普通高等教育“十五”规划教材
PUTONG
GAODENG JIAOYU
SHIWU
GUIHUA JIAOCAI

现代控制理论基础

宋丽蓉 主编 刘美俊 副主编

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

普通高等教育"十五"规划教材

PUTONG
GAODENG JIAOYU
SHIWU
GUIHUA JIAOCAI

现代控制理论基础

主　编　宋丽蓉
副主编　刘美俊
编　写　刘　坤　周　磊
　　　　齐玉娟
主　审　孙扬声

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为普通高等教育"十五"规划教材。

本书是针对应用型本科及各类成人高等教育而编写的。为了简单明了的表述现代控制理论的基本概念，本书仅以线性定常系统作为讨论对象，对现代控制理论的核心基础——状态空间的基本概念和分析方法作了简要的介绍。全书共分为五章，包括线性控制系统的状态空间描述、线性控制系统的状态空间分析、线性控制系统的能控性和能观测性、线性控制系统的稳定性分析以及状态反馈和状态观测器。

本书可作为自动化类各专业的教学用书，亦可作为其他相近专业的读者和工程技术人员的学习与参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

现代控制理论基础/宋丽蓉主编. —北京：中国电力出版社，2006

普通高等教育"十五"规划教材

ISBN 7-5083-4067-1

Ⅰ.现… Ⅱ.宋… Ⅲ.现代控制理论—高等学校—教材 Ⅳ.0231

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 003889 号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路 6 号 100044 http://jc.cepp.com.cn）

汇鑫印务有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2006 年 2 月第一版 2006 年 2 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 11.25 印张 256 千字

印数 0001—3000 册 定价 **17.00** 元

序

由中国电力教育协会组织的普通高等教育“十五”规划教材，经过各方的努力与协作，现在陆续出版发行了。这些教材既是有关高等院校教学改革成果的体现，也是各位专家教授丰富的教学经验的结晶。这些教材的出版，必将对培养和造就我国21世纪高级专门人才发挥十分重要的作用。

自1978年以来，原水利电力部、原能源部、原电力工业部相继规划了一至四轮统编教材，共计出版了各类教材1000余种。这些教材在改革开放以来的社会主义经济建设中，为深化教育教学改革，全面推进素质教育，为培养一批批优秀的专业人才，提供了重要保证。原全国高等学校电力、热动、水电类专业教学指导委员会在此间的教材建设工作中，发挥了极其重要的历史性作用。

特别需要指出的是，“九五”期间出版的很多高等学校教材，经过多年的教学实践检验，现在已经成为广泛使用的精品教材。这批教材的出版，对于高等教育教材建设起到了很好的指导和推动作用。同时，我们也应该看到，现用教材中有不少内容陈旧，未能反映当前科技发展的最新成果，不能满足按新的专业目录修订的教学计划和课程设置的需要，而且一些课程的教材可供选择的品种太少。此外，随着电力体制的改革和电力工业的快速发展，对于高级专门人才的需求格局和素质要求也发生了很大变化，新的学科门类也在不断发展。所有这些，都要求我们的高等教育教材建设必须与时俱进，开拓创新，要求我们尽快出版一批内容新、体系新、方法新、手段新，在内容质量上、出版质量上有突破的高水平教材。

根据教育部《关于“十五”期间普通高等教育教材建设与改革的意见》的精神，“十五”期间普通高等教育教材建设的工作任务就是通过多层次的教材建设，逐步建立起多学科、多类型、多层次、多品种系列配套的教材体系。为此，中国电力教育协会在充分发挥各有关高校学科优势的基础上，组织制订了反映电力行业特点的“十五”教材规划。“十五”规划教材包括修订教材和新编教材。对于原能源部、电力工业部组织原全国高等学校电力、热动、水电类专业教学指导委员会编写出版的第一至四轮全国统编教材、“九五”国家重点教材和其他已出版的各类教材，根据教学需要进行修订。对于新编教材，要求体现电力及相关行业发展对人才素质的要求，反映相关专业科技发展的最新成就和教学内容、课程体系的改革成果，在教材内容和编写体系的选择上不仅要有本学科（专业）的特色，而且注意体现素质教育和创新能力与实践能力的培养，为学生知识、能力、素质协调发展创造条件。考虑到各校办学特色和培养目标不同，同一门课程可以有多本教材供选择使用。上述教材经中国电力教育协会电气工程学科教学委员会、能源动力工程学科教学委员会、电力经济管理学科教学委员会

