# 趣味数学故事

杨振享　杨彦西

河北教育出版社

# 趣味数学故事

杨振享　杨彦西

河北教育出版社

封面设计：慈向群
责任编辑：杨士蕙

**趣味数学故事**

**杨振亨　杨彦西**

---

河北教育出版社出版（石家庄市北马路45号）
河北新华印刷一厂印刷　河北省新华书店发行

---

787×1092毫米 1/32　5印张　99,000字　1989年9月第1版
1989年9月第1次印刷　印数：1—3,100　定价：1.35元

ISBN 7-5434-0393-5/G·325

# 前　言

为了引起少年们学习数学的兴趣，启发他们的逻辑思维，提高分析问题和解决问题的能力，特编写了这本《趣味数学故事》，供广大少年读者参考。

要想学好数学，必须对数学有深厚的感情和浓厚的兴趣，彻底克服那种对数学的恐惧、神密心理。本书如果能在这方面起到一点作用，作者就心满意足了。

本书是科学普及读物。结合社会主义建设实际，介绍数学科学的基础知识。在编写上力求做到文字简练，生动活泼，深入浅出，通俗易懂，其中每个故事一般不超过千字，最短的只有一二百字，内容生动，形式多样，富有趣味和启发性，能启迪你的思维，如果你能在茶余饭后看上几个故事，则能使你在消遣娱乐之中不自觉地学到一些数学知识，培养你的数学兴趣，使你的思路活跃。它们肯定能锻炼我们的思想机器，使我们变得更加聪明。

由于时间仓促，水平所限，错误和不妥之处恐难避免，切望读者批评指正。

作者

一九八七年三月十二日

# 目　　录

# 一、数 的 趣 闻

# 1 “0”的真本领

说起数“0”来，它有很多与众不同的特点，其他几个数码很不服气。

首先最不满意的是9。它不高兴地说：“任何数后面添上0，便增加到原来的10倍，这又算什么本事呢？添上9不是变10倍多吗？并且零只能往后添，我们可都是前后可添！要是前面添个9，不是变得更大吗？”

7接着说：“一个数的0次幂是1，也值得夸吗？每个数自己除自己都得1！偏偏0不能自己除自己！0最没本领！”

1更不甘示弱：“任何数加0不变，也不过是0沾了加法的光罢了。如果请乘法出面，任何数乘1不也是不变吗？”

5说：“0是负数和正数的界限，这当然不错，但哪个数不能当界限呢？我5，不是四舍五入的界限吗？”

6说：“对呀！界限是人规定的。考试60分及格，60分就成了一个界限。坐火车身高一米以上的儿童要买票，一米也成了界限！”

大家叽叽喳喳，议论不休。特别对于恩格斯说的，一个方程，只有右端为零时，它的意义才能完全表现出来，它们觉得难以接受。为什么恩格斯这样偏爱0呢？找恩格斯找不到，大家便去数学医院找张大夫。张大夫说：

“每个数都有自己的特色和作用，例如9，就有很多妙用，用它可以作许多数学游戏。不是吗？

7也有许多有趣的性质，比如，1除以7得0.142857，142857乘以2，得285714，142857乘以3，得428571，142857乘以4，得571428……。总是这六个数码轮换。

2是唯一的偶素数。2维空间的几何学里，有许多特别有趣的定理。2在哲学上也很重要，一分为“2”嘛！

3也了不起。三角形多么重要，它有“3”个角，还有“3”条边？讨论数学问题，常常分成大于、等于、小于三种情况研究。这叫做“三歧性”！平面上三点确定一个圆，空间三点确定一个平面，所以日常生活中有好多东西是“3”条腿。

张大夫把几个数的特点都摆了一下，最后，见大家慢慢心平气和了，才说：

“0确实有它的真本领。

“以0为界限把实数分成正数、负数和0，这样才有可能同号相乘得正，异号相乘得负，如果用5作界限，规律就不好找了。

“方程右端要搞成0，是有道理的，你看：

$$(x-2)(x-3)=0,$$

写上就知道 $x-2=0$ 或 $x-3=0$。两个根都求出来了。若是

$$(x-2)(x-3)=1,$$

这个方程就还要经过一番周折才解得出来！”

从此，数码们不在为0的特殊地位而愤愤不平了。它们知道了，尽管大家各有特点，0也确有自己的真本领。

## 2


1987年前夕，河北东方中学的同学们特拟“1987”数题，举行庆新年迎新春数学晚会，同学们同庆，共欢，有意思极了。他们的题目是：

(1) 试证 $5^{1987}+6^{1987}<7^{1987}$.

