组合论浅谈

刘卓雄

近代数学小丛书

福建教育出版社

组合论浅谈

刘卓雄 编

福建教育出版社

内 容 提 要

组合论在计算机科学、试验设计、人工智能等二十多个领域内都有重要应用。

本书初步介绍组合论的研究对象和基本原理以及分析组合论问题的思想方法及某些研究成果。内容包括加法原理与乘法原理、互斥包含原理、母函数以及某些专题介绍。书中讨论了许多有趣的组合数学的问题，将为中学数学课外讲座提供丰富多采的资料。

本书可以作为高中学生课外读物，也可供理工科大学学生、中学教师以及数学爱好者阅读。

组 合 论 浅 谈

刘 卓 雄 编

福建教育出版社出版
福建省新华书店发行
三明市印刷厂印刷
787×1092毫米 32开本 3.625印张 78千字
1986年 3月第一版 1986年 3月第一次印刷
书号：7159·951 定价：0.56元

前　言

组合数学是一个具有悠久历史的现代数学分支，这个学科研究的中心问题是某一模型中一个集合的元素的排列问题。对于给定的一个集合，要求按一定的条件来排列集合中的元素，首先要研究这种排列是否存在，称为存在性问题；当存在性已明确时，要计算满足要求的排列有多少个，这是计数问题；有时还要求将这些排列构造出来，这是构造问题；如果给出最优化标准，往往还要求找出最优的排列，这是最优化问题。

本书是组合论的通俗读物。它初步介绍了组合论的研究对象以及基本原理和分析问题的思想方法。第一章通过实例介绍什么是组合数学。第二章到第五章介绍组合论的几个基本原理及其应用。第六章简要介绍组合论的一些研究专题。我们在书中将讨论许多有趣的组合数学问题，这些问题如果仅用现有的中学数学知识来解决，难度较大，但学完本书后，会大大提高分析和解决这类问题的能力。

承蒙方德植教授在百忙之中审阅了初稿，并提出了宝贵的意见和建议，在此谨致衷心的感谢！

由于笔者水平限制，不妥之处，望读者不吝指正。

刘　卓　雄

目　　录

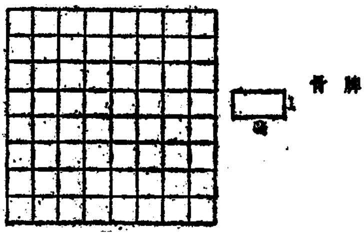
第一章　什么是组合数学

组合数学又叫组合分析、组合论或组合学，它是一个历史悠久的数学分支。现在组合数学已深入到抽象代数、拓扑、图论、数论、概率统计、线性规划等许多数学领域。组合数学在社会科学、物理学、生物学、计算机科学、数字通讯理论、试验设计等方面都有重要的应用。

什么是组合数学？这是一下子比较难以讲清的问题。让我们先从几个具体例子讲起吧！

例 1　棋盘的完全覆盖问题

假设我们有一个 8×8 的国际象棋棋盘和 32 张大小为 2×1 的骨牌，将 32 块骨牌放到棋盘上，骨牌不重叠，每一骨牌覆盖 2 个方格，那么32块牌能完全覆盖棋盘上的所有方格。现在问一共有多少种不同的方式完全覆盖 8×8 的棋盘？1961 年M. E. Fischer 找到了答案，有 $12,988,816=2^4\times(901)^2$ 种。



8×8　棋盘

图　1

一般地，一个 $m\times n$ 的棋盘被骨牌完全覆盖（我们也称棋盘有完全覆盖）指的是骨牌在棋盘上如此的一个排列：①每一块骨牌覆盖棋盘的两个方格。②棋盘上的每个方格被某个骨

牌覆盖。③没有两块骨牌是重叠的。

问题 1　当 m，n 为何值时，棋盘有完全覆盖？易证当 m，n 至少有一个为偶数时有完全覆盖。

问题 2　当 $m\times n$ 棋盘有完全覆盖时，有多少种不同的完全覆盖方式？Fischer 找到了解答的一般公式，这个公式含有三角函数表达式。这个问题与物理学上著名的二聚物问题关系密切。

