高等学校教学用書

高等數學簡明教程

下　　册

H. C. 米海里孫著

人民教育出版社

下册目錄

第十九章　曲線的切線

§108. 導函數的幾何意義

在§91中，我們已經知道：作方程爲 $y=f(x)$ 的曲線切線的問題，可化爲去求切線與 OX 軸所成角的正切的問題，並且

$$\operatorname{tg}\alpha=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

因爲上式的極限也就是函數 $f(x)$ 的導函數，所以有

$$\operatorname{tg}\alpha=f'(x). \tag{1}$$

因此，**在曲線 $y=f(x)$ 上某一點的切線與 OX 軸所成角的正切，或者說，在曲線上某一點的切線的斜率，等於導函數在該點的值。**

這個很重要的公式(1)是表示着導函數的幾何意義。

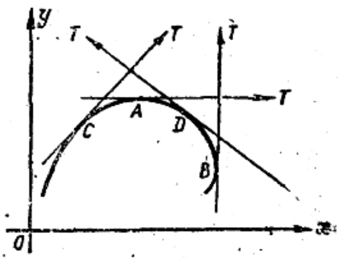

圖 134

在一些特殊情形：

(1)如對於某個 $x=a$ 的值，$f'(x)=0$，則 $\operatorname{tg}\alpha=0$，$\alpha=0$，因而在該點的切線與 OX 軸平行(圖上 AT)。

(2)如對於某個 $x=a$ 的值，$f'(x)$ 不存在，而變爲 $\pm\infty$ 時，則 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，因而在該點的切線與 OY 軸平行(圖上 BT)。

(3)如 $f'(x)>0$，則 $\operatorname{tg}\alpha>0$，因而 $\alpha<\frac{\pi}{2}$，即切線與 OX 軸所成的角爲銳角(圖上 CT)。

(4)如 $f'(x)<0$，則 $\operatorname{tg}\alpha<0$，因而 $\alpha>\frac{\pi}{2}$，即切線與 OX 軸所成的角爲鈍角(圖上 DT)。

例1　取由方程 $y=\frac{1}{2}x^2$ 所確定之拋物線，作此曲線上在 $x=2$ 處的 M 點的切線。

這裏 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$，因此，$f'(x)=x$。對於所求切線的 $\operatorname{tg}\alpha$，如前所述是當 $x=2$ 時導函數之值，所以

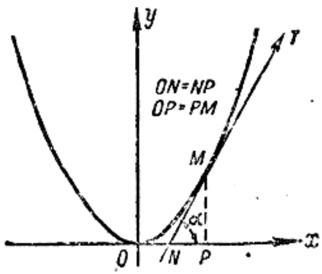

圖 135

$$\operatorname{tg}\alpha=f'(2)=2.$$

依照對 OX 軸所成這樣的角，即可通過 M 點作一直線，使它是拋物線的切線。爲此，我們在 P 點的左邊取

$$PN=\frac{1}{2}PM,$$

且通過點 N 和 M 引直線 NT。於是

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{PM}{NP}=2.$$

例2　在雙曲線 $xy=6$ 上一點 M 作雙曲線之切線，設該點的 $x=3$。

從雙曲線的方程，可得

$$y=\frac{6}{x}.$$

求導函數

$$f'(x)=-\frac{6}{x^2},$$

再計算在已知點的 $\operatorname{tg}\alpha$：

$$\operatorname{tg}\alpha=f'(3)=-\frac{6}{9}=-\frac{2}{3}.$$

因爲 $\operatorname{tg}\alpha<0$，顯然 α 爲鈍角。爲了作切線，我們在 P 點的右邊取線段

$$PN=\frac{3}{2}PM,$$

並聯 M 和 N，直線 NT 即爲在 M 點之切線。

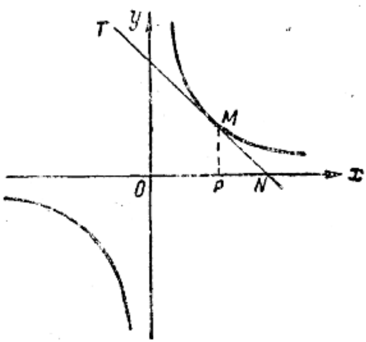

圖 136

§109. 曲線的切線和法線方程

令 $y=f(x)$ 爲曲線的方程，我們要現在來導出在該曲線上一點 $M(x, y)$ 處的切線方程。

在這問題中，x 和 y 僅表示切點的坐標。對於切線 MT 上各點的可變坐標我們以大寫字母 X 和 Y 表之，於是切線 MT，作爲通過已知點 $M(x, y)$ 之直線，其方程爲