的有关专家评审，推荐作为高等学校教材。

在“十五”教材规划的组织实施过程中，得到了教育部、国家经贸委、国家电力公司、中国电力企业联合会、有关高等院校和广大教师的大力支持，在此一并表示衷心的感谢。

教材建设是一项长期而艰巨的任务，不可能一蹴而就，需要不断完善。因此，在教材的使用过程中，请大家随时提出宝贵的意见和建议，以便今后修订或增补。（联系方式：100761 北京市宣武区白广路二条1号综合楼9层 中国电力教育协会教材建设办公室 010-63416237）

中国电力教育协会

前　言

随着计算机技术的发展以及航天科技等高新技术的需求，现代控制理论应运而生并得到了长足的发展。几十年来，现代控制理论的内涵不断丰富，相应的课程内容也逐渐规范。

本书是针对应用型本科及各类成人高等教育而编写的，对现代控制理论的核心基础——状态空间的基本概念和分析方法作了简要的介绍。为了简单明了的表述现代控制理论的基本概念，本书仅以线性定常系统作为讨论对象。全书共分为五章，包括线性控制系统的状态空间描述、线性控制系统的状态空间分析、线性控制系统的能控性和能观测性、线性控制系统的稳定性分析以及状态反馈和状态观测器。

本书力求突出物理概念，避免不必要的繁琐数学推导，使读者了解运用现代控制理论分析系统的基本方法，为进一步学习现代控制理论各分支的内容打下基础。

读者在阅读本书之前，需掌握线性代数和经典自动控制理论的基本概念。

本书由南京工程学院宋丽蓉老师任主编，并编写了第一章、第二章以及全书的统稿；湖南工程学院刘美俊老师任副主编，并编写了第四章并对部分章节进行了修改。南京工程学院的刘坤老师编写了第三章；周磊老师编写了第五章及部分章节的习题和 MATLAB 的内容；中国石油大学的齐玉娟老师编写了部分章节的习题及 MATLAB 的内容。

本书由华中科技大学孙扬声教授主审，孙扬声教授提出的许多宝贵的修改意见已被采纳，在此对孙扬声教授表示诚挚的谢意。

由于编者水平有限，书中难免有不妥和错误之处，恳请广大读者和专家批评指正。

编　者

2005 年 12 月

目　录

序
前言

第一章　线性控制系统的状态空间描述 ······ 1

第一节　控制系统的状态空间表达式 ······ 1
第二节　系统微分方程转化为状态空间表达式 ······ 7
第三节　传递函数与状态空间表达式的相互转换 ······ 13
第四节　状态方程的线性变换 ······ 22
第五节　离散系统的状态空间表达式 ······ 35
第六节　MATLAB 用于状态空间描述 ······ 41
习题 ······ 45

第二章　线性控制系统的状态空间分析 ······ 49

第一节　线性连续系统的状态空间分析 ······ 49
第二节　状态转移矩阵的几种算法 ······ 55
第三节　线性离散系统的状态空间分析 ······ 61
第四节　MATLAB 用于状态空间分析 ······ 66
习题 ······ 69

第三章　线性控制系统的能控性和能观测性 ······ 72

第一节　线性连续系统的能控性 ······ 72
第二节　线性连续系统的能观测性 ······ 78
第三节　线性定常离散系统的能控性和能观测性 ······ 82
第四节　对偶原理 ······ 85
第五节　系统的结构分解 ······ 86
第六节　能控标准形和能观测标准形 ······ 94
第七节　MATLAB 用于能控性能观测性分析 ······ 98
习题 ······ 103

第四章　控制系统的稳定性 ······ 106

第一节　李雅普诺夫稳定性定义 ······ 106
第二节　李雅普诺夫稳定性定理 ······ 109

第三节　线性系统李亚普诺夫稳定性分析 ………………………………………… 118
第四节　非线性系统李雅普诺夫稳定性分析 ……………………………………… 122
第五节　基于 Matlab 李雅普诺夫稳定性分析 …………………………………… 130
习题 ………………………………………………………………………………… 131

第五章　状态反馈和状态观测器 ………………………………………………… 133

第一节　线性控制系统的状态反馈和输出反馈 …………………………………… 133
第二节　闭环系统的极点配置 …………………………………………………… 136
第三节　线性控制系统的解耦 …………………………………………………… 139
第四节　状态观测器 ……………………………………………………………… 144
第五节　状态反馈和状态观测器的应用 ………………………………………… 149
第六节　MATLAB 用于极点配置和状态观测器 ………………………………… 153
习题 ………………………………………………………………………………… 155

