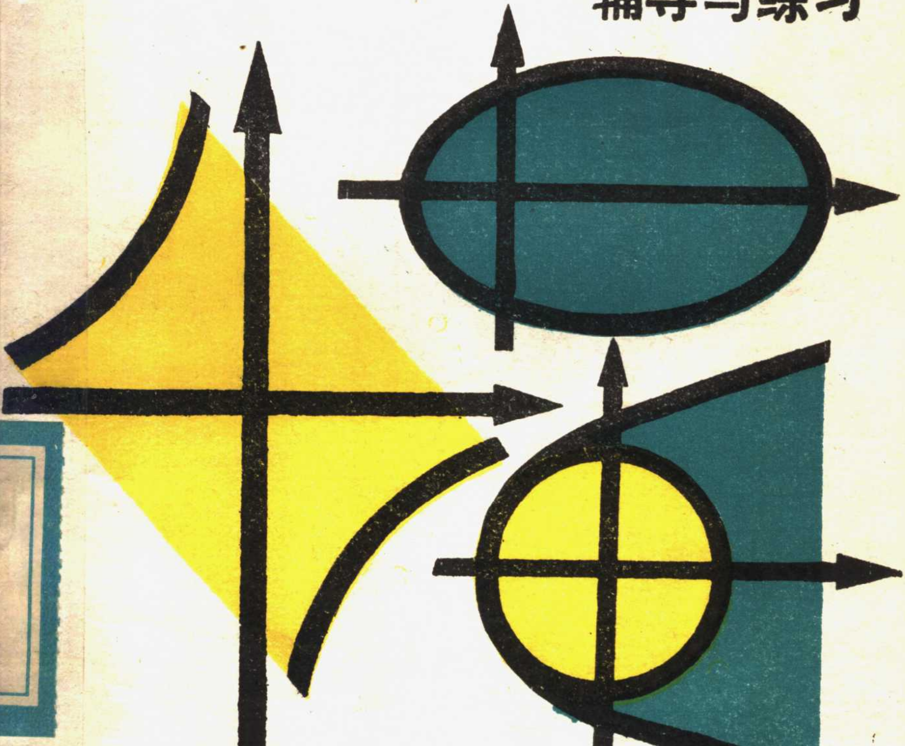
中学理科学习指导丛书

高二解析几何

辅导与练习



北京市海淀区教师进修学校主编

重庆出版社

中学理科学习指导丛书

高二解析几何辅导与练习

北京市海淀区教师进修学校主编

重 庆 出 版 社

一九八四年·重庆

编　者

北京市一二三中学　杨弘敏
北京市第四十七中学　王健民
北京清华大学附属中学　孔令颐
北京师院附属中学　戴汝潜
北京市海淀区教师进修学校　张士充

审　定　张士充　赵大悌
责任编辑　夏树人

高二解析几何辅导与练习

重庆出版社出版（重庆李子坝正街102号）
辽宁人民出版社重印
辽宁省新华书店发行
朝阳六六七厂印刷

*

开本 787×1092 1/32　印张 6.75　字数 148 千
1984年7月第一版　1984年8月沈阳第一次印刷
印数：1—223,000

书号：7114·220　定价：0.56 元

前　　言

长期以来，我们感到学生迫切需要一种能帮助他们学好功课的课外读物；家长希望有一种能督促和检查自己孩子学习的材料；教师欢迎出版一种能帮助自己辅导学生的书籍．为了解决这种问题，我们组织了一些有教学经验的教师编写了这套丛书．

通过实践，我们认识到中学数学的学习和练习应做到以下几点：

（1）只有把知识的结构分析清楚，知识才易于学生理解、记忆和运用，并从而掌握知识的整体；

（2）打好基础，是学生学好全部知识的前提，在基础知识中，重点和难点掌握不好，是有些学生学习不好的原因之一；

（3）引导学生对所学过的那些主要题型做到心中有数，同时又掌握各级题型的解题规律，是帮助学生消化知识、提高解题能力的有效途径；

（4）对学习较好的学生来说，在学好基础知识的前提下，要不断提高他们综合运用知识，以及把知识向深、广两个方面进行适当引伸的能力，这不但是可以的，而且是应该的；

（5）知识必须通过不断地复习、检查，才能逐步深

化、巩固。

基于以上认识，本书在编写时，各章都包含以下几个部分：

（1） 结构分析：有些章分析得较简单，可以在学习开始时看；有些则分析得较深入，可以在学完全章后再看。

（2） 重点和难点分析：说明重点内容的重要性在哪里，特别是如何通过它们贯通全章内容。难点之所以困难的原因，特别是通过解决难点能学到哪些思考方法、解题技巧，促进哪些能力的增长。

