

趣味数学故事



杨振享 杨彦西



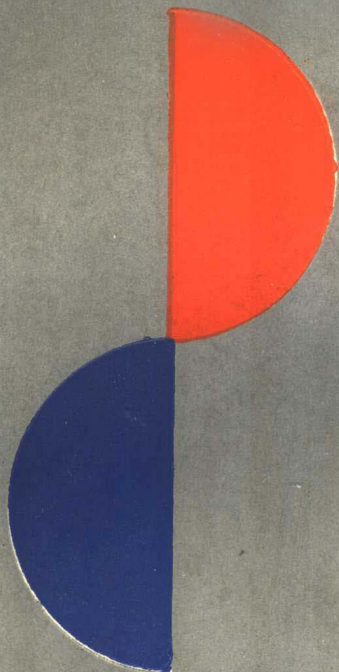
河北教育出版社

趣味数学故事

杨振享 杨彦西

河北教育出版社

封面设计：慈向群
责任编辑：杨士蕙



趣味数学故事

杨振享 杨彦西

河北教育出版社出版（石家庄市北马路45号）

河北新华印刷一厂印刷 河北省新华书店发行

787×1092毫米 1/32	5 印张	99,000 字	1989年9月第1版
1989年9月第1次印刷	印数：1—3,100		定价：1.35 元

ISBN 7-5434-0393-5/G·325

前 言

为了引起少年们学习数学的兴趣，启发他们的逻辑思维，提高分析问题和解决问题的能力，特编写了这本《趣味数学故事》，供广大少年读者参考。

要想学好数学，必须对数学有深厚的感情和浓厚的兴趣，彻底克服那种对数学的恐惧、神秘心理。本书如果能在这方面起到一点作用，作者就心满意足了。

本书是科学普及读物。结合社会主义建设实际，介绍数学科学的基础知识。在编写上力求做到文字简练，生动活泼，深入浅出，通俗易懂，其中每个故事一般不超过千字，最短的只有一二百字，内容生动，形式多样，富有趣味和启发性，能启迪你的思维，如果你能在茶余饭后看上几个故事，则能使你在消遣娱乐之中不自觉地学到一些数学知识，培养你的数学兴趣，使你的思路活跃。它们肯定能锻炼我们的思想机器，使我们变得更加聪明。

由于时间仓促，水平所限，错误和不妥之处恐难避免，切望读者批评指正。

作者

一九八七年三月十二日

目 录

一、数的趣闻	(1)
1. “0”的真本领	(2)
2. 喜迎“1987”	(4)
3. 1986与1987	(8)
4. 神奇的“7”	(10)
5. 数字“7”的趣闻	(12)
6. 数“1”的自述	(13)
7. 奇趣的数	(15)
8. 一类有趣的完全平方数	(16)
9. $\pi = 2?!$	(18)
10. $8.5 \neq 9$	(20)
11. 数字谜	(22)
12. 有趣的数字	(22)
13. 数字“黑洞”	(23)
14. 1000! 由2568个数字组成。请问第2320位数是 几?	(24)
15. 猜想对不对	(24)
16. 有趣的平方数	(26)
17. π 约为 $\sqrt{(40/3)} - \sqrt{12}$	(28)
二、趣味故事	(31)
18. 数学“医生”张大夫的话	(32)
19. 一个年轻的数学分支——对策论	(35)

20. 数学医生的“病例”	(38)
21. 关于龟、兔赛跑问题	(39)
22. “黄金分割”点的自述	(40)
23. 荣方和陈子关于数学的对话	(43)
24. 惊人的计算	(44)
25. 和等于积	(46)
26. 宝塔组词	(47)
27. 勾股数与费尔马问题	(48)
28. 百牛题	(52)
29. 牛顿问题	(55)
30. 猜年龄	(56)
31. 黄金三角板及其应用	(57)
32. π 与金字塔	(60)
33. 圆周率计算的新发展	(60)
34. 数学小故事	(61)
35. 长度等单位的自述	(61)
三、数学趣题	(63)
36. 摆火柴棍	(64)
37. 一笔画	(65)
38. 玩数的组成与分解	(65)
39. 剪纸拼图	(67)
40. 隔壁算术	(69)
41. 登峰	(69)
42. 数学之家	(71)
43. 小狼、小羊过河	(71)
44. 分油与挑瓜问题	(72)