再考虑不完整的棋盘。如图 2 所示 4×5 棋盘，棋盘上黑白相间（白的记为 w，黑的记为 B），棋盘上剪去二个白方块，剪去部分用阴影表示。

修剪后的棋盘有没有完全覆盖？图 2 所示的修剪后的棋盘没有完全覆盖，因剪去两个白方格后，剩下 8 个白方格，10个黑方格，如果有完全覆盖，则要用 9 块骨牌，而每一块骨牌覆盖一白一黑，所以 9 块骨牌不可能盖住 10 个黑方格。因此产生一个问题：$m\times n$ 的棋盘，从中剪去某些方格，得到一个修剪过的棋盘，问什么条件下，修剪后的棋盘仍有完全覆盖？从上面的具体例子，我们不难推出，修剪后的棋盘有完全覆盖的一个必要条件——修剪后棋盘上余下的黑白方格数必须相等。这是充分条件吗？不是。请看下面的例子：图 3

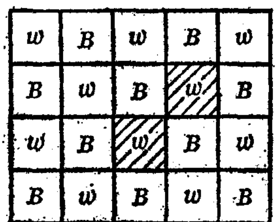


图 2

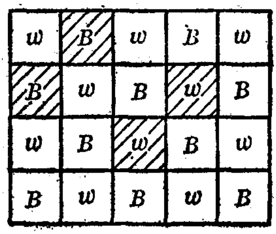


图 3

的修剪后的棋盘，剩下黑白方格都是 8 个，但没有完全覆盖。于是提出问题：修剪后的棋盘有完全覆盖的必要充分条件是什么？当完全覆盖存在时，有多少种不同的完全覆盖方式？

例 2　切割一个立方体

一个每边长等于 3 的正立方体，要切割成 27 个小正立方体，使每个小立方体的边长等于 1。问至少要切多少刀？

如图 4 所示，在切割过程中不变动大立方体的各部分的位置，按左右、上下、前后三个方向每个方向切两刀，那么可将大立方体切成 27 个小块。

如果切完每一刀之后，允许变动木块的位置，那么把大立方体切成 27 小块是不是一定要切 6 刀呢？少几刀可以吗？作为一个例子，如图 5 所示，在切完第一刀后，把切下的一块倒放下来，垫到未切的木块下面，再切第二刀，这样一来，这种切法第二刀将比原来的切法切到更多的木块。于是容易产生想法：是否不必切 6 刀？但接下去由于切法和放法有很多种，分析就很困难了。

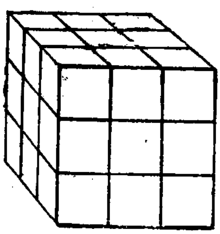


图 4

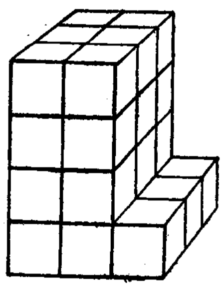


图 5

我们可以用另一种方式来考虑这一问题。27 块小立方体中，中心的一块立方体有 6 个面，这 6 个面中每一个面都不是大立方体的面，因此要切出中心这一块立方体，至少每一面要切一刀，共需切 6 刀。

明确了要切出 27 个小立方体，至少需切 6 刀后，还可以提出一个问题：切 6 次将大立方体切成 27 个小立方体，共有多少种不同的切割方式？

例 3　幻方

传说夏禹为了治水来到洛水，洛水上浮起一只大乌龟，乌龟背上有一个奇怪的图形（图 6），这个图形后来叫作“洛书”。“洛书”到底隐存着什么“天机”？研究数学的人识破了它。你看图形中不是有圈有点吗？圈的个数都是奇数，点的个数都是偶数。如果用数字来代替圈和点的个数，就变成图 7 的样子。

