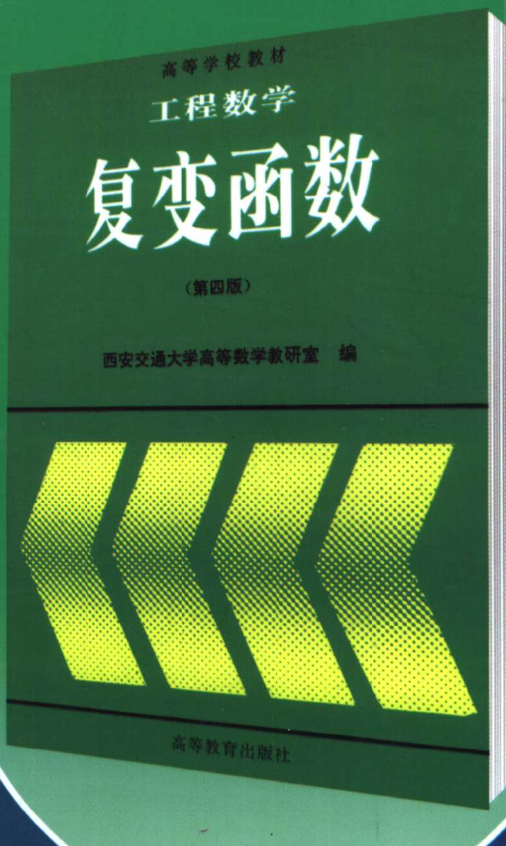
高等学校优秀教材辅导丛书

GAO DENG XUE XIAO YOU XIU JIAO CAI FU DAO CONG SHU

主编 苑延华 张晓光 邓慧

复变函数知识要点与习题解析



哈尔滨工程大学出版社

高等学校优秀教材辅导丛书

复变函数
知识要点与习题解析

（配西交大第四版教材·高教版）

主　编　苑延华　张晓光　邓　慧

主　审　张晓威

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

复变函数知识要点与习题解析/苑延华,张晓光,邓慧主编.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2005
ISBN 7-81073-702-3

Ⅰ.复… Ⅱ.①苑…②张…③邓… Ⅲ.复变函数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 062302 号

内容简介

本书是与西安交通大学高等数学教研室编写的《复变函数》(第四版)教材相配套的辅助参考资料。全书共六章,每章由知识要点、典型题解析、书后习题解析、同步训练题及同步训练题答案组成,书后习题解析部分针对原教材中的习题做了较详细的解答。

哈尔滨工程大学出版社出版发行
哈尔滨市南通大街145号 哈尔滨工程大学11号楼
发行部电话:(0451)82519328 邮编:150001
新华书店经销
肇东粮食印刷厂印刷
*
开本 787mm×960mm 1/16 印张 16.25 字数 299 千字
2005年7月第1版 2005年7月第1次印刷
印数:1—3 000 册
定价:21.00 元

Preface 前言

复变函数是高等学校中物理、数学、电类等各专业必修的一门数学基础课，也是自然科学与工程技术中常用的数学工具。为了帮助读者正确理解和掌握复变函数的基本理论与方法，增强分析问题、解决问题的能力，我们编写了《复变函数知识要点与习题解析》这本书。

全书共六章，每章由知识要点、典型题解析、书后习题解析、同步训练题及同步训练题答案组成。其中，知识要点部分给出了本章的基本概念、重要定理和主要方法，并指明了本章学习内容的重点和难点。在每一章的典型题解析部分，编者给出了几个具有代表性题目的详细解答，并注重分析解题的思路、揭示解题的规律。书后习题解析部分，主要针对西安交通大学高等数学教研室编写的《复变函数》（第四版）教材中的习题做了比较详细的解答，并对超出基本要求的习题加了“*”号，予以解答，以供需要者参考。同步训练题部分，主要汇编了能反映本章具体要求的一些检测题目，有单项选择题、填空题、计算题和证明题。这部分内容旨在使读者对学习效果进行自我检测。

本书第1章、第2章、第3章由张晓光、邓慧编写，第4章、第5章、第6章由苑延华编写。全书由苑延华统编定稿，由哈尔滨工程大学理学院张晓威副教授主审。

由于编者水平有限，书中错漏之处在所难免，敬请读者不吝赐教。

编　者

2005年5月

Contents 目录

Contents

第1章　复数与复变函数

ZHI SHI YAO DIAN 知识要点

本章内容：复数、复数的各种表示方法及其运算；区域、单连通区域、多连通区域、简单曲线，复球面与无穷远点；复变函数，复变函数的极限和连续性.