（3） 各级题型：配以典型的例题，并说明解题规律。

（4） 自我检查题：在每单元之后，配备知识面尽量全、有一定综合性、用以检查本单元学习的一套题目，以帮助学生了解自己学习后的收获与存在的问题。

（5） 启发与体会：着重介绍教师的经验和体会，教科书上一般不讲的思路、观点、方法等，以及适当启发学生对所学知识作更深入的思考。

本书尽量作到以上各项中的要求，体现紧密配合教材，但又不重复教材内容。但是，限于编者水平，未必都能做到，且不免出现错误或不妥之处。我们诚恳地希望读者给以批评和指正。

北京市海淀区教师进修学校

1984年1月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第一章　直线…………………………………………（ 1 ）
一、结构分析…………………………………………（ 1 ）
二、重点、难点分析…………………………………（ 2 ）
1．　有向线段…………………………………………（ 3 ）
2．　两点间的距离公式………………………………（ 4 ）
3．　定比分点公式……………………………………（ 5 ）
4．　直线的方程………………………………………（ 8 ）
5．　两条直线间的位置关系…………………………（ 11 ）
三、各级题型…………………………………………（ 16 ）
1．　基本题型…………………………………………（ 16 ）
（1）直接利用坐标基本公式求解……………………（ 17 ）
（2）求直线方程 ………………………………………（ 20 ）
（3）求点到直线的距离及两条直线的交点…………（ 23 ）
（4）判断两条直线的位置关系：平行、垂直以及求交角的大小 ………………………………………………（ 25 ）
（5）用解析法证明平面几何问题……………………（ 27 ）
2．　综合题型…………………………………………（ 32 ）
练习题…………………………………………………（ 37 ）
自我检查题……………………………………………（ 39 ）
四、启发与体会………………………………………（ 45 ）
1．　直线系……………………………………………（ 45 ）

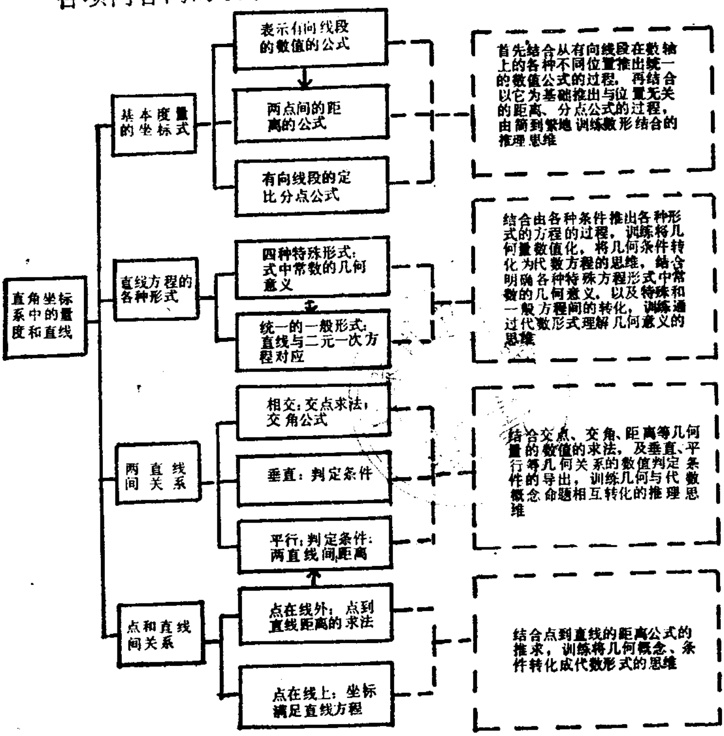
2. 点到直线的距离……………………………………（49）
第二章 圆锥曲线……………………………………………（55）
一、结构分析…………………………………………………（55）
二、重点、难点分析…………………………………………（56）
1. 曲线和方程……………………………………………（56）
2. 圆………………………………………………………（64）
3. 椭圆、双曲线、抛物线…………………………………（76）
三、各级题型…………………………………………………（91）
1. 求轨迹方程的问题………………………………………（91）
2. 和圆有关的问题…………………………………………（96）
3. 和圆锥曲线有关的问题…………………………………（99）
练习题……………………………………………………（113）
自我检查题………………………………………………（117）
四、启发与体会………………………………………………（123）
第三章 坐标变换……………………………………………（127）
一、结构分析…………………………………………………（127）
二、重点、难点分析…………………………………………（128）
三、各级题型…………………………………………………（130）
1. 移轴的题型………………………………………………（130）
2. 转轴的题型………………………………………………（137）
3. 综合题型…………………………………………………（146）
练习题……………………………………………………（152）
四、启发与体会………………………………………………（154）
第四章 参数方程和极坐标方程……………………………（158）
一、结构分析…………………………………………………（158）
二、重点、难点分析…………………………………………（160）