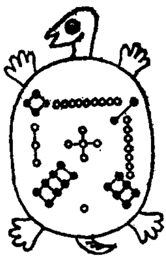


图 6

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 7

现在你可以看出来，图中每一横行，每一竖行及每一条对角线上的三个数，加起来的和都是 15。

横　行：$4+9+2=15$，$3+5+7=15$，$8+1+6=15$；

竖　行：$4+3+8=15$，$9+5+1=15$，$2+7+6=15$；

对角线：$4+5+6=15$，$2+5+8=15$。

这种图叫做纵横图，也叫做幻方。“洛书”是最简单的幻方，它的每边只有三个数，叫做“三阶幻方”。

一般地，n 阶幻方是这样定义的：一个 n 阶幻方是由整数 1，2，……，n^2 所组成的 $n\times n$ 方阵，这个方阵有如下性质：它的各行的和，各列的和，每条对角线的和都等于某个常数 S。S 称为 n 阶幻方的和。

容易算得

$$S=\frac{1+2+\cdots+n^2}{n}=\frac{n(n^2+1)}{2}.$$

下面是一个 4 阶幻方。

$$\begin{pmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{pmatrix}$$

其幻方和 $S=34$。

关于幻方可以提出三个问题：1.对哪些 n，n 阶幻方是存在的？2.对一个给定的 n，有多少种不同的 n 阶幻方？3.当幻方存在时，如何构造它。

第一个问题已经彻底解决，除了 2 阶幻方不存在外，其余各阶幻方均存在。对幻方的构造方法有兴趣的读者可参看：

《*Mathematical Recreations and Essays*》（《数学游戏和小品》）（W・W・Rouse Ball 著，H・S・M・

Coxeter 修订，*New York*：*Macmillan*，1962，pp 193—221）

例 4 （四色问题）考虑平面上或地球仪曲面上的一张地图，假定在地图上国家是相邻的，为了能很快地区分不同国家，需要给这些国家涂上颜色，使得有公共边界的两个国家颜色都不相同。按上述要求，要使任意一张地图的所有国家都上色，问至少需要多少种颜色？

这个问题是 Francis Guthrie 1850 年提出的，这是历史上的一个著名的难题。由于地图的任意性，不能少于 4 色是容易论证的，如左图所给的包含有 4 个国家的地图，就需要 4 色。

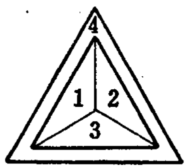


图 8

1890年 P·J·Heawood 证明了：用 5 色总可以为任一张地图上色。1976 年两位数学家 K·Appel 和 W·Haken 共同发表了轰动世界的成果：他们证明了用 4 种颜色就足够彩任一张地图，他们的证明是借助计算机来完成的，计算机大约计算了 1200 个小时，将近有 10 亿个运算和逻辑判断。

例 5 （欧拉猜想——36 个军官问题）有六个军团，从每个军团里挑选出六个级别不同的军官，设他们的级别分别为 1 级、2 级、…、6 级。这样从六个军团，六个级别里一共挑选了三十六名军官，现在问这 36 名军官能不能排成 6×6 的方队，使得每行和每列都包含每个级别的军官一个和每个军团的军官一个？

这个问题可以化为数学上的正交拉丁方的问题，为此我

们先叙述拉丁方和正交拉丁方的定义。

定义1 以1，2，…，n为元素，而且每行以及每列的元素都互不相同的n阶方阵，叫做一个n阶拉丁方。

定义2 设A和B都是n阶拉丁方，如果将其中的一个叠合在另一个之上时，正好出现n^2个有序数对，则称拉丁方A与B是正交的。

例如

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

则A、B、C都是3阶拉丁方，且A和B是正交的，而B和C不正交，只要将A、B叠在一起，B、C叠在一起，就可以看清这点。

$$A、B\text{叠合在一起}\Longrightarrow\begin{pmatrix}(1,1)&(2,2)&(3,3)\\(2,3)&(3,1)&(1,2)\\(3,2)&(1,3)&(2,1)\end{pmatrix}$$

