高等学校教材

常微分方程

第二版

东北师范大学微分方程教研室

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高 等 学 校 教 材

常微分方程

（第二版）

东北师范大学微分方程教研室

高等教育出版社

内容提要

本书是在东北师范大学数学系微分方程教研室所编的常微分方程教材的基础上，按照现行教学大纲的要求修订而成的。这次修订在基本保持原教材风貌的基础上，更正了原教材的个别错误，补充了少量新内容，增加了一些联系实际的应用方面的内容，充实了教材的配套习题，调整了某些内容的教学顺序。

本书可作为高等院校特别是高等师范院校数学系本科生教材，也可以作为师范专科学校数学专业(三年制)教材。

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/东北师范大学微分方程教研室.—2版.—北京：高等教育出版社，2005.4

ISBN 7-04-016135-4

Ⅰ.常... Ⅱ.东... Ⅲ.常微分方程-高等学校-教材 Ⅳ.O175.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第009008号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	河北省财政厅印刷厂		
		版　　次	1982年10月第1版
开　　本	850×1168　1/32		2005年4月第2版
印　　张	9.875	印　　次	2005年4月第1次印刷
字　　数	250 000	定　　价	15.10元

物料号　16135-00

第一版前言

这本书是在我系《常微分方程》讲义的基础上写成的。先后参加编写工作的有史希福、杨思讱、任永泰、陈秀东等同志以及我本人。最后由我进行了修订与编纂的工作。本书的习题则主要是由陈秀东、马淑媛与潘家齐等同志选配的。

本书内容除个别地方外，基本上是符合高等师范院校《常微分方程》教学大纲的。由于考虑到变分思想在近代数学中的重要性，而高师院校又一般不开设《变分法》课程，因此我们编了《变分法大意》做为附录。我们觉得，这对于学习泛函分析也是有一定益处的。

我们感谢参加1981年4月高等师范院校《常微分方程》评选会的专家们对我们所提出的宝贵意见，感谢北京大学丁同仁同志对我们教材所进行的详细分析与热情的帮助。我们根据他们的意见对某些内容进行了较大的修改。值得特别提到的是，浙江大学蔡燧林同志及山东师范大学庄万同志对我们的修改稿又再次进行了认真详细的审查，对此，我们也深表谢意。

但是，由于我们水平有限，这本书一定会有很多缺点与错误，请使用的老师及同学们提出批评意见。我们一定虚心接受，以便今后修改，提高质量。

东北师范大学数学系
黄启昌
一九八二年五月于长春市

第二版前言

原东北师范大学数学系微分方程教研室于1982年所编的“常微分方程”教材，自出版以来，一直受到全国许多高等院校师生的欢迎，至今已20多年了。在东北师范大学数学系已故黄启昌教授的倡导下，我们对这本教材进行了必要的修订工作。在基本保持原教材风貌的基础上，更正了原教材的个别错误，补充了少数新内容，充实了教材的配套习题，调整了某些内容的教学顺序。希望能够更好地符合新形势下高等院校“常微分方程”课程的教学需要。

本教材基本上符合高等院校“常微分方程”教学大纲，个别可能超出大纲的内容已加星号标出，供教师和学生参考。

新版教材对原教材比较大的修改如下：

1. 把原来第一章中“线素场，欧拉折线”以及有关奇解的内容放到了第二章。因为这些内容与基本理论的关系比与初等积分法的关系更为密切。这样做可以使相关内容结合的更为自然。

2. 把原教材第三章“线性微分方程”和第四章“线性微分方程组”的顺序作了对调。我们认为这样做更加符合认知规律，方便教学，并且可以节省一些教学时间。

3. 把变分法简介，由原书的附录，变为教材的正式内容（可选讲）。

4. 增加了一些联系实际的应用方面的内容。

5. 对第五章平面定性理论简介中有关极限环的内容作了适当的增加。

6. 新版教材有配套的教学指导书和习题解答，希望能使本教材更加易学易用。

因水平所限，本版一定还有不足，乃至错误之处，热切希望使

用本教材的广大师生和有关专家批评指正。

本书在编写的过程中，得到了高等教育出版社和东北师范大学有关部门的大力支持，谨致谢意。

东北师范大学数学与统计学院
王克　潘家齐
二〇〇五年一月于长春市

目　　录

第一章　初等积分法

1.1　微分方程和解

1.1.1　微分方程

为了说明什么是微分方程,先复习一下关于方程的一些基本概念.所谓方程,是指那些含有未知量的等式,它表达了未知量所必须满足的某种条件.方程的类型繁多,其分类的主要依据就是未知量的类型和对未知量所施加的数学运算.

