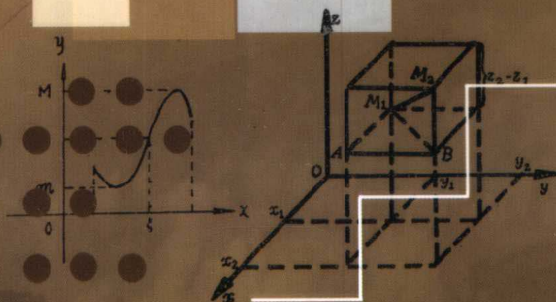


军队院校统编教材

主编 汪名杰



黄河出版社



(上册)

• GAODENGSHUXUE

高等数学

军队院校统编教材

高等数学

(上册)

江苏工业学院图书馆
藏书章

编 汪名杰
主 杨建民
副 陆克斌
部 彪 倪志强
吴建国

黄河出版社

责任编辑 胡耀武

封面设计 张宪峰

书 名 高等数学(上、下)

主 编 汪名杰

出版发行 黄河出版社

社 址 (250002)山东省济南市英雄山路 19 号

电 话 (0531)2053974 地线;(0421)87215 军线

印 刷 者 莱芜市圣龙印务书刊有限责任公司

开 本 850×1168 毫米 1/32

印 张 20

字 数 500 千字

版 次 2002 年 7 月第 1 版

印 次 2002 年 7 月第 1 次印刷

统一书号 780152·18

定 价 28.00 元(上、下册)

版权所有·请勿擅自制作或翻印本书·违者必究

如发现印装质量问题,请与本社联系调换

前 言

“高新技术本质上是数学技术。”随着科学技术的飞速发展,数学的地位和作用日益提高,数学课程的教学不仅是为后继课程的学习提供知识基础,更主要的是培养学员的科学思维品质、提高学员的科学文化素养.正因如此,所有军队院校均将高等数学列为一门重要的基础公共课.

为了适应军队院校培养应用型人才的需要,并结合教学实际,我们组织了几位长期从事一线教学的优秀教员编写了这套《高等数学》教材.本教材主要依据国家教委颁发的高等工程专科学校《高等数学课程教学基本要求》,贯彻“以应用为目的,以必需、够用为度”的原则,精选教学内容,科学编排,注重基本概念、基本理论和基本方法的介绍,力求用通俗的数学语言讲清概念,用简易的方法引证理论,用不同类型的例题归纳方法,以达到培养学员发现问题、分析问题和解决问题的能力.

本教材分上、下两册.上册包括函数、极限、连续,导数与积分,导数的应用,不定积分,定积分,定积分的应用,常微分方程;下册包括向量代数与空间解析几

何, 多元函数及其微分, 多元函数与积分, 无穷级数. 各章配有习题, 书末附有各习题参考答案.

本教材在编写、出版过程中, 黄河出版社胡耀武编辑倾注了大量心血, 在此表示衷心感谢. 由于编者水平有限, 加之时间仓促, 书中定有不妥之处, 敬请使用本教材的同行和广大读者批评指正.

编 者

2002 年 7 月

目 录

第一章 函数 极限 连续	(1)
第一节 函数	(1)
一 函数的概念	(1)
二 函数的几种特性	(4)
三 初等函数	(7)
四 建立函数关系举例	(10)
●习题 1~1	(11)
第二节 极限的概念	(13)
一 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限	(13)
二 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限	(17)
三 数列极限	(19)
●习题 1~2	(22)
第三节 无穷小与无穷大	(23)
一 无穷小	(24)
二 无穷大	(25)
三 无穷小的性质	(25)
●习题 1~3	(26)
第四节 极限运算法则	(27)
●习题 1~4	(32)
第五节 两个重要极限	(32)

一 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	(32)
二 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$	(35)
●习题 1~5	(39)
第六节 无穷小的比较	(40)
●习题 1~6	(43)
第七节 函数的连续性	(44)
一 连续函数的概念	(44)
二 连续函数的基本性质	(47)
三 函数间断点及其分类	(51)
●习题 1~7	(53)
●总习题一	(54)
第二章 导数与微分	(56)
第一节 导数的概念	(56)
一 函数的变化率	(56)
二 导数的定义	(58)
三 求导函数举例	(61)
四 导数的几何意义	(64)
五 可导与连续的关系	(66)
●习题 2~1	(68)
第二节 函数的求导法则	(70)
一 导数的四则运算	(70)
二 复合函数的导数	(74)
三 反函数的导数	(78)
四 隐函数及参数方程所表示的函数的导数	(81)
●习题 2~2	(87)
第三节 高阶导数	(90)

一 显函数的高阶导数	(90)
二 隐函数的二阶导数	(92)
三 由参数方程确定的函数的二阶导数	(93)
●习题 2~3	(95)
第四节 微分及其应用	(97)
一 微分的概念	(97)
二 微分的几何意义	(100)
三 微分的运算法则	(101)
四 微分在近似计算中的应用	(106)
●习题 2~4	(108)
●总习题二	(110)
第三章 导数的应用	(114)
第一节 微分中值定理	(114)
一 罗尔定理	(114)
二 拉格朗日中值定理	(116)
三 柯西中值定理	(118)
●习题 3~1	(119)
第二节 洛必塔法则	(120)
一 未定式 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 的极限	(120)
二 其它未定式的极限	(123)
●习题 3~2	(127)
第三节 函数的单调性及其极值	(128)
一 函数单调性的判别法	(128)
二 函数的极值及求法	(131)
三 函数的最大值和最小值	(137)
●习题 3~3	(138)