略证：$\because$ $\left(\frac{5}{7}\right)^{1987}+\left(\frac{6}{7}\right)^{1987}<\left(\frac{5}{7}\right)^{3}+\left(\frac{6}{7}\right)^{3}$,

而 $\left(\frac{5}{7}\right)^{3}+\left(\frac{6}{7}\right)^{3}=\frac{5^3+6^3}{7^3}=\frac{125+216}{343}$

$=\frac{341}{343}<1$,

$\therefore$ $\left(\frac{5}{7}\right)^{1987}+\left(\frac{6}{7}\right)^{1987}<1$.

故 $$5^{1987}+6^{1987}<7^{1987}.$$

(2) 试证：

$$\underbrace{99\cdots9}_{1987个}\times\underbrace{99\cdots9}_{1987个}+1\underbrace{99\cdots9}_{1987个}=100^{1987}.$$

略证：

$$\begin{aligned}左边&=\underbrace{99\cdots9}_{1987个}\times\underbrace{99\cdots9}_{1987个}+10^{1987}+\underbrace{99\cdots9}_{1987个}\\&=\underbrace{99\cdots9}_{1987个}\times(\underbrace{99\cdots9}_{1987个}+1)+10^{1987}\\&=\underbrace{99\cdots9}_{1987个}\times10^{1987}+10^{1987}\end{aligned}$$

$$= 10^{1987}(\underbrace{99\cdots9}_{1987个}+1)$$

$$= 10^{1987}\times10^{1987}=100^{1987}.$$

(3) 试证：$\underbrace{11\cdots1}_{1987个}\underbrace{22\cdots2}_{1987个}$ 能被 $\underbrace{33\cdots3}_{1987个}$ 整除。

略证：$\underbrace{11\cdots1}_{1987}\underbrace{22\cdots2}_{1987}=\underbrace{11\cdots1}_{1987}\times(10^{1987}+2)$，

而 $10^{1987}+2$ 的各位数字之和为3，所以 $10^{1987}+2$ 能被3整除，所以 $\underbrace{11\cdots1}_{1987个}\underbrace{22\cdots2}_{1987个}$ 能被 $\underbrace{11\cdots1}_{1987个}$ 和 3 整除，即能被 $\underbrace{11\cdots1}_{1987个}\times3=\underbrace{33\cdots3}_{1987个}$ 整除。

(4) 比较下列两数的大小：

①$1987^{1987}\cdot1986^{1986}$ 和 $1987^{1986}\cdot1986^{1987}$；

②$\log_{1986}1987$ 和 $\log_{1987}1988$。

解 ①$1987^{1987}\cdot1986^{1986}=1987^{1986}\cdot1987\cdot1986^{1986}$

$>1987^{1986}\cdot1986\cdot1986^{1986}=1987^{1986}\cdot1986^{1987}$.

②$\log_{1986}1987>0$，$\log_{1987}1988>0$，

又 $\log_{1987}1986=\dfrac{1}{\log_{1986}1987}$，

从而 $\log_{1987}1986>0$.

由 $\sqrt{\log_{1987}1986\cdot\log_{1987}1988}\leqslant\frac{1}{2}(\log_{1987}1986+\log_{1987}1988)$

$=\frac{1}{2}\log_{1987}(1986\times1988)<\frac{1}{2}\log_{1987}1987^2=1.$

得 $\log_{1987}1986\cdot\log_{1987}1988<1$，

即 $\log_{1986}1987>\log_{1987}1988$.