$$Y-y=a(X-x).$$

其中 a 爲切線之斜率。但按照前節公式(1)

$$a=\operatorname{tg}\alpha=f'(x),$$

所以切線之方程最後便成爲

$$Y-y=f'(x)(X-x)$$

或

$$Y-y=y'(X-x) \qquad (2)$$

的樣子。

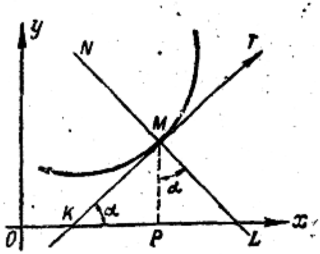

圖 137

通過切點 M 垂直於切線的直線叫做曲線上 M 點的法線。

它的方程即爲通過已知點垂直於切線之直線方程。所以法線之斜率等於 $-\frac{1}{y'}$. 因此法線的方程爲

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x). \qquad (3)$$

切線與 OX 軸相交於 K，線段 KM 之長叫做切距，它在 OX 軸上的投影 KP 叫做次切距。

法線與 OX 軸相交於 L，線段 ML 之長叫做法距，它在 OX 軸上之投影 PL 叫做次法距。

次切距與次法距諸線段的量很容易從三角形 PLM 和 PKM 中求出。因爲：

$$PM=y,\quad \angle PML=\alpha,$$

所以

$$KP=y\operatorname{ctg}\alpha=y\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{y}{y'}.\tag{4}$$

$$PL=y\operatorname{tg}\alpha=yy'.\tag{5}$$

從這些三角形中，我們也不難計算出切距和法距，因為它們都是三角形的斜邊，而直角邊是已知的，即：

$$KM=\sqrt{\left(\frac{y}{y'}\right)^2+y^2}=\sqrt{\frac{y^2+y^2\cdot y'^2}{y'^2}}=\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}\tag{6}$$

$$ML=\sqrt{y^2+y^2y'^2}=y\sqrt{1+y'^2}.\tag{7}$$

例 1 求曲線 $y=x^4-2x-1$ 上橫坐標等於 1 的點之切線。

為了解這問題，我們首先決定切點的坐標。因為它的橫坐標已知，所以它的縱坐標很容易的可從曲線方程中求出，在方程中令 $x=1$，便得 $y=-2$。因此，切點就是：

$$M(1,\ -2)。$$

其次從曲線方程求 y'

$$y'=4x^3-2.$$

對於所討論的切點

$$y'=2,$$

所以按照方程(2)得

$$Y+2=2(X-1),$$

或用通常的形式寫出，切線的方程便是

$$2x-y-4=0.$$

例 2 求曲線 $y=\dfrac{2x^2-1}{x^2}$ 的切線，它與直線 $x-4y+3=0$ 平行。

從曲線的方程中求出切線的斜率 y'：

$$y'=\frac{2}{x^3}.$$

在另一方面，因為切線應與直線 $x-4y+3=0$ 平行，所以它的斜率必等於 $\frac{1}{4}$。因此，在切點應有下列等式：

$$\frac{2}{x^2}=\frac{1}{4}.$$

由此即得切點的橫坐標為 $x=2$.