本章重点：复数的运算和各种表示法；复变函数以及映射的概念.

本章难点：复数方程表示曲线以及不等式表示区域；映射的概念.

1.1　复数及其代数运算和几何表示

1.1.1　复数的概念

定义　设 x,y 都是实数，我们把形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的表达式称为复数.其中，i 称为虚数单位，且具有性质 $\mathrm{i}^2=-1$；x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部，记作

$$x=\mathrm{Re}(z),y=\mathrm{Im}(z)$$

(1) 当 $x=0,y\neq 0$ 时，$z=\mathrm{i}y$ 称为纯虚数；

(2) 当 $y=0$ 时，视 $z=x+0\cdot\mathrm{i}$ 为实数 x；

(3) 设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，当且仅当 $x_1=x_2,y_1=y_2$，则 $z_1=z_2$，即两个复数相等，必须且只须它们的实部与实部，虚部与虚部对应相等；

(4) 当 $x=y=0$ 时，称 $z=0$.

1.1.2　复数的各种表示法

1.复数的复平面表示法

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 与有序实数对 (x,y) 成一一对应关系.用点 (x,y) 表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的方法，称为复数的复平面表示法.此时，直角坐标平面称为复平面或 z 平面，x 轴称为实轴，y 轴称为虚轴，点 (x,y) 即复数 z，如图 1－1 所示.

2.复数的向量表示法

在复平面上,复数 z 还与从原点指向点 $z = x + \mathrm{i}y$ 的平面向量成一一对应,因此,复数 z 也可用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示,如图 1 - 2 所示.向量的长度称为复数 z 的模,记为

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1-1}$$

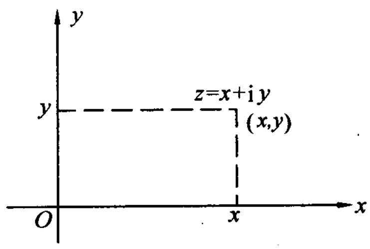


图 1 - 1

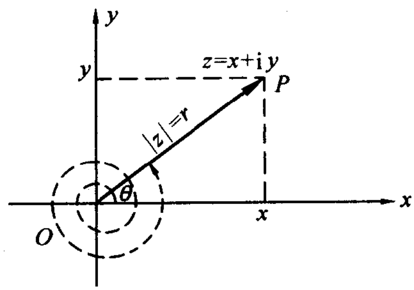


图 1 - 2

当 $z \neq 0$ 时,实轴的正向与向量 $\overrightarrow{OP}$ 之间的夹角称为复数 z 的辐角,记作 $\mathrm{Arg}z = \theta$,这时有 $\tan(\mathrm{Arg}z) = \dfrac{y}{x}$.辐角有无穷多个,其中满足 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的辐角 θ_0 称为辐角 $\mathrm{Arg}z$ 的主值,记作 $\arg z$,则

$$\mathrm{Arg}z = \theta_1 + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{1-2}$$

其中,θ_1 为复数 z 的任一辐角.特别地,当 $\theta_1 = \arg z$ 时,$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$).

$z = 0$ 时,辐角任取.

辐角主值 $\arg z = \theta_0$ 可由 $\arctan \dfrac{y}{x}$ 来确定(见图 1 - 3),即

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0, y \gtreqless 0 \\ \pm \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y \gtrless 0 \\ \left(\arctan \dfrac{y}{x}\right) \pm \pi, & x < 0, y \gtrless 0 \\ \pi, & x < 0, y = 0 \end{cases} \tag{1-3}$$

3.复数的三角表示法

由 z 的模 r 及辐角 θ 的含义,还可把复数 z 表示成

$$z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \tag{1-4}$$

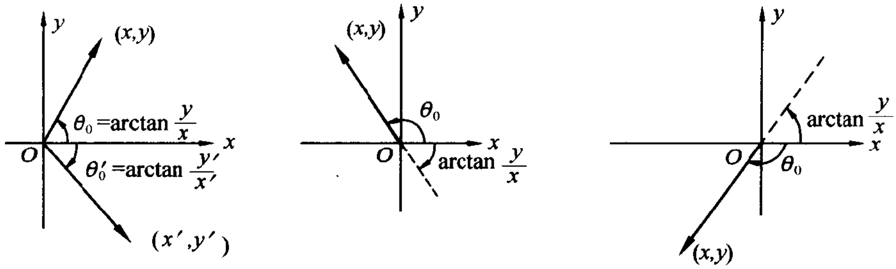


图 1－3

式(1－4)称为复数 z 的三角表示式，这种方法称为复数的三角表示法.