附录 1　矩阵的基本运算 ………………………………………………………… 158

附录 2　MATLAB应用简介 ……………………………………………………… 163

参考文献 ………………………………………………………………………… 170

第一章　线性控制系统的状态空间描述

控制系统的数学模型有两种基本类型：一种是描述系统输入输出特性的，这种描述将系统看作一个“黑箱”，只反映系统外部变量间的因果关系，而不表征系统的内部结构和内部变量，具有完全不同内部结构的两个系统也可能具有相同的外部特性，这种描述只是对系统的一种不完全描述。经典控制理论中的微分方程及对应的传递函数就属于这种类型。另一种描述则是对系统的完全描述，即状态空间描述。现代控制理论中的状态空间表达式就是这样一种描述，它反映了系统输入、输出变量与内部状态变量之间的关系，包含了系统动态性能的全部信息，揭示了系统内在的运动规律。

第一节　控制系统的状态空间表达式

状态空间表达式是基于状态空间的数学模型，也是现代控制理论中分析和综合控制系统的前提，通常由两个数学方程组成。一个是反映系统内部变量与输入变量间关系的一阶矢量微分方程；另一个是表征系统内部变量与输出变量之间关系的矢量代数方程。由于采用了矩阵表示法，使得系统的数学表达式简洁明了，易于计算机求解，也为多输入多输出系统的分析研究提供了有力的工具。

若描述系统的数学模型是线性的，且其系数不是时间变量的函数，则称此类系统为线性定常系统。虽然利用状态空间描述也可以解决非线性和时变系统的分析问题，但本书仅以线性定常系统作为讨论对象。

一、系统状态空间描述的基本概念

1. 状态和状态变量

状态：系统在时域中的行为或运动信息的集合。

状态变量：确定系统状态的一组独立变量。对于 n 阶系统，必须由 n 个独立变量组成状态变量组。状态变量的选取不具有惟一性。状态变量常用符号 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 表示。

当给定了状态变量在初始时刻 $t=t_0$ 时的值，又已知 $t\geqslant t_0$ 时系统输入的时间函数，则系统在 $t\geqslant t_0$ 的任何瞬时的行为就完全而且惟一地确定了。

2. 状态矢量和状态空间

状态矢量：把描述系统状态的 n 个状态变量 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ 看成矢量的分量，表示为

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{bmatrix}$$

称 $\boldsymbol{x}(t)$ 为 n 维状态矢量。

状态空间：以 n 个状态变量所组成的 n 维空间称为状态空间。

3. 状态空间表达式

线性系统的状态空间表达式是应用状态空间分析法对控制系统建立的一种数学模型。状态空间表达式由状态方程和输出方程组合而成。状态空间表达式的一般形式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{1-1a}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \tag{1-1b}$$

状态方程：描述系统状态变量与输入变量之间的一阶微分方程组。状态方程表征了系统由输入所引起的系统内部状态的变化。如式（1-1a）所示。

输出方程：描述系统输出变量与系统状态变量和输入变量之间函数关系的代数方程。如式（1-1b）所示。

状态空间表达式可用结构图表示为

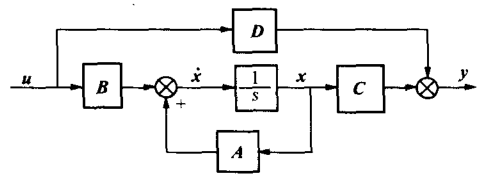

图 1-1 状态空间表达式结构图

4. 状态空间分析法

状态空间分析法是指在状态空间中以状态矢量或状态变量描述系统的方法。

二、线性定常连续系统状态空间表达式的建立

根据控制系统所遵循的基本定律，选择适当的状态变量，就可建立系统的状态空间表达式。其一般步骤如下：

（1）确定系统的输入变量、输出变量和状态变量。

（2）根据变量所遵循的物理、化学定律，列出系统的微分方程。

（3）将微分方程转化为关于状态变量的一阶导数与状态变量、输入变量的关系式以及输出变量与状态变量、输入变量的关系式。

（4）将关系式整理成状态方程和输出方程如式（1-1）所示的标准形式。

下面举例说明。

例 1-1 试建立如图 1-2 所示机械位移系统的状态空间表达式。图 1-2 中，k 为弹簧的弹性系数，f 为阻尼器的阻尼系数。

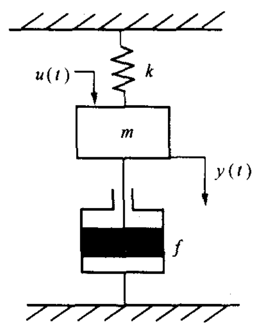

图 1-2 机械位移系统

解 机械位移系统的输入变量为外作用力 $u(t)$，输出为质量 m 的位移量 $y(t)$。根据牛顿定律可写出系统的微分方程，即

$$m\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}+f\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+ky(t)=u(t)$$