(5) 设 $a^2+a+1=0$，求证：

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^{1987}=a^{1987}+\frac{1}{a^{1987}}.$$

证明：由 $a^2+a+1=0$ 知 $a\neq 1$，$a\neq 0$，于是

$$(a-1)(a^2+a+1)=0$$

即 $$a^3-1=0.$$

$\therefore$ $$a^3=1.$$

因此 $$a^{1987}+\frac{1}{a^{1987}}=\frac{(a^3)^{663}}{a^2}+\frac{a^2}{(a^3)^{663}}$$

$$=\frac{1}{a^2}+a^2$$

$$=\left(\frac{1}{a}+a\right)^2-2.$$

又由 $a^2+a+1=0$ 知 $a\neq 0$，

于是有 $$\frac{1}{a}+a=-1.$$

$\therefore$ $a^{1987}+\frac{1}{a^{1987}}=(-1)^2-2=-1.$

而 $\left(a+\frac{1}{a}\right)^{1987}=(-1)^{1987}=-1$，

$\therefore$ $\left(a+\frac{1}{a}\right)^{1987}=a^{1987}+\frac{1}{a^{1987}}.$

(6) 设以 $r$ 为半径的圆内接正 1987 边形 $A_1A_2\cdots A_{1987}$，与圆心距离为 $a$ 的一点 $P$。试证：

$$PA_1^2+PA_2^2+\cdots+PA_{1987}^2=1987(r^2+a^2).$$

常

略证：设$\angle POA_1=\theta$，则

$$\angle POA_2=\theta+\frac{2\pi}{1987},$$

$$\angle POA_3=\theta+2\cdot\frac{2\pi}{1987},$$

……，

$$\angle POA_{1987}=\theta+1986\cdot\frac{2\pi}{1987}.$$

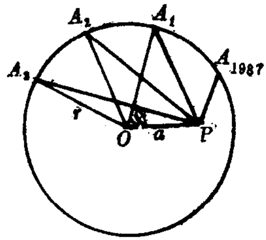


图 1-1

由余弦定理，得：

$$PA_1^2=r^2+a^2-2ra\cos\theta,$$

$$PA_2^2=r^2+a^2-2ra\cdot\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{1987}\right),$$

$$PA_3^2=r^2+a^2-2ra\cdot\cos\left(\theta+2\cdot\frac{2\pi}{1987}\right),$$

……

$$PA_{1987}^2=r^2+a^2-2ra\cdot\cos\left(\theta+1986\cdot\frac{2\pi}{1987}\right).$$

相加，得

$$PA_1^2+PA_2^2+\cdots+PA_{1987}^2=1987(r^2+a^2)-2ra\cdot S$$

其中

$$S=\cos\theta+\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{1987}\right)+\cos\left(\theta+2\cdot\frac{2\pi}{1987}\right)+\cdots+\cos\left(\theta+1986\cdot\frac{2\pi}{1987}\right).$$

$$=\frac{\cos\left[\theta+\frac{1986}{2}\cdot\frac{2\pi}{1987}\right]\cdot\sin\left(\frac{1986+1}{2}\cdot\frac{2\pi}{1987}\right)}{\sin\frac{\frac{2\pi}{1987}}{2}}$$

$$=\frac{\cos\left[\theta+\frac{1986}{2}\cdot\frac{2\pi}{1987}\right]\cdot\sin\pi}{\sin\frac{\pi}{1987}}=0^{*}$$

所以，$PA_1^2+PA_2^2+\cdots+PA_{1987}^2=1987(r^2+a^2)$。

## 3　1986 与 1987

【问题】 有没有这样的自然数，它的最后四位数是1986，并且是 1987 的倍数?

解：假定存在这样的数，设它为 $x$，并设它是 1987的 $y$ 倍。$y$ 的末位数字与 1987 的末位数字 7 相乘所得结果的最后一位数字，等于 $x$ 的末位数字 6。所以 $y$ 的末位数字只能是 8：

$$1987\times 8=15896.$$

$x$ 的最后四位数字是1986，把它的前面各位数字暂用“…”代替，可写成

---

* $\cos\theta+\cos(\theta+\alpha)+\cos(\theta+2\alpha)+\cdots+\cos(\theta+n\alpha)$

$$=\frac{\cos\left(\theta+\frac{n}{2}\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$