4.复数的指数表示法

在复数的三角表示式中，利用欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 可得

$$z=r\cdot e^{i\theta} \tag{1-5}$$

这种表示形式称为复数 z 的指数表示法.

以上复数的不同表示法仅是形式上的差异，它们各有其自身的特点：利用向量表示法可得到复数及其运算的几何解释；而由三角或指数表示法可获得复数运算中模与辐角的变化规律。

1.1.3 复数的运算

1.加(减)法

两个复数的加(减)法定义为：实部与实部、虚部与虚部对应分别相加(减)，即

$$z_1\pm z_2=(x_1+iy_1)\pm(x_2\pm iy_2)=(x_1\pm x_2)\pm i(y_1\pm y_2) \tag{1-6}$$

加(减)法的向量表示，如图1－4所示.由图1－4可获得如下不等式(三角不等式)，即

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2| \tag{1-7}$$

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big| \tag{1-8}$$

2.乘法

两个复数相乘按多项式乘法法则运算.这里 $i^2=-1$，即

$$z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1) \tag{1-9}$$

3.除法

若 $z_2\neq0$，将满足 $z_2\cdot z=z_1$ 的复数 z 定义为 z_1 除以 z_2 的商，记作 $z=\frac{z_1}{z_2}$，即

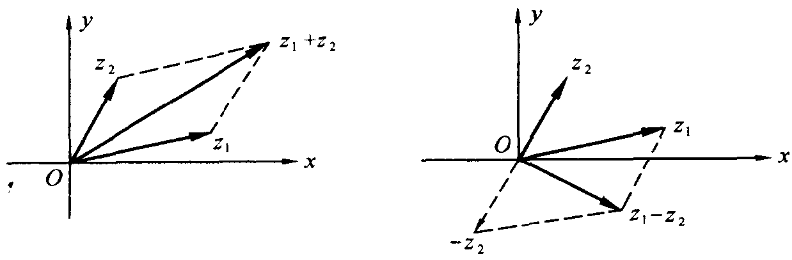


图 1－4

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\tag{1-10}$$

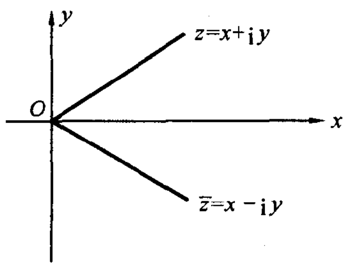


图 1－5

4.共轭复数

定义　实部相同而虚部绝对值相等、符号相反的两个复数称为共轭复数，如图 1－5 所示，即复数 $z=x+\mathrm{i}y$，则 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$ 称为 z 的共轭复数.

共轭复数有如下性质

$$\begin{cases}\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2\\ \overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2\\ \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\\ \bar{\bar{z}}=z\\ |z|=|\bar{z}|\\ z\cdot\bar{z}=x^2+y^2=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2=|z|^2\\ z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)\\ z-\bar{z}=2\mathrm{i}\cdot\mathrm{Im}(z)\end{cases}\tag{1-11}$$

5.复数的乘积与商

(1) 定义

定义　两个复数乘积(或商)的模等于它们模的乘积(或商)，两个复数乘积(或商)的辐角等于它们辐角的和(或差)，即

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \tag{1-12}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2 \qquad (z_1 \cdot z_2 \neq 0) \tag{1-13}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{1-14}$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2 \qquad (z_1 \cdot z_2 \neq 0) \tag{1-15}$$

或者若有 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$,则

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

注　若限定辐角取主值,则式(1 - 13)和式(1 - 15)不一定成立.因为若 $z_1 = -1, z_2 = i$,这时 $\arg(z_1 \cdot z_2) = -\frac{\pi}{2}$,而 $\arg z_1 = \pi, \arg z_2 = \frac{\pi}{2}$,显然式(1 - 13)不成立.因此式(1 - 13)和式(1 - 15)应理解为:等式两端的多值函数可能取的值的全体是相同的.