1. 参数方程部分……………………………（160）
2. 极坐标方程部分…………………………（169）
三、各级题型………………………………（179）
1. 参数方程部分……………………………（179）
练习题………………………………………（188）
2. 极坐标方程部分…………………………（192）
练习题………………………………………（199）
自我检查题…………………………………（200）
四、启发与体会……………………………（203）

第一章　直　　线

一、结构分析

各项内容间的联系　　结合进行的思维训练



[说明](1) 结合本章内容进行思维训练的中心，是使学生掌握坐标法的第一个层次：在取定的坐标系中将几何度量、位置关系用包含坐标的公式、方程表示出来，并利用后者来研究前者．为此，要特别重视公式或方程中的变数的取值范围和常数的几何意义．

(2) 用“有向线段的数值”一词比用“有向线段的数量”为好．因为在解析几何中是考虑与有向线段对应的数，而不是与之对应的量．同时，是用坐标来表示它，坐标也是数而不是量；量是要注明单位的．在物理学中的向量（如力、速度）和标量（如功、能）以及与向量对应的数量（如与速度对应的速率，与位移对应的矩离）都是量，各有各的单位．在解析几何中，与有向线段对应的数值、长度（数值的绝对值）都是数而不是量．因为在坐标系的选取时，如选直角坐标，规定了统一长度单位标记在两轴上后，点的坐标即是一对数(而不是量)，由此表示出的一切，也都是数而不是量．分清数和量，在学习数学、物理时都是很重要的．不能把物理中向量及与之对应的数量的提法，搬用到解析几何中而说有向线段及与之对应的数量．

二、重点、难点分析

直线这一章的内容特点是概念多，计算公式的形式多，这二多的特点决定着学习的重点是要弄懂每个概念，记忆各个公式，并能灵活运用．难点在于某些概念易混淆，公式易记错，这易混易错的克服途径是要在比较中求区别，在联系中求统一．在复习时要学会从典型分析到进行归纳，用特殊

到一般的思维方法将内容整体化，使公式联系有机化，变机械记忆为理解记忆。

1. 有向线段

掌握有向线段这个概念要顾名思义地抓住两点，一是有向性，二是线段的端点，并可用规定了起点和终点将两者统一到一起，即规定了起点和终点既反映了方向又说明是唯一线段。

这一节有两个易混淆的概念要分清：(1)有向直线和有向线段。两者都具有有向性，但前者只是规定了正方向的直线，如数轴，而后者是规定了起点和终点的线段。如$\overline{AB}$、$\overline{BA}$是两个方向相反的有向线段。(2)有向线段的长度和数量。线段的长度是几何范畴的概念，是用非负数来表示，有向线段的数量是解析几何的表示方法，是借助于坐标，用终点坐标减去起点坐标的一种用数表示形的方法，其数是代数数，有正负之别。有向线段数量的绝对值便是它的长度，这是二者的联系。

要消除以上概念的混淆，关键在于学习解析几何一开始就要了解：解析几何方法是用代数方法来描绘图形，而它又是通过坐标系这个工具来实现的。坐标系的坐标轴都有方向性，坐标的数值都是代数数，这是不同于平面几何表示方法的一个基本点。此外也要理解解析几何用代数表示图形的好处所在。比如，任一条有向线段上有三个点，O为原点，A、B与O不重合，要说明点A、B的位置关系，则要分别六种情况来讨论(见课本$p4$图1-6)。但A、B两点间的关系用有向线段数量表示后，这六种位置关系均可用由终点坐标减

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

去起点坐标这样同一形式的表达式来表示，从而得到统一和概括。

2. 两点间的距离公式

两点间的距离公式是用坐标法研究几何图形的基本公式，也是今后推导圆锥曲线方程中必不可少的工具。两点的位置在平面直角坐标中处于不同位置时，会出现不同正负值的复杂关系。但两点间距离是指两点所构成线段的长度，它是个几何图形性质的问题。这个公式是根据有向线段的数量公式，并利用平面几何中的勾股定理来证明的。由于距离概念是长度的问题，所以，记忆时可以假定两点都处于第一象限，便可很快求得两点 P_1、P_2 的距离公式为：$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。这样，由图形立刻可想到公式，不易遗忘。