如果在一方程中的未知量是数,这样的方程就是代数方程或超越方程.如果在一个方程中的未知量是函数,这样的方程就称为函数方程.如果在一个函数方程中含有对未知函数的积分运算或者在积分号下有未知函数,这样的函数方程就称为积分方程.如果在一个函数方程中含有对未知函数的求导运算或微分运算,这样的函数方程就称为微分方程.微分方程有深刻而生动的实际背景,它从生产实践与科学技术中产生,而又成为现代科学技术中分析问题与解决问题的一个强有力的工具.在人们探求物质世界运动规律的过程中,一般很难全靠实验观测认识清楚运动规律,因为人们不太可能观察到运动的全过程.然而,运动物体(变量)与它的瞬时变化率(导数)之间,通常在运动过程中按照某种已知定律存在着联系,我们容易捕捉到这种联系,而这种联系,用数学语言表达出来,其结果往往形成一个微分方程.一旦求出这个方程的解,其运动规律将一目了然.下面的例子,将会使你看到微分方程是表达自然规律的一种自然的数学语言.

例 1　物体下落问题

设质量为 m 的物体，在时间 $t=0$ 时，在距地面高度为 H 处以初始速度 $v(0)=v_0$ 垂直地面下落，求此物体下落时距离与时间的关系.

解　如图 1-1 建立坐标系，设 $x=x(t)$ 为 t 时刻物体的位置坐标. 于是物体下落的速度为

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

加速度为

$$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

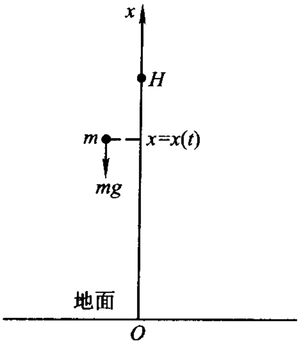

图　1-1

质量为 m 的物体，在下落的任一时刻所受到的外力有重力 mg 和空气阻力，当速度不太大时，空气阻力可取为与速度成正比. 于是根据牛顿第二定律

$$F=ma\quad（力=质量\times加速度）$$

可以列出方程

$$m\ddot{x}=k\dot{x}-mg\left(\cdot=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\tag{1.1}$$

其中 $k>0$ 为阻尼系数，g 是重力加速度.

(1.1)式就是一个微分方程，这里 t 是自变量，x 是未知函数，$\dot{x}$，$\ddot{x}$是未知函数对 t 的导数. 现在，我们还不会求解方程(1.1)，但是，如果考虑 $k=0$ 的情形，即自由落体运动，此时方程(1.1)可化为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-g\tag{1.2}$$

将上式对 t 积分两次得

$$x(t)=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2\tag{1.3}$$

其中 C_1 和 C_2 是两个独立的任意常数,(1.3)是方程(1.2)的解.

像上述例子,在许多实际问题中不胜枚举,我们将在以后的章节中逐步加以介绍.

一般说来,**微分方程**就是联系自变量、未知函数以及未知函数的某些导数的等式.如果其中的未知函数只与一个自变量有关,则称为**常微分方程**;如果未知函数是两个或两个以上自变量的函数,并且在方程中出现偏导数,则称为**偏微分方程**.本书所介绍的主要是常微分方程,有时就简称微分方程或方程.

例如下面的方程都是常微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x \tag{1.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}} \tag{1.5}$$

$$\ddot{x}+x=0\left(\cdot=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \tag{1.6}$$

$$yy''+y'^2=0\left('=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) \tag{1.7}$$

在一个常微分方程中,未知函数最高阶导数的阶数,称为**方程的阶**.这样,一阶常微分方程的一般形式可表示为

$$F(x,y,y')=0 \tag{1.8}$$

如果在(1.8)中能将 y' 解出,则得到方程

$$y'=f(x,y) \tag{1.9}$$

或

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{1.10}$$

(1.8)称为**一阶隐式方程**,(1.9)称为**一阶显式方程**,(1.10)称为**微分形式**的一阶方程.

n **阶隐式方程**的一般形式为

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{1.11}$$

n **阶显式方程**的一般形式为

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}) \tag{1.12}$$

在方程(1.11)中,如果左端函数 F 对未知函数 y 和它的各阶导数 $y',y'',\cdots,y^{(n)}$ 分别都是一次的,则称为**线性常微分方程**,否则称它为**非线性常微分方程**.这样,一个以 y 为未知函数,以 x 为自变量的 n 阶线性微分方程具有如下形式:

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}(x)y'+P_n(x)y=f(x) \tag{1.13}$$

我们将在第四章详细讨论方程(1.13).

显然,方程(1.4)是一阶线性方程;方程(1.5)是一阶非线性方程;方程(1.6)是二阶线性方程;方程(1.7)是二阶非线性方程.