选择 $y(t)$ 和 $\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$ 作为状态变量，令

$$\begin{cases} x_1=y(t) \\ x_2=\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

将状态变量代入微分方程并整理得状态方程

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{k}{m}x_1 - \dfrac{f}{m}x_2 + \dfrac{1}{m}u(t)\end{cases}$$

输出方程

$$y = x_1$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{f}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ \dfrac{1}{m}\end{bmatrix}u$$

$$y = [1 \quad 0]\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}$$

或表示成

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{bu}$$
$$y = \boldsymbol{cx}$$

式中

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{f}{m}\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}0 \\ \dfrac{1}{m}\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{c} = [1 \quad 0]$$

例 1-2　试建立图 1-3 所示 RLC 电路的状态空间表达式。

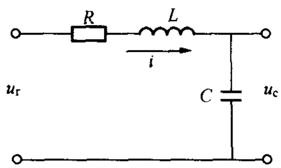

图 1-3　RLC 电路

解　输入变量为 u_r，输出变量为 u_c。根据电路的定律可写出微分方程为

$$u_r = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int i dt$$

1）设状态变量为

$$\begin{cases}x_1 = i \\ x_2 = \dfrac{1}{c}\int i dt\end{cases}$$

则状态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -\dfrac{R}{L}x_1 - \dfrac{1}{L}x_2 + \dfrac{1}{L}u_r \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{C}x_1\end{cases}$$

输出方程

$$u_c = x_2$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\dfrac{1}{L} \\ 0\end{bmatrix}u_r$$

$$u_c = [0 \quad 1]\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + bu_r$$

或表示成

$$u_c = cx$$

2）设状态变量为

$$\begin{cases} x_1 = i \\ x_2 = \int i\mathrm{d}t \end{cases}$$

则状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{LC}x_2 + \frac{1}{L}u_r \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

输出方程

$$u_c = \frac{1}{C}x_2$$

状态空间表达式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u_r$$

$$u_c = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

3）设状态变量

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t + Ri \\ x_2 = \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t \end{cases}$$

则

$$x_1 = x_2 + Ri \quad ; \quad L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -x_1 + u_r$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = \frac{1}{c}i = \frac{1}{RC}(x_1 - x_2) \\ \dot{x}_1 = \dot{x}_2 + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{RC}(x_1 - x_2) + \frac{R}{L}(-x_1 + u_r) \end{cases}$$

$$u_c = x_2$$

得状态空间表达式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} - \frac{R}{L} & -\frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u_r$$

$$u_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

通过例 1 - 2 可知，系统的状态空间表达式不具有惟一性。对同一个系统选取不同的状态变量有不同的状态空间表达式，而这些状态空间表达式之间存在线性变换的关系，我们

在后面将会讨论这一问题。

例 1-3　图 1-4 是电枢控制的直流电动机转速控制系统。试列写以电枢电压 u_a 为输入，电动机角位移 θ 为输出的状态空间表达式。

解　设电动机的反电势常数为 C_e，转矩常数为 C_m，电动机轴上的转动惯量为 J，摩擦系数为 f。电动机电枢回路的微分方程和电动机轴的运动方程为

$$u_a = R_a i_a + L_a \frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} + e_a$$

$$e_a = C_e \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$M = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + f\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$M = C_m i_a$$

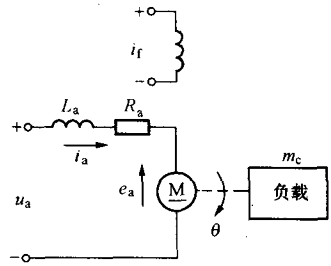

图 1-4　直流电动机转速控制系统

合并后得

$$u_a = R_a i_a + L_a \frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} + C_e \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$C_m i_a = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + f\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