九个数对(1,1)、(1,2)、(1,3)、(2,1)、(2,2)、(2,3)、(3,1)、(3,2)、(3,3)都出现．每个数对恰好出现一次。

$$B、C\text{叠合在一起}\Longrightarrow\begin{pmatrix}(1,2)&(2,3)&(3,1)\\(3,1)&(1,2)&(2,3)\\(2,3)&(3,1)&(1,2)\end{pmatrix}$$

不是九个数对都出现，例如数对(1，1)就没有出现。

36个军官问题可以转换成是否存在一对六阶正交拉丁

方的问题．为了使读者更好地理解如何转换，我们考虑简单的，从3个级别、3个军团来的9个军官的排队问题．每个军官可以用一个有序对（i,j）来表示，i表示军官的军团，j表示军官的级别，（$i=1,2,3$；$j=1,2,3$）．9个军官形成了9个数对．写出两个三阶正交拉丁方：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}\quad 和\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}$$

令A与9个军官的军团相对应，B与9个军官的级别相对应，于是

$$A、B叠合在一起\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}(1,1)&(2,2)&(3,3)\\(3,2)&(1,3)&(2,1)\\(2,3)&(3,1)&(1,2)\end{pmatrix}$$

就给出：9个军官排成3×3方阵，使得每行和每列都含每个级别的一个军官和每个军团的一个军官．

欧拉对拉丁方进行了详尽的研究，当n为奇数或$n=4k$时，他指出如何构造一对正交拉丁方，1782年欧拉曾猜想对$n=4k+2$（$k=0,1,2,\cdots\cdots$）不存在正交拉丁方（历史上称为欧拉猜想），1901年G·Tarry用穷举法证明了：对$n=6$欧拉猜想是成立的．1959年三位统计学家R·C·Bose、E·T·Paker和S·S·Shrikhande相继证明了：对$n>6$欧拉猜想是错误的，也就是对$n=4k+2$（$k=2,3,\cdots\cdots$）他们指出了如何构造一对正交拉丁方，这一重要成果使欧拉猜想得到彻底解决．

到目前为止，在拉丁方和正交拉丁方的研究中，虽然已经获得了很多有价值的成果，但仍然有许多问题未能得到解决。n 等于素数或素数幂的情形已彻底解决了，即证明了在这种情况下，一定有$(n-1)$个两两正交的拉丁方，不可能再多了，并且给出了构造这$(n-1)$个两两正交的拉丁方的方法。对 n 不等于素数或素数幂的情形，也有许多成果，但问题并未彻底解决。例如现在已经知道 10 阶拉丁方中有两个正交的，12 阶拉丁方中有五个两两正交的，但是否有更多的两两正交，现在还不知道。

一般地，对正交拉丁方可以提出如下三个问题：

1. 当 n 是什么数时，一定存在 n 阶正交拉丁方？对这个问题，1959 年 R·C·Bose 和 S·S·Shrikhande 证明了，除去边长 2 和 6 的正交拉丁方不存在外，任意边长的正交拉丁方对均存在。

2. 假设 n 阶正交拉丁方是存在的，一共有多少个两两正交的 n 阶拉丁方？

3. 如何构造它。

例 6 （最短路线问题）考虑一个交叉的街道系统，一个人需要从交叉点 A 走到交叉点 B，一般地，从 A 到 B 可能有许多路线，问题是要找出一条最短路线。完成这个问题的可能方法是：把从 A 到 B 的所有可能道路列成规则的一览表，计算每一条路径旅行的距离，然后选出最短的路线。但这不是有效的程序，因为当系统很大时，包含的工作量很大，难以处理。需要找一种算法，这种算法当系统增大时，算法体系不会很快增加。

图 9 给出 6 个节点、10 条边的一个道路图，每一条路线的长度标在边上，连接 x 到 y 的一条道路是 $\{x, a, b, d, y\}$，它的长度是 4．另一条道路是 $\{x, b, d, y\}$，它的长度是 3．由于这个系统不复杂，如果列出 x 到 y 的所有道路，不难验证 $\{x, b, d, y\}$ 是从 x 到 y 的最短路线。