对于常微分方程组也有类似概念,我们将在第三章加以讨论.

1.1.2 通解与特解

微分方程的解就是满足方程的函数,可定义如下.

定义 1.1 设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上有直到 n 阶的导数.如果把 $y=\varphi(x)$ 代入方程(1.11),得到在区间 I 上关于 x 的恒等式

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0$$

则称 $y=\varphi(x)$ 为方程(1.11)在区间 I 上的一个解.

这样,从定义 1.1 可以直接验证:

1. 函数 $y=x^2+C$ 是方程(1.4)在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的解,其中 C 是任意的常数.

2. 函数 $y=\sin(\arcsin x+C)$ 是方程(1.5)在区间 $(-1,+1)$ 上的解,其中 C 是任意常数.又方程(1.5)有两个明显的常数解 $y=\pm 1$,这两个解不包含在上述解中.

3. 函数 $x=C_1\cos t+C_2\sin t$ 是方程(1.6)在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的解,其中 C_1 和 C_2 是独立的任意常数.

4. 函数 $y^2=C_1x+C_2$ 是方程(1.7)在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的解,其中 C_1 和 C_2 是独立的任意常数.

这里，我们仅验证 3，其余留给读者完成．事实上，在 $(-\infty, +\infty)$ 上有

$$\ddot{x} = -(C_1\cos t + C_2\sin t)$$

所以在 $(-\infty, +\infty)$ 上有

$$\ddot{x} + x \equiv 0$$

从而该函数是方程(1.6)的解．

从上面的讨论中可以看到一个重要事实，那就是微分方程的解中可以包含任意常数，其中任意常数的个数可以多到与方程的阶数相等，也可以不含任意常数．我们把 n 阶常微分方程(1.11)的含有 n 个独立的任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的解 $y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$，称为该方程的**通解**，如果方程(1.11)的解 $y = \varphi(x)$ 不包含任意常数，则称它为**特解**．由隐式表示的通解称为**通积分**，而由隐式表示的特解称为**特积分**．

由上面的定义不难看出，函数 $y = x^2 + C$，$y = \sin(\arcsin x + C)$ 和 $x = C_1\cos t + C_2\sin t$ 分别是方程(1.4)，(1.5)和(1.6)的通解，函数 $y^2 = C_1 x + C_2$ 是方程(1.7)的通积分，而函数 $y = \pm 1$ 是方程(1.5)的特解．通常方程的特解可对通解中的任意常数给以定值确定，这种确定过程，需要下面介绍的**初始值条件**，或简称**初值条件**．

1.1.3 初值问题

例 1 中的函数(1.3)显然是方程(1.2)的通解，由于 C_1 和 C_2 是两个任意常数，这表明方程(1.2)有无数个解，而实际经验表明，一个特定的自由落体运动仅能有一条运动轨迹．产生这种多解性的原因是方程(1.2)所表达的是任何一个自由落体在任意瞬时 t 所满足的关系式，并未考虑运动的初始状态，因此，通过积分求得的其通解(1.3)所描述的是任何一个自由落体的运动规律．显然，在同一初始时刻，从不同的高度或以不同初速度自由下落的物体，应有不同的运动轨迹．为了求解满足初值条件的解，我们可以把例

1中给出的两个初值条件,即初始位置 $x(0)=H$ 和初始速度 $\dot{x}(0)=v_0$ 代入到通解中,推得

$$C_1=v_0, C_2=H$$

于是,得到满足上述初值条件的特解为

$$x=H-\frac{1}{2}gt^2+v_0 t \tag{1.14}$$

它描述了初始高度为 H,初始速度为 v_0 的自由落体运动的规律.

求微分方程满足初值条件的解的问题称为**初值问题**.

于是我们称(1.14)是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}=-g\\ x(0)=H, \dot{x}(0)=v_0\end{cases}$$

的解.

对于一个 n 阶方程,初值条件的一般提法是

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0', \cdots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \tag{1.15}$$

其中 x_0 是自变量的某个取定值,而 $y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}$ 是相应的未知函数及导数的给定值.方程(1.12)的初值问题常记为

$$\begin{cases}y^{(n)}=f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})\\ y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0', \cdots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}\end{cases} \tag{1.16}$$

初值问题也常称为**柯西**(Cauchy)问题.

对于一阶方程,若已求出通解 $y=\varphi(x, C)$,一般只要把初值条件

$$y(x_0)=y_0$$

代入通解中,得到方程

$$y_0=\varphi(x_0, C)$$

从中解出 C,设为 C_0,代入通解,即得满足初值条件的解 $y=\varphi(x, C_0)$.

对于 n 阶方程,若已求出通解 $y=\varphi(x, C_1, \cdots, C_n)$,代入初