(2) 积与商的几何意义

两个复数 z_1 与 z_2 的乘积 $z_1 \cdot z_2$ 是这样一个向量:从表示 z_1 的向量按逆时针方向旋转角度 $\mathrm{Arg}z_2$,并使表示 z_1 的向量的长度 $|z_1|$ 伸长(或缩短) $|z_2|$ 倍得到的(如图 1 - 6).这一结果在学习共形映射时十分有用.

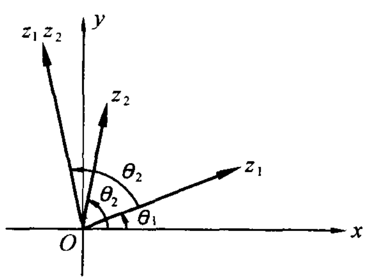


图 1 - 6

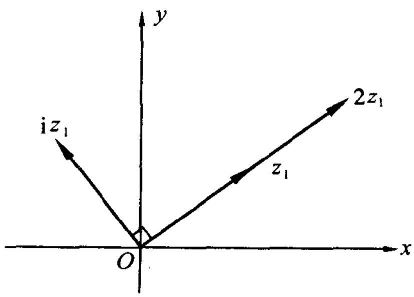


图 1 - 7

特别地,iz_1 相当于对 z_1 实行了一次旋转变换,逆时针转动$\frac{\pi}{2}$.而 rz_1 相当于对 z_1 实行了一次伸缩变换,伸缩率为 r,如图 1 - 7(图中 $r = 2$) 所示.

可见,当把复数视为向量时,复数的乘法既不同于向量的点积(数量积),也不同于向量的叉积(矢量积).

两个复数的商$\frac{z_1}{z_2}$也是一个向量，即是将 z_1 伸长或缩短$\frac{1}{|z_2|}$倍，再按顺时针方向旋转一个角度 $\arg z_2$ 而成.

总之，复数 z_1 乘以或除以 z_2，相当于对 z_1 实行了旋转及伸缩变换.

6.复数的幂与根

(1) 由式(1 - 12) 和式(1 - 13) 可推得$|z^n| = |z|^n$，$\arg(z^n) = n\arg z$，或

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \qquad (1-16)$$

当$|z| = 1$时，有 $$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad (1-17)$$

式(1 - 17) 是棣莫弗(De Moivre) 公式.

(2) 若 $\omega^n = z$，则 ω 叫复数z 的n 次方根，记作$\sqrt[n]{z}$，即 $\omega = \sqrt[n]{z}$. 令 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，则

$$\omega_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), k = 0,1,2,\cdots,n-1 \qquad (1-18)$$

当 $k = 0$ 时，ω_0 称为 n 次方根的主值.

在几何上，$\sqrt[n]{z}$ 的n 个值是一个以原点为中心，$\sqrt[n]{r}$ 为半径的正n 边形的n 个顶点. 1 的 n 次方根又叫n 次单位根.

1.2 复球面与平面区域

1.2.1 复球面

取一球面 Σ，使其南极 S位于复平面原点 O 处与复平面相切(如图 1 - 8). 这样对于复平面上任意点通过与北极 N 连线，在球面 Σ 上就得到一个对应点. 如此，复平面上所有的点都与除N点外的所有球面Σ上的点一一对应. 球面Σ称为复球面.

假想复平面上与复球面上N点对应的点称为无穷远点，记作 ∞. 无穷远点是一个新的复数，为了区别，原来的复数也称为有限复数. 复数 ∞ 的实部、虚部和辐角均无意义. 复数 ∞ 的模规定为 $+\infty$，即$|\infty| = +\infty$.

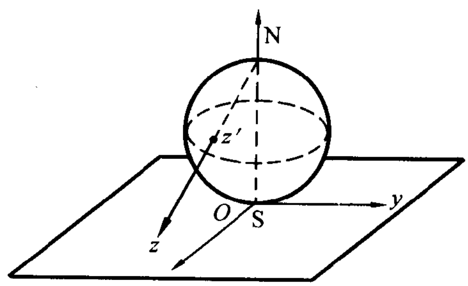


图 1 - 8

复平面 C 中所有点加上 ∞，组成扩充复平面，记作 $\overline{C}$，即 $\overline{C} = C \cup \{\infty\}$.