再按照前例的解法進行。先求得切點之縱坐標為

$$y=\frac{7}{4},$$

又因為切線之斜率是

$$y'=\frac{1}{4},$$

所以切線的方程就是

$$Y-\frac{7}{4}=\frac{1}{4}(X-2),$$

最後

$$x-4y+5=0.$$

§110. 拋物線的切線

將所導出的公式應用於拋物線

$$y^2=2px.$$

為了作拋物線上某點 $M(x, y)$ 的切線，我們先來計算它的斜率，即 y'。為此從拋物線的方程中我們首先求得

$$y=\sqrt{2px},$$

然後，微分之，便得

$$y'=\frac{2p}{2\sqrt{2px}}=\frac{p}{\sqrt{2px}}=\frac{p}{y}.$$

於是根據方程(2)，切線的方程為

$$Y-y=\frac{p}{y}(X-x).$$

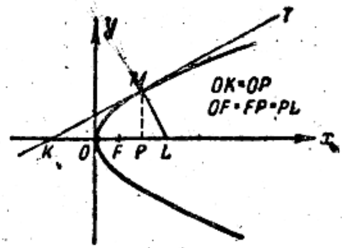

圖 138

變換之，便得

$$Yy-y^2=pX-px,$$
$$Yy-2px=pX-px,$$
$$Yy=p(X+x). \qquad (8)$$

這就是在拋物線上任意點 $M(x, y)$ 切線的方程。

按照公式（4）和（5）我們作次切距及次法距的表達式：

$$KP=\frac{y}{y'}=\frac{y^2}{p}=\frac{2px}{p}=2x,$$
$$PL=y\cdot y'=y\cdot\frac{p}{y}=p.$$

所求得的式子說明了拋物線的切線和法線的有趣的性質，即：次切距等於切點橫坐標的二倍，而拋物線上每一點的次法距等於常量——拋物線的參數。

這些性質使我們能容易地作出拋物線上任意的切線和法線。就是因為 $|KP|=2x$，而 $OP=x$，所以 $|OK|=x$。因此取 $|OK|=|OP|$，並聯 K 和 M，就得拋物線的切線。為了作法線，我們引縱坐標 PM，並按 OX 軸的正方向取線段 $PL=p$，然後聯接 M 和 L，直線 ML 即為法線。作了切線後，我們又可作切線之垂線以求出法線。

§111. 橢圓的切線

我們要導出橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

的切線方程。

為了求導函數 y'，可以像前題一樣，首先由橢圓的方程解得 y，然後再求 y'。但藉助於隱函數微分法之應用，可以更容易的求得這個導函數。微分橢圓之方程，得：

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot y'=0,$$

由此即得
$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$
所以切線的方程如下式：
$$Y-y=-\frac{b^2x}{a^2y}(X-x).$$
變換之，便得
$$a^2Yy-a^2y^2=-b^2Xx+b^2x^2,$$
$$b^2Xx+a^2Yy=b^2x^2+a^2y^2.$$
將方程各項都除以 a^2b^2：
$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2};$$
等式之右邊代以 1，最後可得
$$\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}=1. \tag{9}$$
按公式(4)作次切距 PK 的表達式
$$PK=\frac{y}{y'}=-\frac{a^2y^2}{b^2x}=-\frac{a^2}{x}\cdot\frac{y^2}{b^2};$$
因爲 PK 表示長度，所以對於 $x>0$ 的 M 點，我們捨去負號。然後注意到
$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2},$$
即得
$$PK=\frac{a^2-x^2}{x}.$$

上面的公式指出，對於具有同一半軸 a 的所有橢圓，在具有同一橫坐標的點上的次切距彼此相等。因此，線段 PK 同時將爲半徑是 $OA=a$ 的圓在 C 點之次切距。