在掌握两点间距离公式的一般形式后，从一般到特殊便可掌握各种特殊情况：

（1） 当 P_1P_2 平行于 x 轴时，$y_1=y_2$，于是

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=|x_1-x_2|$$

（2） 当 P_1P_2 平行于 y 轴时，$x_1=x_2$，于是

$$|P_1P_2|=\sqrt{(y_1-y_2)^2}=|y_1-y_2|$$

（3） 当 P_2 点与原点重合时，则

$$|P_1P_2|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$$

例1 求 $A(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 和 $B(\cos2\alpha, \sin2\alpha)$ 两点间的距离。

解：
$$\begin{aligned}|AB| &= \sqrt{(\cos2\alpha-\cos\alpha)^2+(\sin2\alpha-\sin\alpha)^2}\\ &= \sqrt{2-2(\cos2\alpha\cdot\cos\alpha+\sin2\alpha\cdot\sin\alpha)}\end{aligned}$$

$$=\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$$

$$=2\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$=2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$$

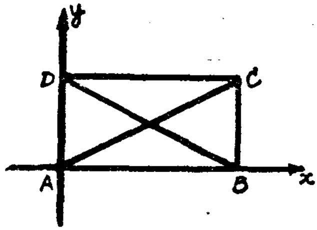


图 1-1

例2 求证：矩形对角线相等.

证明：取矩形两邻边所在直线为坐标轴，建立坐标系（如图1-1），设$|AB|=a$，$|AD|=b$，则矩形四个顶点是：$A(0,0)$，$B(a,0)$，$C(a,b)$，$D(0,b)$.

$\because\ |AC|=\sqrt{a^2+b^2}$，

$|BD|=\sqrt{(a-0)^2+(0-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore\ |AC|=|BD|$

故矩形对角线相等.

3. 定比分点公式

有向线段的定比分点公式是个基本公式，是本章的重点. 在学习中要弄清两点：

(1) P点分有向线段$\overline{P_1P_2}$所成的比是它所分出的两个有向线段P_1P，PP_2的数量比，切莫与长度的比混淆起来.

(2) 在运用$\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}$公式时，它是以原有向线段的始点为起点、分点为终点的有向线段的数量与以分点为始点、原有向线段的终点为终点的有向线段的数量之比. 即$P_1\to P$，$P\to P_2$这个方向性不能搞错.

如果P点在P_1、P_2之间，那么P点叫做有向线段$\overline{P_1P_2}$

的内分点，这时$\overline{P_1P}$、$\overline{PP_2}$具有同一方向，数量同号，所以$\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}$为正；如果$P$点在$P_1$、$P_2$之外，那么$P$点叫$\overline{P_1P_2}$的外分点，这时$\overline{P_1P}$和$\overline{PP_2}$具有相反方向，数量反号，所以$\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}$为负。

由上述可知，如果P在P_1、P_2之间，λ可以是任何正数；如果P在P_1、P_2之外，λ可以是除去-1以外的任何负数；如果P在P_1、P_2正中间，则$\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}=1$；如果$P$与$P_1$重合，那么$\lambda=0$；如果$P$与$P_2$重合，则$\lambda$不存在。以上$\lambda$值取值范围与图形的关系可见下页图表。

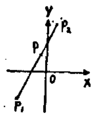
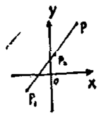
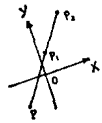
例　有$P_1(-2,\ -2)$，$P_2(2,\ 6)$两点，在P_1、P_2两点间求一点P，使$|P_1P|$为全长的四分之一：又在P_2P_1的延长线上求一点Q，使$|P_1Q|$为$|P_1P_2|$长的一半。

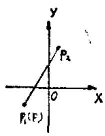
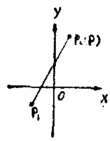
解：(1)设$P(x,y)$为有向线段$\overline{P_1P_2}$的内分点，则分$\overline{P_1P_2}$的比为$\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}=\dfrac{|P_1P|}{|PP_2|}=\dfrac{1}{3}$。

$$\therefore\begin{cases} x=\dfrac{-2+\dfrac{1}{3}\times 2}{1+\dfrac{1}{3}}=-1 \\ y=\dfrac{-2+\dfrac{1}{3}\times 6}{1+\dfrac{1}{3}}=0 \end{cases}$$