第四节 曲线的凹凸与拐点	(140)
一 曲线的凹凸及其判定	(140)
二 曲线的拐点及其求法	(142)
●习题 3~4	(144)
第五节 函数图形的描绘	(144)
一 铅直渐近线和水平渐近线	(144)
二 函数图形的描绘	(145)
●习题 3~5	(148)
●总习题三	(148)
第四章 不定积分	(152)
第一节 不定积分的概念	(152)
一 原函数与不定积分	(152)
二 基本积分公式	(155)
三 不定积分的性质	(157)
●习题 4~1	(160)
第二节 换元积分法	(162)
一 第一类换元法	(162)
二 第二类换元法	(170)
●习题 4~2	(176)
第三节 分部积分法	(177)
●习题 4~3	(183)
第四节 有理函数的积分	(184)
●习题 4~4	(190)
第五节 积分表的使用	(191)
●习题 4~5	(194)
●总习题四	(194)
第五章 定积分	(197)

第一节 定积分的概念与性质	(197)
一 两个实际问题	(197)
二 定积分的概念	(201)
三 定积分的几何意义	(204)
四 定积分的性质	(205)
●习题 5~1	(208)
第二节 微积分基本公式	(209)
一 变上限积分函数的导数	(209)
二 微积分基本公式	(212)
●习题 5~2	(216)
第三节 定积分的换元法和分部积分法	(217)
一 定积分的换元积分法	(217)
二 定积分的分部积分法	(222)
●习题 5~3	(226)
第四节 广义积分	(228)
一 无穷区间的广义积分	(228)
二 无界函数的广义积分	(232)
●习题 5~4	(235)
●总习题五	(236)
第六章 定积分的应用	(239)
第一节 定积分的微元法	(239)
第二节 平面图形的面积	(241)
一 直角坐标系中平面图形的面积	(241)
二 极坐标系中平面图形的面积	(245)
●习题 6~2	(246)
第三节 体积和平面曲线的弧长	(248)
一 平行截面面积为已知的立体体积	(248)

二 旋转体的体积	(249)
三 平面曲线的弧长	(253)
●习题 6~3	(255)
第四节 定积分的物理应用	(256)
一 功	(256)
二 液体的压力	(259)
●习题 6~4	(260)
●总习题六	(261)
第七章 常微分方程	(263)
第一节 微分方程的基本概念	(263)
一 微分方程	(263)
二 微分方程的解	(264)
●习题 7~1	(267)
第二节 一阶微分方程	(268)
一 可分离变量的微分方程	(268)
二 一阶线性微分方程	(271)
●习题 7~2	(276)
第三节 一阶微分方程应用举例	(277)
●习题 7~3	(280)
第四节 可降阶的高阶微分方程	(281)
一 $y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程	(281)
二 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程	(283)
●习题 7~4	(285)
第五节 二阶常系数线性微分方程	(285)
一 二阶线性微分方程解的结构	(286)
二 二阶常系数线性齐次微分方程的解法	(289)
三 二阶常系数线性非齐次微分方程的解法	(293)

四 应用举例	(299)
●习题 7~5	(303)
●总习题七	(305)
附 录	(307)
参考答案	(321)

第一章 函数 极限 连续

函数是高等数学研究的主要对象,极限是贯穿高等数学始终的一个重要概念,是高等数学研究问题的基本工具,连续则是函数的一个重要性态.本章将介绍函数、极限、连续等基本概念,以及它们的一些性质.

第一节 函 数

一 函数的概念

在中学里我们已经学过有关函数的基本知识,为了更好地学习高等数学,我们将有关的内容系统地再回顾一下.

定义 设 D 为一个非空实数集合,如果存在确定的对应法则 f ,使得对于 D 中的任意一个数 x ,按照法则 f 都有确定的实数 y 与之对应,则称 f 是定义在集合 D 上的函数. x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为函数的定义域. x 所对应的 y 称为 x 的函数值,记为

$$y = f(x).$$

集合 $W = \{y | y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 f 的值域. $f(x)$ 与 f 二者并不相同.但是人们往往是通过函数值来研究函数,因此也称 $y = f(x)$ 是 x 的函数.

不难看出,函数是由定义域和对应法则所确定的.对于两个函

数而言,当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时,才表示同一函数.而与自变量及因变量用什么字母表示无关,如函数 $y = f(x)$ 也可用 $y = f(t)$ 表示.

如果 $x_0 \in D$, 称函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处有定义.函数 f 的函数值记为

$$y|_{x=x_0} \text{ 或 } f(x_0).$$

不同的对应法则表示不同的函数,如 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 、 $y = \varphi(x)$ 等等.