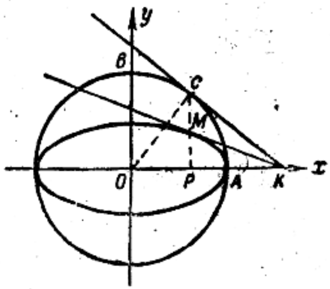

圖 139

由此引出作橢圓的切線 MK 之方法。以 a 爲半徑作一圓，延長 PM 交圓周於 C，作圓在 C 點之切線，交 OX 軸於 K，聯 K，和 M，

所得之直線即爲橢圓的切線。

§112. 弧的微分

我們研究方程爲

$$y=f(x)$$

的某一曲線。

在此曲線上取一定點 M_0，從此點起就可量該曲線的弧(圖 140)。

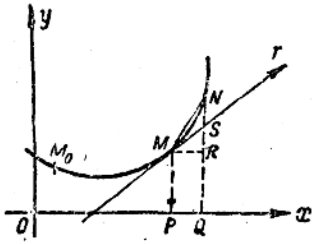

圖 140

在此曲線上取一點

$$M(x, y)$$

以 s 表弧 M_0M 的長度。顯然，弧長 s 與 M 點在曲線上的位置有關，即與 x 有關；因此可寫作

$$s=F(x).$$

如果這個函數 $F(x)$ 是已知的，那麼就不難由這函數求導函數，然後再求微分。但是我們現在緊指出，即使不知道函數 $F(x)$ 是什麼樣子，也可以只按照導函數與微分的定義來推求它們的導函數 $\frac{ds}{dx}$ 和微分 ds。

這就是給 x 以增量

$$\Delta x=PQ,$$

於是弧 s 得一增量

$$\Delta s=\widehat{MN}.$$

按照導函數之定義

$$\frac{ds}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}$$

因此問題化爲求

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}.$$

為此，我們考察ΔMNR。在此三角形中，

$$MR=\Delta x,\quad RN=\Delta y,$$

$$\text{弦 } MN=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}.$$

當Δx是無窮小時，弦MN和弧MN一樣也是無窮小量。同時還可證明此二量彼此等價①。

因此，在求$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta x}$時，我們可以把量$\Delta s$代以$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$。於是得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}=\sqrt{1+y'^2}.$$

這樣，便求得

---

① 由圖 140，可得

$$\text{弦 } MN<\widehat{MN}<MS+SN,$$

$$\text{弦 } MN=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

$$\widehat{MN}=\Delta s,$$

$$MS=\sqrt{(MR)^2+(RS)^2}=\sqrt{\Delta x^2+y'^2\cdot\Delta x^2}=\sqrt{1+y'^2}\,\Delta x.$$

$SN=\omega$，它對於Δx為高階無窮小[參看公式(21)，§ 93]。

所以由上列不等式，可得

$$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}<\Delta s<\sqrt{1+y'^2}\cdot\Delta x+\omega.$$

將不等式的各項除以$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，就得

$$1<\frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}<\frac{\sqrt{1+y'^2}\cdot\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}+\frac{\omega}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}.$$

於是不難證明，不等式之右端趨於 1。因為

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1+y'^2}\cdot\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{1+y'^2}\cdot\Delta x}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x}=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{1+y'^2}}=1,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\omega}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0.$$

由此可以得出

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=1\quad\text{或}\quad\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\widehat{MN}}{MN}=1,$$

即無窮小弧MN和無窮小弦MN是等價的(關於弧的微分公式更嚴格的推導，可參看 В. И. Смирнов：高等數學教程，卷 1)。

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+y'^2}, \tag{10}$$

由此

$$ds=\sqrt{1+y'^2}\cdot dx. \tag{11}$$

公式(10)爲所求曲線弧的導函數，而(11)爲其微分。後一公式也可以用微分 dx 和 dy 寫成另一種方式，

$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx=\sqrt{dx^2+dy^2}. \tag{12}$$

這公式使我們能得到，切線與 OX 軸所成角的正弦和餘弦的簡單表達式。因爲，我們知道

$$\operatorname{tg}\alpha=y', \tag{13}$$

而且，由三角學中可知，

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

所以
$$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+y'^2}.$$

因而
$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

利用公式(10)便得

$$\cos\alpha=\pm\frac{dx}{ds}. \tag{14}$$

爲了求 $\sin\alpha$，我們有

$$\sin\alpha=\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha=\pm\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}=\pm\frac{dy}{ds}.$$

因此
$$\cos\alpha=\pm\frac{dx}{ds},$$

$$\sin\alpha=\pm\frac{dy}{ds}. \tag{15}$$

§ 113. 問題和習題

1. 已知函數的導函數的幾何意義是什麼?