45. 区分煤油、柴油与数学趣味证明	(72)
46. 用瓶子分酒	(73)
47. 想不到的结果	(73)
48. 动脑练习五则	(74)
49. 曾祖和曾孙	(74)
50. 分鸡蛋	(75)
51. 一年内分针、时针重合多少次	(75)
52. 国外趣题四则	(76)
53. 一张烧焦了的遗嘱	(78)
54. 诗中的数字	(79)
55. 求鸡兔和猜年龄	(80)
四、数学小史	(83)
56. π 的小史	(84)
57. “+、-、 $\times$ 、 $\div$ ”的来历	(85)
58. 对数传入中国	(86)
59. 倍立方问题的产生	(87)
60. 一次同余式问题	(87)
61. 《梦溪笔谈》中的“棋局都数”	(89)
62. 杨辉的数学教育主张	(91)
63. 隋唐时期的数学教育	(93)
64. 国际数学奥林匹克竞赛简介	(95)
65. 数学竞赛小史	(96)
66. “几何”的来历	(97)
67. 四百多年前的数学竞赛	(98)
68. 数学菲尔兹奖	(99)
69. 初等数学史中的几件大事记	(100)

70. 以中国人姓氏命名的现代数学科研成果·····	(101)
71. 心血的结晶·····	(101)
五、数学名人轶事·····	(103)
72. 数学家苏步青·····	(104)
73. 从苏步青教授巧解数学题的启示·····	(104)
74. 北京大学江泽涵教授·····	(106)
75. 著名的数学家和教育家吴大任教授·····	(107)
76. 著名数学家赵访熊教授·····	(108)
77. 武汉大学教授李国平·····	(108)
78. 著名数学家王元教授·····	(109)
79. 我国年轻的数学家杨乐和 <u>张广厚</u> ·····	(111)
80. 陈景润回忆他的中学时代·····	(112)
81. 杨乐、 <u>张广厚</u> 谈怎样学好数学·····	(114)
82. 康熙帝和《数理精蕴》·····	(117)
83. 程大位及其所著《算法统宗》·····	(120)
84. 徐光启和《几何原本》·····	(121)
85. 我国最早的女数学家班昭·····	(123)
86. 南北朝时代的伟大数学家祖冲之父子·····	(124)
87. 朱世杰·····	(126)
88. 李冶及其数学著作·····	(129)
89. 失明的数学家欧拉·····	(131)
90. 毕达哥拉斯悖论与第一次数学危机·····	(135)
91. 青年数学家伽罗瓦·····	(137)
附录：数学趣题答案·····	(141)
摆火柴棍答案·····	(142)

一笔画的答案·····	(142)
隔壁算术·答案·····	(142)
数学之家答案·····	(143)
小狼、小羊过河答案·····	(143)
分油与挑瓜答案·····	(144)
区分煤油、柴油与数学趣味证明答案·····	(144)
用瓶子分酒的答案·····	(145)
想不到的结果答案·····	(146)
动脑练习五则答案·····	(146)
曾祖和曾孙答案·····	(148)
分鸡蛋答案·····	(148)
一年内分时针重合多少次答案·····	(148)
国外趣题四则答案·····	(150)
一张烧焦了的遗嘱答案·····	(150)

一、数的趣闻



“0”的真本领



说起数“0”来，它有很多与众不同的特点，其他几个数码很不服气。

首先最不满意的是9。它不高兴地说：“任何数后面添上0，便增加到原来的10倍，这又算什么本事呢？添上9不是变10倍多吗？并且零只能往后添，我们可都是前后可添！要是前面添个9，不是变得更大吗？”

7接着说：“一个数的0次幂是1，也值得夸吗？每个数自己除自己都得1！偏偏0不能自己除自己！0最没本领！”

1更不甘示弱：“任何数加0不变，也不过是0沾了加法的光罢了。如果请乘法出面，任何数乘1不也是不变吗？”

5说：“0是负数和正数的界限，这当然不错，但哪个数不能当界限呢？我5，不是四舍五入的界限吗？”

6说：“对呀！界限是人规定的。考试60分及格，60分就成了一个界限。坐火车身高一米以上的儿童要买票，一米也成了界限！”

大家叽叽喳喳，议论不休。特别对于恩格斯说的，一个方程，只有右端为零时，它的意义才能完全表现出来，它们觉得难以接受。为什么恩格斯这样偏爱0呢？找恩格斯找不到，大家便去数学医院找张大夫。张大夫说：

“每个数都有自己的特色和作用，例如9，就有很多妙用，用它可以作许多数学游戏。不是吗？”

7 也有许多有趣的性质，比如，1 除以 7 得 0.142857，142857 乘以 2，得 285714，142857 乘以 3，得 428571，142857 乘以 4，得 571428……。总是这六个数码轮换。

2 是唯一的偶素数。2 维空间的几何学里，有许多特别有趣的定理。2 在哲学上也很重要，一分为“2”嘛！

3 也了不起。三角形多么重要，它有“3”个角，还有“3”条边？讨论数学问题，常常分成大于、等于、小于三种情况研究。这叫做“三歧性”！平面上三点确定一个圆，空间三点确定一个平面，所以日常生活中有好多东西是“3”条腿。