关于无穷远点的运算，规定如下：设 α 为任意复数，则

$$\alpha \pm \infty = \infty \pm \alpha = \infty \qquad (\alpha \neq \infty) \tag{1-19}$$

$$\alpha \cdot \infty = \infty \cdot \alpha = \infty \qquad (\alpha \neq 0) \tag{1-20}$$

$$\frac{\alpha}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{\alpha} = \infty \qquad (\alpha \neq \infty) \tag{1-21}$$

$$\frac{\alpha}{0} = \infty \qquad (\alpha \neq 0, \text{但可以是 } \infty) \tag{1-22}$$

至于其他运算：$\infty \pm \infty, 0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}$，我们不规定其意义.

引入惟一的无穷远点在理论上有重大的意义，它不仅可以作为复平面惟一的边界点，而且还可以存在自己的邻域。

1.2.2 平面区域

1.z_0 的 δ - 邻域

满足关系 $|z - z_0| < \delta$ 的点 z 的全体称为点 z_0 的一个 δ - 邻域，而满足 $0 < |z - z_0| < \delta$ 的点 z 的全体称为点 z_0 的一个去心 δ - 邻域.

2.内点

设 G 是一平面点集，$z_0 \in G$，若存在 z_0 的某个邻域也属于 G，则称 z_0 为 G 的内点.

3.聚点

对于集合 G，z_0 是平面上一点，若在 z_0 的任一邻域内都含有 G 的无穷多个点，则称 z_0 为 G 的一个聚点.

以下五种说法是等价的：(1) z_0 为 G 的聚点；(2) z_0 的任一邻域内含有 G 的无穷多个点；(3) z_0 的任一邻域内至少含有异于 z_0 而属于 G 的一个点；(4) z_0 的任一邻域内至少含有 G 的两个点；(5) 在 G 中可取得点列：$z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots (z_n \neq z_0)$，而点列 $\{z_n\}$ 以 z_0 为极限.

关于聚点我们还知道：内点必是聚点，但聚点不一定是内点.

我们把属于 G，又不是 G 的聚点的点称为 G 的孤立点.

4.开集

若 G 的每个点都是内点，则称 G 为开集.

5.连通集

若 G 中任何两点都可以用完全属于 D 的折线连接起来，则称 G 为连通集.

6.区域

连通的开集叫区域.

7.边界

若 z_0 点的任一邻域内既有集合 G 中的点，又有不属于 G 的点，则称 z_0 为 G 的一个边界点.由 G 的全体边界点组成的集合称为 G 的边界(边界不一定连续). G 的一个边界点可能属于 G，也可能不属于 G.

8.闭区域

区域 G 及其边界一起构成的闭区域记作 $\bar{G}$.

9.有界区域

若区域 G 内的所有点 Z 都满足 $|z| < M$，则称 G 是有界区域.

10.简单曲线

设曲线 $C: z = z(t) = x(t) + iy(t), a \leqslant t \leqslant b$.当 $x(t), y(t)$ 连续时，称 C 为连续曲线.对介于 a, b 间的 t_1 与 t_2，当 $t_1 \neq t_2$ 且有 $z(t_1) = z(t_2)$ 时，点 $z(t_1)$ 称为曲线 C 的重点.没有重点的连续曲线 C，称为简单(或 Jordan) 曲线.如果曲线 C 的两个端点重合，则 C 称为简单闭曲线.

11.光滑曲线

曲线 $z = z(t) = x(t) + iy(t), a \leqslant t \leqslant b$，当 $x'(t), y'(t)$ 连续且有 $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$ 时，称之为光滑曲线.由几条光滑曲线依次连接而成的曲线，称为逐段光滑曲线.

12.单连通区域

若属于区域 G 的任何简单闭曲线 C 的内部也属于 G，则称区域 G 为单连通区域，否则称为多连通区域.从几何图形上看，单连通区域即是无洞、无割痕的区域.

1.3 复变函数、极限与连续性

1.3.1 复变函数定义

1.定义

定义 设 G 是复平面上一个点集，如果存在一个确定的法则，使对于集合 G 中的每一个复数 $z = x + iy$ 都有一个或几个复数 $w = u + iv$ 与之对应，则称 w 是 z 的复变函数，记作

$$w = f(z) \tag{1-23}$$

若一个 z 值对应 w 的一个值，则称函数是单值的；若一个 z 值对应 w 的多个值，则称函数是多值的.