2. 如果對於已知點有下列的情形：

$$f'(x)=0,\quad f'(x)=\infty,\quad f'(x)=1,\quad f'(x)=-1,$$

那末切線對於坐標軸的位置如何？

3. 曲線上已知點的切線方程怎樣寫法？這方程中的 x, y 和 X, Y 表示什麼？

4. 曲線上已知點的法線方程怎樣寫法？

5. 拋物線的切線有什麼性質？

6. 在拋物線上一已知點處怎樣作它的切線？

7. 在橢圓上一已知點處怎樣作它的切線？

8. 怎樣求曲線上一已知點處的切線的斜率？

9. 曲線的弧的微分怎樣表示？

10. 已知無窮小弦與它的對應的弧的增量是等價。這弦與它對應的弧的微分是否等價？

11. 切線與 OX 軸所成之角的正弦與餘弦怎樣表示？

12. 求曲線 $y=\frac{6}{x}$ 上一點的切線與 OX 軸所成之角，設該點的橫坐標等於 2 (參看第 52 頁圖 31)。 答：$122°41'30''$.

13. 求曲線 $y=-\frac{1}{12}x^3$ (參看第 52 頁圖 30) 上一點的切線，該點的橫坐標等於 -2。

答：$3x+3y+4=0$.

14. 求曲線 $y=\frac{18}{x^2}$ (參看第 54 頁圖 33) 上一點的切線，設該點的縱坐標等於 2。

答：$4x+3y-18=0$ 和 $4x-3y+18=0$.

15. 求曲線 $y=\sin x$ (參看第 55 頁圖 36) 上已知點的切線，若點的橫坐標等於零，$\frac{\pi}{2}$，π。 答：$y-x=0$, $y=1$, $y+x=\pi$.

16. 求曲線 $xy-x^3-1=0$ 上一點的法線和切線，設該點的橫坐標等於 1。

答：$x-y+1=0$, $x+y-3=0$.

17. 求曲線 $y=\cos^2 x$ 上一點的次法距和次切距之長，已知該點的橫坐標等於 $\frac{\pi}{4}$。

答：$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$.

18. 求曲線 $y=x\ln x$ 的切線，設它與直線 $2x-2y+3=0$ 平行。

答：$y-x+1=0$.

19. 求曲線 $y=\frac{x+9}{x+5}$ 的切線，並使它通過原點。

答：$y+x=0$, $25y+x=0$.

20. 求二曲線 $y^2=4x$ 和 $y=2x^2$ 間之交角 (二曲線間之交角就是在它們交點上切線之交角)。 答：$30°57'50''$.

第二十章　微分法對於研究曲線性質的應用

§ 114. 曲線的凹向及拐點

設 $y=f(x)$ 為某曲線 KL (圖 141, 142, 143)的方程。作曲線上一點 M 的切線 MT。於是在切點 M 的鄰近，曲線與切線 MT 的相關位置可以有如下的三種情形:

(1)曲線上 M 鄰近的點，都是位於 MT 的向 y 軸正向的那一側(圖 141);在此情形我們說，在 M 點，曲線凹向 y 軸的正向。

(2)曲線上 M 鄰近的點，都是位於切線 MT 的向 y 軸負向的那一側(圖 142);在此情形我們說:在 M 點，曲線凹向 y 軸的負向。

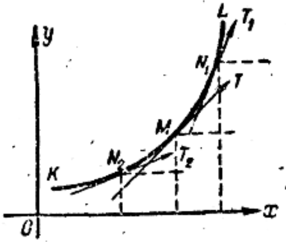

圖 141

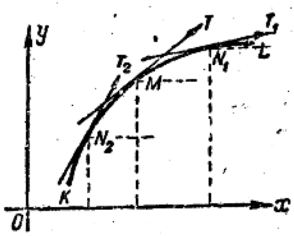

圖 142

(3)在 M 點的切線穿過曲線，使 M 點鄰近的點，分佈在 MT 的兩側(圖 143);在此情形我們說: M 點是曲線的拐點。

凹向及拐點位置的研究，對於曲線性質的討論是很重要的。這種研究是以曲線方程 $y=f(x)$ 中函數 $f(x)$ 聯系著它的導函數 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 去討論函數 $f(x)$ 的性質①，作為基礎的。