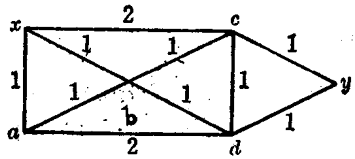


图 9

上述六个例子都属于组合数学研究的范畴。从上面的例子我们可以看出，组合数学研究的中心问题是：某一个模型中一个集合的元素的排列问题。主要是从下面几个方面进行研究：

（1）存在性问题：如果希望排列一个集合的元素，使一定的条件能得到满足，这样的排列可能不存在，也可能存在，但排法不是显然的。因此，首要的问题是证明排列是存在的，或者证明排列是不存在的。

（2）计数与构造问题：当满足一定条件的排列已被证明存在时，要求出这样的排列共有多少个；当知道一共有多少排法后，往往还要把满足要求的所有排列具体地构造出来。

（3）最优化问题：如果给出了最优化标准，往往还需要寻求最优的排法。

第二章　加法原理与乘法原理

本章介绍组合计数问题的两个基本法则：加法原理和乘法原理，并用这两个原理解决一些较简单的组合数学问题。

在介绍这些原理之前，先让我们引入集合论中的二个概念。在中学我们已学过二个集合的并集与交集，设 A、B 是二个集合，定义

$$A\cup B=\{x:\ x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$

$$A\cap B=\{x:\ x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

现在推广到 k 个集合的情形。

设 A_1，A_2，…，A_k 是 k 个给定的集合，定义 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k$ 及 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k$（分别简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$ 及 $\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i$）如下：

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k=\{x:x\in A \text{ 或 } x\in A_2 \text{ 或}\cdots\text{或 } x\in A_k\};$$

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k=\{x:x\in A \text{ 且 } x\in A_2 \text{ 且}\cdots\text{且 } x\in A_k\};$$

即 $$x\in\bigcup_{i=1}^{k} A_i \Longleftrightarrow x\in \text{某个 } A_i\ (i=1,2,\cdots,k);$$

$$x\in\bigcap_{i=1}^{k} A_i \Longleftrightarrow x\in \text{一切 } A_i\ (i=1,2,\cdots,k).$$

例 1　$A_1=\{a,b\}$，$A_2=\{a,c\}$，$A_3=\{a,c,d\}$。

则　$A_1\cup A_2\cup A_3=\{a,b,c,d\}$，

　　$A_1\cap A_2\cap A_3=\{a\}$。

§1 加法原理和乘法原理

一、加法原理 做一件事，完成它有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种方法；在第二类办法中有 m_2 种方法；……；在第 n 类办法中有 m_n 种方法。那么完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种不同方法。

加法原理也可以用集合论的语言来表述。设任一有限集 A 的元素的个数用 $|A|$ 表示，则加法原理可表示为：

若 $A_i \cap A_j = \phi$（$i \neq j$，$1 \leqslant i \leqslant k$，$1 \leqslant j \leqslant k$），则

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|.$$

例 2 求满足 $x + y \leqslant 4$ 的正整数解（x, y）有多少个？（正整数解是指 x，y 均为正整数的解。）

解：我们将正整数解的集合 A 分为三类

$$A_1 = \{(x,y): x + y = 2\},$$

$$A_2 = \{(x,y): x + y = 3\},$$

$$A_3 = \{(x,y): x + y = 4\}.$$

则 $|A_1| = 1$，$|A_2| = 2$，$|A_3| = 3$（见图10）。

显然 $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$，且 $A_1 \cap A_2 = \phi$，$A_1 \cap A_3 = \phi$，$A_2 \cap A_3 = \phi$。

$\therefore |A| = |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| = 1 + 2 + 3 = 6$。

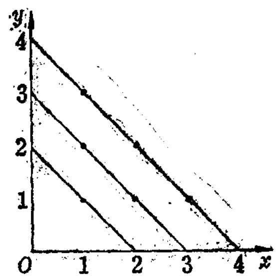


图 10