通常函数有三种表示法:公式法、表格法、图示法.公式法是以数学式子表示函数的方法,如 $y = x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$;表格法是以表格形式表示函数的方法,如三角函数表、对数表等;在坐标系中,以图形表示函数的方法称为图示法.

在实际应用中,有时会遇到函数在定义域的不同范围具有不同表达式的情形,这样的函数叫做**分段函数**.例如,符号函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\{-1, 0, 1\}$. 它的图形如图1-1所示.

对于给定的 x 值,对应的 y 值有多个时,称函数为**多值函数**,对于给定的 x 值,对应的 y 值惟一时,称函数为**单值函数**.例如,方程 $y^2 = x$ 在 $(0, +\infty)$ 内确定一个多值函数,而 $y = \sqrt{x}$ 与 $y = -\sqrt{x}$ 是它的两个单值分支.

我们在给出一个函数时,一般都应标明其定义域.函数的定义域是使函数有意义的自变量取值范围.但对于反映实际现象的函数,其定义域要根据问题的实际意义来确定.如圆的面积公式

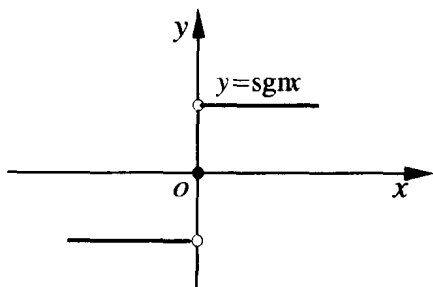


图 1-1

$S = \pi r^2$, r 的定义域应为 $(0, +\infty)$ 而非 $(-\infty, +\infty)$. 通常用不等式、区间或集合形式来表示定义域.

例 1 确定函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$ 的定义域.

解 使该函数有意义的 x 应满足不等式组

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 1-x^2 \geq 0. \end{cases}$$

解此不等式组, 得其定义域为:

$$-1 \leq x < 0 \text{ 或 } 0 < x \leq 1, \text{ 即: } [-1, 0) \cup (0, 1].$$

用集合形式表示为 $D = \{x | x \in [-1, 0) \cup (0, 1]\}$.

例 2 设函数 $f(x) = \sqrt{4+x^2}$, 求 $f(0)$, $f(1)$, $f(\frac{1}{a})$, $f(t^2)$, $[f(t)]^2$ (其中 $a \neq 0$).

$$\text{解 } f(0) = \sqrt{4+0^2} = 2;$$

$$f(1) = \sqrt{4+1^2} = \sqrt{5};$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \sqrt{4 + \frac{1}{a^2}} = \sqrt{\frac{4a^2 + 1}{a^2}} = \frac{1}{|a|} \sqrt{4a^2 + 1};$$

$$f(t^2) = \sqrt{4 + (t^2)^2} = \sqrt{4 + t^4};$$

$$[f(t)]^2 = (\sqrt{4 + t^2})^2 = 4 + t^2.$$

二 函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,若存在一个正数 M ,当 $x \in I$ 时,恒有

$$|f(x)| \leq M$$

成立,则称函数 $f(x)$ 为区间 I 上的有界函数;如果不存在这样的正数 M ,则称函数 $f(x)$ 为区间 I 上的无界函数.

例如,函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界函数,因为对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都有 $|\sin x| \leq 1$ 成立.而函数 $f(x) = \operatorname{tg} x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内是无界函数.

有的函数在定义域的某一部分有界,而在另一部分无界.例如,函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ 上有界,在区间 $(0, 1)$ 内无界.因此我们说一个函数是有界还是无界,应该同时指出其自变量的相应取值范围.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 内有定义,如果对于区间 I 内的任意两点 x_1 和 x_2 ,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内单调增加;如果对于区间 I 内的任意两点 x_1 和 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内单调减少.

例如, 函数 $y = x^2$ 在区间 $[0, +\infty)$ 内单调增加, 在区间 $(-\infty, 0]$ 内单调减少; 而在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内函数 $y = x^2$ 既不是单调增加也不是单调减少(图1-2).

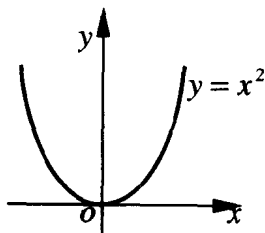


图1-2

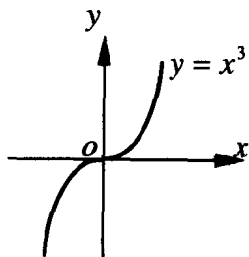


图1-3

又例如, 函数 $f(x) = x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的(图1-3).

单调增加和单调减少函数统称为单调函数. 从几何直观来看, 函数单调增加, 就是当 x 自左向右变化时, 函数的图形上升; 函数单调减少, 就是当 x 自左向右变化时, 函数的图形下降.

3. 奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对于定义域中的任意 x , 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $y = f(x)$ 为偶函数; 如果对于定义域中的任意 x , 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $y = f(x)$ 为奇函数. 偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

例如, $y = x^2$ 与 $y = \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是偶函数, $y = x^3$ 与 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是奇函数. 而 $y = x + \cos x$ 则既非奇