张大夫把几个数的特点都摆了一下，最后，见大家慢慢心平气和了，才说：

“0 确实有它的真本领。

“以 0 为界限把实数分成正数、负数和 0，这样才有可能同号相乘得正，异号相乘得负，如果用 5 作界限，规律就不好找了。

“方程右端要搞成 0，是有道理的，你看：

$$(x-2)(x-3)=0,$$

写上就知道 $x-2=0$ 或 $x-3=0$ 。两个根都求出来了。若是

$$(x-2)(x-3)=1,$$

这个方程就还要经过一番周折才解得出来！”

从此，数码们不在为 0 的特殊地位而愤愤不平了。它们知道了，尽管大家各有特点，0 也确有自己的真本领。



1987年前夕，河北东方中学的同学们特拟“1987”数题，举行庆新年迎新春数学晚会，同学们同庆，共欢，有意思极了。他们的题目是：

(1) 试证 $5^{1987} + 6^{1987} < 7^{1987}$ 。

略证：∵ $\left(\frac{5}{7}\right)^{1987} + \left(\frac{6}{7}\right)^{1987} < \left(\frac{5}{7}\right)^3 + \left(\frac{6}{7}\right)^3$ ，

$$\begin{aligned} \text{而 } \left(\frac{5}{7}\right)^3 + \left(\frac{6}{7}\right)^3 &= \frac{5^3 + 6^3}{7^3} = \frac{125 + 216}{343} \\ &= \frac{341}{343} < 1, \end{aligned}$$

$$\therefore \left(\frac{5}{7}\right)^{1987} + \left(\frac{6}{7}\right)^{1987} < 1.$$

故 $5^{1987} + 6^{1987} < 7^{1987}$ 。

(2) 试证：

$$\underbrace{99 \cdots 9}_{1987 \uparrow} \times \underbrace{99 \cdots 9}_{1987 \uparrow} + \underbrace{199 \cdots 9}_{1987 \uparrow} = 100^{1987}.$$

略证：

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \underbrace{99 \cdots 9}_{1987 \uparrow} \times \underbrace{99 \cdots 9}_{1987 \uparrow} + \underbrace{10^{1987} + 99 \cdots 9}_{1987 \uparrow} \\ &= \underbrace{99 \cdots 9}_{1987 \uparrow} \times (\underbrace{99 \cdots 9}_{1987 \uparrow} + 1) + 10^{1987} \\ &= \underbrace{99 \cdots 9}_{1987 \uparrow} \times 10^{1987} + 10^{1987} \end{aligned}$$

$$= 10^{1987} (99 \cdots 9 + 1)$$

1987个

$$= 10^{1987} \times 10^{1987} = 100^{1987}.$$

(3) 试证: $\underbrace{11 \cdots 1}_{1987\text{个}} \underbrace{122 \cdots 2}_{1987\text{个}}$ 能被 $\underbrace{33 \cdots 3}_{1987\text{个}}$ 整除.

略证: $\underbrace{11 \cdots 1}_{1987} \underbrace{122 \cdots 2}_{1987} = \underbrace{11 \cdots 1}_{1987} \times (10^{1987} + 2),$

而 $10^{1987} + 2$ 的各位数字之和为 3, 所以 $10^{1987} + 2$ 能被 3 整除, 所以 $\underbrace{11 \cdots 1}_{1987\text{个}} \underbrace{122 \cdots 2}_{1987\text{个}}$ 能被 $\underbrace{11 \cdots 1}_{1987\text{个}}$ 和 3 整除, 即能被

$$\underbrace{11 \cdots 1}_{1987\text{个}} \times 3 = \underbrace{33 \cdots 3}_{1987\text{个}} \text{ 整除.}$$

(4) 比较下列两数的大小:

① $1987^{1987} \cdot 1986^{1986}$ 和 $1987^{1986} \cdot 1986^{1987},$

② $\log_{1986} 1987$ 和 $\log_{1987} 1988.$

$$\begin{aligned} \text{解 } ① \quad & 1987^{1987} \cdot 1986^{1986} = 1987^{1986} \cdot 1987 \cdot 1986^{1986} \\ & > 1987^{1986} \cdot 1986 \cdot 1986^{1986} = 1987^{1986} \cdot 1986^{1987}. \end{aligned}$$

② $\log_{1986} 1987 > 0, \log_{1987} 1988 > 0,$

$$\text{又 } \log_{1987} 1986 = \frac{1}{\log_{1986} 1987},$$

从而 $\log_{1987} 1986 > 0.$

$$\begin{aligned} \text{由 } \sqrt{\log_{1987} 1986 \cdot \log_{1987} 1988} &\leq \frac{1}{2} (\log_{1987} 1986 \\ &\quad + \log_{1987} 1988) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \log_{1987} (1986 \times 1988) < \frac{1}{2} \log_{1987} 1987^2 = 1.$$