设状态变量

$$\begin{cases} x_1 = i_a \\ x_2 = \theta \\ x_3 = \dot{\theta} \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{R_a}{L_a}x_1 - \dfrac{C_e}{L_a}x_3 + \dfrac{1}{L_a}u_a \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = \dfrac{C_m}{J}x_1 - \dfrac{f}{J}x_2 \end{cases}$$

$$\theta = x_2$$

状态空间表达式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_a}{L_a} & 0 & -\dfrac{C_e}{L_a} \\ 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{C_m}{J} & 0 & -\dfrac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_a$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

或

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u$$

$$y = cx$$

例 1-4 求图 1-5 所示 RLC 网络的状态空间表达式。

解 输入输出关系如图 1-5 中所示。根据基尔霍夫定律列写回路、节点电压、电流方程为

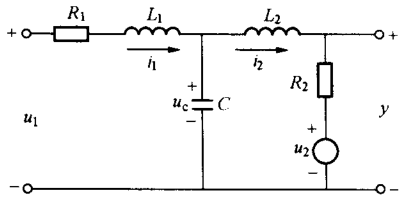

图 1-5 RLC 网络

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + u_c$$

$$u_c = R_2 i_2 + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + u_2$$

$$i_1 = i_2 + C \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$$

$$y = R_2 i_2 + u_2$$

设状态变量

$$\begin{cases} x_1 = i_1 \\ x_2 = i_2 \\ x_3 = u_c \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{R_1}{L_1}x_1 - \dfrac{1}{L_1}x_3 + \dfrac{1}{L_1}u_1(t) \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{R_2}{L_2}x_2 + \dfrac{1}{L_2}x_3 - \dfrac{1}{L_2}u_2(t) \\ \dot{x}_3 = \dfrac{1}{C}x_1 - \dfrac{1}{C}x_2 \end{cases}$$

$$y = R_2 i_2 + u_2$$

状态空间表达式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R_1}{L_1} & 0 & -\dfrac{1}{L_1} \\ 0 & -\dfrac{R_2}{L_2} & \dfrac{1}{L_2} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{L_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = [0 \quad R_2 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0 \quad 1] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

或

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{bu}$$

$$y = \boldsymbol{cx} + \boldsymbol{du}$$

例 1-4 是两输入单输出系统，前面三个例子是单输入单输出系统。在状态空间表达式中，变量用小写的字母表示，矩阵用大写的字母表示。设系统有 n 个状态变量，r 个输入变

量，m 个输出变量，线性定常系统状态空间表达式的一般形式为

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{Cx} + \boldsymbol{Du}\end{aligned} \tag{1 - 2}$$

式中

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $n \times 1$ 维状态向量；$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix}$ $r \times 1$ 维输入向量；$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ $m \times 1$ 维输出向量；

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ $n \times n$ 维系统矩阵；$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}$ $n \times r$ 维输入矩阵；

$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$ $m \times n$ 维输出矩阵；$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix}$ $m \times r$ 维直联矩阵。

系统矩阵 A 表示了系统内部各状态变量之间的关系，它取决于被控系统的作用原理、结构和各项参数。输入矩阵 B 表示了各输入变量对状态变量的控制作用。输出矩阵 C 表示了状态变量与输出变量之间的作用关系。直联矩阵 D 反映了输入对输出的直接作用。一般情况下，输入与输出的直接作用是不存在的。

第二节　系统微分方程转化为状态空间表达式

在经典控制理论中，系统的数学模型常采用微分方程和传递函数来表示，将微分方程和传递函数转化为状态空间表达式是现代控制理论中的基本问题。将微分方程和传递函数转化为状态空间表达式的原则是保持其输入输出关系不变，而且这种转化不是惟一的。

一、微分方程中不包含输入导数项

输入项中不包含导数的微分方程的一般形式为

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n+1}\dot{y} + a_n y = bu \tag{1 - 3}$$

式中，a_1，a_2，…，a_n，b 是由系统特性确定的常系数。这是个 n 阶微分方程，可选择 n 个状态变量。

设 $\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ \quad\vdots \\ x_{n-1} = y^{(n-2)} \\ x_n = y^{(n-1)} \end{cases}$ 　则 $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n + bu \end{cases}$

输出方程 $$y = x_1$$

状态空间表达式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ b\end{bmatrix}u \tag{1-4}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} \tag{1-5}$$

或

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u\\ y &= \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}\end{aligned} \tag{1-6}$$