---

① 假定導函數 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 為連續的。

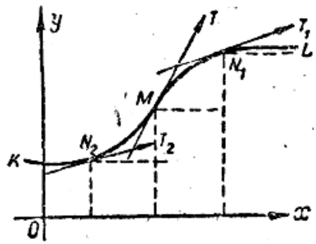

圖 143

考察圖 141, 142, 和 143, 我們可以指出：在 M 點的鄰近，曲線的切線與 OX 軸所成的角的正切，當 x 遞增時，在第一種情形它亦遞增，在第二種情形則遞減，在第三種情形開始爲遞增，而後來爲遞減（也可能是相反的順序）。

根據導函數的幾何意義，即

$$f'(x)=\operatorname{tg}\alpha$$

（其中 α 是切線與 OX 軸所成的角），就可以得出下列關於在 M 點鄰近的結論：

在第一種情形，即當曲線凹向 y 軸正向時，$f'(x)$是遞增的，因此 $f''(x)>0$（參看第 244 頁的逆定理）；

在第二種情形，即當曲線凹向 y 軸負向時，$f'(x)$是遞減的，因此 $f''(x)<0$（參看第 244 頁的逆定理）；

在第三種情形，即曲線有拐點的情形，$f'(x)$開始遞增，然後遞減，或是相反的情形，因此 $f''(x)$在 M 點鄰近變號。

顯然，反過來說也是對的。即在所討論的點的鄰近，如果

$f''(x)>0$，則曲線凹向 y 軸正向；

$f''(x)<0$，則曲線凹向 y 軸負向；

$f''(x)$變號，則在變號的位置有拐點。

事實上，例如 $f''(x)>0$，則由關於函數遞增的正定理（第 243 頁）便知 $f'(x)$在所討論點的鄰近是遞增的，換句話說，即 $\operatorname{tg}\alpha$ 是遞增的。而這就是說在 M 點的鄰近曲線上點的分佈情形，對於切線 MT 來說，相當於圖 141；所以曲線在 M 點的鄰近凹向 y 軸正向。對於其餘兩種情形，也可同樣得出結論。

因此，曲線的凹向及拐點的存在，決定於按照剛才所述的條件來對

於 $f''(x)$ 的考察。

因為在拐點鄰近，$f''(x)$ 必須變號．所以在拐點處 $f''(x)$ 必為零，由此即得出求拐點的方法。亦即，欲求方程為 $y=f(x)$ 的曲線的拐點，應該：

（1）求二階導函數。

（2）求二階導函數的根，即解方程式 $f''(x)=0$。

（3）考察在這些根的鄰近，$f''(x)$ 是否變號。

我們易見：求拐點的問題相當於求極大極小的問題，只是所求的不是函數 $f(x)$ 本身的極大極小，而是其導函數 $f'(x)$ 的極大極小。

將上述結果應用於下列各例。

例 1　討論橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的凹向。

根據上述的法則，求出二階導函數

$$y''=-\frac{b^4}{a^2y^3}\text{（參看第 231 頁例 1）.}$$

由此可知，對於橢圓上 $y>0$ 的一切點，$y''<0$，而對於橢圓上 $y<0$ 的一切點，$y''>0$。因此，便知在 $y>0$ 部分，橢圓凹向 OY 軸的負向，而在 $y<0$ 部分，則凹向 OY 軸正向。

例 2　討論拋物線 $y^2=2px$ 的凹向。

仍先求二階導函數 y''

$$y''=-\frac{p^2}{y^3}\text{（參看第 231 頁例 2）.}$$

由此可知，對於 $y>0$ 的點，$y''<0$，所以在此部分，拋物線凹向 OY 軸的負向；對於 $y<0$ 的點，$y''>0$，所以在此部分，拋物線凹向 OY 軸的正向。

例 3　討論擺線

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$$

的凹向。

對於所有 t 的值，二階導函數 $y''=-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}<0$（參看第 236 頁），因此，在所有的點處，擺線凹向 OY 軸負向。

§ 115.　曲線的曲率和曲率半徑

考察曲線 KL，和它上面的兩點 M 和 M_1。在此兩點處分別作曲線的切線 MT 和 M_1T_1，並令兩切線間的夾角為 ω。