得 $\log_{1987} 1986 \cdot \log_{1987} 1988 < 1,$

即 $\log_{1986} 1987 > \log_{1987} 1988.$

(5) 设 $a^2 + a + 1 = 0$, 求证:

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^{1987} = a^{1987} + \frac{1}{a^{1987}}.$$

证明: 由 $a^2 + a + 1 = 0$ 知 $a \neq 1$, $a \neq 0$, 于是

$$(a-1)(a^2+a+1)=0$$

$$\text{即} \quad a^3 - 1 = 0.$$

$$\therefore \quad a^3 = 1.$$

$$\begin{aligned}\text{因此} \quad a^{1987} + \frac{1}{a^{1987}} &= \frac{(a^3)^{663}}{a^2} + \frac{a^2}{(a^3)^{663}} \\ &= \frac{1}{a^2} + a^2 \\ &= \left(\frac{1}{a} + a\right)^2 - 2.\end{aligned}$$

又由 $a^2 + a + 1 = 0$ 知 $a \neq 0$,

$$\text{于是有} \quad \frac{1}{a} + a = -1.$$

$$\therefore \quad a^{1987} + \frac{1}{a^{1987}} = (-1)^2 - 2 = -1.$$

$$\text{而} \quad \left(a + \frac{1}{a}\right)^{1987} = (-1)^{1987} = -1,$$

$$\therefore \quad \left(a + \frac{1}{a}\right)^{1987} = a^{1987} + \frac{1}{a^{1987}}.$$

(6) 设以 r 为半径的圆内接正 1987 边形 $A_1 A_2 \cdots A_{1987}$, 与圆心距离为 a 的一点 P . 试证:

$$PA_1^2 + PA_2^2 + \cdots + PA_{1987}^2 = 1987(r^2 + a^2).$$

略证：设 $\angle POA_1 = \theta$ ，则

$$\angle POA_2 = \theta + \frac{2\pi}{1987},$$

$$\angle POA_3 = \theta + 2 \cdot \frac{2\pi}{1987},$$

.....,

$$\angle POA_{1987} = \theta$$

$$+ 1986 \cdot \frac{2\pi}{1987}.$$

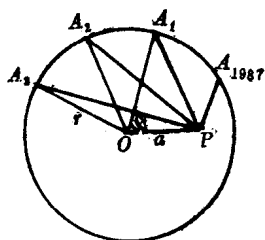


图 1-1

由余弦定理，得：

$$PA_1^2 = r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta,$$

$$PA_2^2 = r^2 + a^2 - 2ra \cdot \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{1987}\right),$$

$$PA_3^2 = r^2 + a^2 - 2ra \cdot \cos\left(\theta + 2 \cdot \frac{2\pi}{1987}\right),$$

.....

$$PA_{1987}^2 = r^2 + a^2 - 2ra \cdot \cos\left(\theta + 1986 \cdot \frac{2\pi}{1987}\right).$$

相加，得

$$PA_1^2 + PA_2^2 + \dots + PA_{1987}^2 = 1987(r^2 + a^2) - 2ra \cdot S$$

其中

$$S = \cos \theta + \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{1987}\right) + \cos\left(\theta + 2 \cdot \frac{2\pi}{1987}\right)$$

$$+ \dots + \cos\left(\theta + 1986 \cdot \frac{2\pi}{1987}\right).$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos\left[\theta + \frac{1986}{2} \cdot \frac{2\pi}{1987}\right] \cdot \sin\left(\frac{1986+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{1987}\right)}{\sin \frac{2\pi}{1987}} \\
&= \frac{\cos\left[\theta + \frac{1986}{2} \cdot \frac{2\pi}{1987}\right] \cdot \sin \pi}{\sin \frac{\pi}{1987}} = 0^*
\end{aligned}$$

所以, $PA_1^2 + PA_2^2 + \dots + PA_{1987}^2 = 1987(r^2 + a^2)$.

3

1986 与 1987

【问题】 有没有这样的自然数, 它的最后四位数是1986, 并且是1987的倍数?

解: 假定存在这样的数, 设它为 x , 并设它是1987的 y 倍. y 的末位数字与1987的末位数字7相乘所得结果的最后一位数字, 等于 x 的末位数字6. 所以 y 的末位数字只能是8.

$$1987 \times 8 = 15896.$$

x 的最后四位数字是1986, 把它的前面各位数字暂用“...”代替, 可写成

$$\begin{aligned}
& \bullet \quad \cos \theta + \cos(\theta + a) + \cos(\theta + 2a) + \dots + \cos(\theta + na) \\
&= \frac{\cos\left(\theta + \frac{n}{2}a\right) \cdot \sin\left(\frac{n+1}{2}a\right)}{\sin \frac{a}{2}}.
\end{aligned}$$

• 8 •