系统的结构如图 1-6 所示。结构图描述了状态变量间的相互关系，所以也称为系统的状态变量图。这种结构图由积分器、放大器和加法器等环节构成，每个积分器的输出为状态变量。

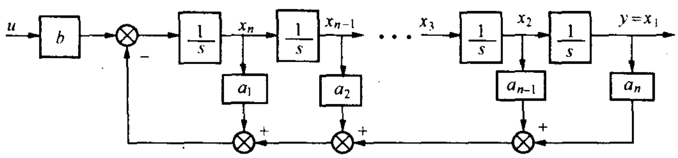

图 1-6 系统的结构图

例 1-5 将微分方程 $\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 3u$ 变换成状态空间表达式。

解 设状态变量为

$$\begin{cases}x_1 = y\\ x_2 = \dot{y}\\ x_3 = \ddot{y}\end{cases}$$

由微分方程得

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2\\ \dot{x}_2 = x_3\\ \dot{x}_3 = -6x_1 - 11x_2 - 6x_3 + 3u\\ y = x_1\end{cases}$$

状态空间表达式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 3\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

二、微分方程中包含输入导数项

输入项中包含导数的微分方程的一般形式为

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny=b_0u^{(n)}+b_1u^{(n-1)}+\cdots+b_{n-1}\dot{u}+b_nu \tag{1-7}$$

因为状态方程的形式是固定的，只能是关于状态变量一阶导数的微分方程，不能包含输入变量的导数项，因此输入变量的导数项只能包含在状态变量的设定中，通常选用输出 y 和输入 u 以及它们的各阶导数组成状态变量，常用以下两种方法。

1. 方法一

设状态变量为

$$\begin{cases}x_1=y-\beta_0u\\x_2=\dot{y}-\beta_0\dot{u}-\beta_1u\\x_3=\ddot{y}-\beta_0\ddot{u}-\beta_1\dot{u}-\beta_2u\\\vdots\\x_n=y^{(n-1)}-\beta_0u^{(n-1)}-\beta_1u^{(n-2)}-\cdots-\beta_{n-1}u\end{cases} \tag{1-8}$$

式中，$\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1}$ 为待定系数。对式（1 - 8）求导得

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\dot{y}-\beta_0\dot{u}=x_2+\beta_1u\\\dot{x}_2=\ddot{y}-\beta_0\ddot{u}-\beta_1\dot{u}=x_3+\beta_2u\\\dot{x}_3=\dddot{y}-\beta_0\dddot{u}-\beta_1\ddot{u}-\beta_2\dot{u}-\beta_3u=x_4+\beta_3u\\\vdots\\\dot{x}_n=y^{(n)}-\beta_0u^{(n)}-\beta_1u^{(n-1)}-\cdots-\beta_{n-1}\dot{u}\end{cases} \tag{1-9}$$

式（1 - 9）中，最后一个方程中还包含有输入的导数项，必须去掉。根据式（1 - 8）得

$$\begin{cases}y=x_1+\beta_0u\\\dot{y}=x_2+\beta_0\dot{u}+\beta_1u\\\ddot{y}=x_3+\beta_0\ddot{u}+\beta_1\dot{u}+\beta_2u\\\dddot{y}=x_4+\beta_0\dddot{u}+\beta_1\ddot{u}+\beta_2\dot{u}+\beta_3u\\\vdots\\y^{(n-1)}=x_n+\beta_0u^{(n-1)}+\beta_1u^{(n-2)}+\cdots+\beta_{n-2}\dot{u}+\beta_{n-1}u\end{cases} \tag{1-10}$$

将式（1 - 10）代入微分方程式（1 - 7）中

$$\begin{aligned}y^{(n)}&=-a_1y^{(n-1)}-a_2y^{(n-2)}-\cdots-a_{n-1}\dot{y}-a_ny\\&\quad+b_0u^{(n)}+b_1u^{(n-1)}+\cdots+b_nu\\&=-a_1x_n-a_2x_{n-1}-\cdots a_{n-1}x_2-a_nx_1\\&\quad-a_1[\beta_0u^{(n-1)}+\beta_1u^{(n-2)}+\cdots+\beta_{n-2}\dot{u}+\beta_{n-1}u]\\&\quad-a_2[\beta_0u^{(n-2)}+\beta_1u^{(n-3)}+\cdots+\beta_{n-3}\dot{u}+\beta_{n-2}u]\end{aligned}$$