2.复变函数与二元实函数的关系

设 $z = x + iy, w = u + iv$，则从 $w = f(z) = f(x + iy) = u + iv$，可知 u, v 是关于 x, y 的二元实函数，即

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{1-24}$$

显然,一个复变函数 $w=f(z)$ 与两个二元实函数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 对应,所以可通过二元实函数的性质来研究复变函数的性质.

3.复变函数的几何解释

用 z 平面上的点表示自变量 z 的值,用 w 平面上的点表示函数 w 的值,则函数 $w=f(z)$ 可看做 z 平面上一个点集 G(定义集合)到 w 平面上一个集合 G^*(函数值集合)的映射(变换),那么 z 称为 w 的原象,G 称为原象集,w 称为 z 的映象,G^* 称为象集.

4.复变函数的反函数

若函数 $w=f(z)$ 的定义集合为 z 平面上的 G,函数值集合为 w 平面上的 G^*,则 G^* 中的每一个点 w 必对应 G 中的一个(或几个)点,于是在 G^* 上确定了一个单值(或多值)函数 $z=\varphi(w)$,称为函数 $w=f(z)$ 的反函数,也称为映射 $w=f(z)$ 的逆映射.

对任意 $w\in G^*$,有 $w=f[\varphi(w)]$.

当反函数为单值函数时,有 $z=\varphi[f(z)]$, $z\in G$.

当 $w=f(z)$ 与 $z=\varphi(w)$ 都是单值函数时,称函数 $w=f(z)$ 是一一对应的,此时也称集合 G 与 G^* 是一一对应的.若 $z_1\neq z_2$,则 $f(z_1)\neq f(z_2)$,那么称 $w=f(z)$ 为单叶函数.

1.3.2 复变函数的极限

1.定义

定义 设函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义.若有一个确定的数 A 存在,对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta(\varepsilon)>0$ $(0<\delta(\varepsilon)\leqslant\rho)$,使得当 $0<|z-z_0|<\delta(\varepsilon)$ 时,有 $|f(z)-A|<\varepsilon$ 成立,则称 A 为 $f(z)$ 当 z 趋向于 z_0 时的极限,记作

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A \tag{1-25}$$

注 z 趋向于 z_0 的方式是任意的.

2.关于极限的计算

(1) 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, $A=u_0+\mathrm{i}v_0$, $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$,则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)=u_0$ 和 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}v(x,y)=v_0$ 成立.即

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A \iff \begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)=u_0\\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}v(x,y)=v_0\end{cases} \tag{1-26}$$

(2) 如果$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$,则

$$\begin{cases} \lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B \\ \lim\limits_{z\to z_0} f(z)g(z)=AB \\ \lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B} \qquad (B\neq 0) \end{cases} \tag{1-27}$$

(3) 关于含 ∞ 的极限

$$\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right)=A(\text{有限数}) \iff \lim_{z\to\infty} f(z)=A \tag{1-28}$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=0 \iff \lim_{z\to z_0} f(z)=\infty \tag{1-29}$$

1.3.3 复变函数的连续性

1.定义

定义 如果$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$,则称函数$f(z)$在$z_0$处连续.如果$f(z)$在区域$D$内处处连续,则称$f(z)$在$D$内连续.

2.复变函数的连续性

(1) 函数$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$处连续的充分必要条件是$u(x,y)$,$v(x,y)$在$(x_0,y_0)$处连续,即

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0) \iff \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u(x_0,y_0) \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v(x_0,y_0) \end{cases} \tag{1-30}$$

(2)① 若$f(z)$和$g(z)$在z_0点连续,则它们的和、差、积、商(分母在z_0不为零)也在z_0点连续.

② 如果函数$h=g(z)$在z_0连续,函数$w=f(h)$在$h_0=g(z_0)$连续,则复合函数$w=f[g(z)]$在z_0连续.

③ 若
$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0),\ z\in C \tag{1-31}$$
则称函数$f(z)$在曲线C上连续.

3.有理函数的连续性

有理整函数$w=P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$在复平面上处处连续.

有理分式函数$w=P(z)/Q(z)$(其中$P(z)$,$Q(z)$是有理整函数)在复平面上分母不为零的点处连续.

4.有界闭集上连续函数的性质