即$P(x,\ y)$为$P(-1,\ 0)$。

(2)　设$Q(x,\ y)$为有向线段$\overline{P_1P_2}$的外分点，则分$\overline{P_1P_2}$

分点的位置	内分点	外分点	
		P在P_1P_2延线上	P在P_2P_1延线上
图示			
$\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}$	正 $\lambda>0$	负 $\lambda<-1$	负 $-1<\lambda<0$

分点的位置	分点与一端重合	
	P与P_1重合	P与P_2重合
图示		
$\lambda=\dfrac{P_1P}{PP_2}$	$\lambda=0$	λ 不存在 $(\lambda\to\infty)$

的比为 $\lambda=\dfrac{P_1Q}{QP_2}=-\dfrac{1}{3}$

$$\therefore\begin{cases} x=\dfrac{-2+\left(-\dfrac{1}{3}\right)\times 2}{1+\left(-\dfrac{1}{3}\right)}=-4 \\ y=\dfrac{-2+\left(-\dfrac{1}{3}\right)\times 6}{1+\left(-\dfrac{1}{3}\right)}=-6 \end{cases}$$

即 $Q(x, y)$为$Q(-4, -6)$。

4. 直线的方程

直线方程是本章的核心内容，也是重点节，学习这一节要弄清以下问题：掌握"直线的方程"和"方程的直线"两个基本概念；根据直线在坐标系中位置特征来构造直线方程及用方程中的某些特征量来了解直线的位置特征；直线方程的几种特殊形式的特点及其与直线方程的一般形式之间的相互转化等。方程形式多样，能否熟练记忆和灵活运用是难点所在。克服这个难点首先要掌握点斜式。在复习本节内容时，要学会区别和联系，从特殊到一般的归纳，使之统一化，这可变机械记忆为理解记忆。

（1）"直线的方程"和"方程的直线"。

几何范畴的直线和代数范畴的二元一次方程之间的一一对应关系的建立是通过以下的思维过程来实现的。一方面将直线看成是点的集合，而每个点在平面直角坐标系内可用一对坐标(x, y)来描绘，并与之一一对应；另方面在代数中研究过一次函数 $y=kx+b$，这函数中每一对 (x, y) 的值当看成直角坐标系中的点，则(x, y)的数对集合所对应的点集，画出来的图象便是一直线。作为一次函数有自变量和因变量之分，二者地位有所不同，而直线上点的坐标的一对数地位是相同的，并无因果关系。$y=kx+b$ 当不分自变量、因变量的另一种表达形式便是$y-kx-b=0$，这便是二元一次方程。这样，这个方程的解就和一直线上的点产生了一一对应关系。于是，我们便得到以下二个定义：以一个方程的解为坐标的点都是某条直线上的点；反之，这条直线上点的坐标都

是这个方程的解，这时，这个方程叫做这条直线的方程，这条直线叫做这个方程的直线。这样我们就完成了直线和方程的对应关系的认识过程。

（2） 直线的倾角和斜率。

直线的倾角和斜率都可用来确定直线的方向，前者是用几何角度的方法，后者是用坐标即解析几何的方法，而后者研究起来更方便。斜率公式是研究直线方程各种形式的基础。

在学习直线的倾角时，要注意搞清三个要点："直线向上的方向"与"x轴的正向"间"最小的正角"，三者缺一不可。因此，倾角的范围是$0^\circ \leqslant \alpha < 180^\circ$，且平面内任何一条直线都有唯一的倾角。于是倾角可以确定直线的方向。

直线的斜率是直线倾角的正切值，即$k=\operatorname{tg}\alpha$。但要注意，当直线和$x$轴垂直时，倾角为$\frac{\pi}{2}$，此时斜率不存在。所以，任一条直线都有倾角，但不是任一条直线都有斜率。

过$P_1(x_1, y_1)$和$P_2(x_2, y_2)$两点的直线斜率可用这两点的坐标表示为：

$$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.$$

这里要注意以下几点：

①斜率公式中两点的横坐标与纵坐标的次序可以同时交换。

②P_1，P_2是直线上任意两点，因而可以选直线上有最简坐标的两点。

③当$x_1=x_2$，而$y_1\neq y_2$时，即倾角$\alpha=\frac{\pi}{2}$，斜率k不存

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com