



普通高等教育“十五”国家级规划教材

数学实验

第二版

李尚志 陈发来 张韵华 吴耀华 著



高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

数 学 实 验

第二版

李尚志 陈发来 张韵华 吴耀华 著

高等教育出版社

内容简介

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材,是在第一版的基础上修订而成的。本书第一版被列为“面向二十一世纪课程教材”和“国家教委九五重点教材”,经过两年的使用,产生了广泛的影响和良好辐射示范作用,在此基础上,作者将教学改革成果加入教材中,相对于第一版,第二版的内容和体系更加丰富、更加完善。

本书大胆创新,见解独到,以一些经典的、有趣的、具有启发性的问题为出发点,引导学生发现现象,总结规律,培养学生的创造力。全书主要介绍了16个数学实验,它们分别是微积分基础、怎样计算 π 、最佳分数近似值、数列与级数、素数、概率、几何变换、物理现象的数学模拟、迭代(一)——方程求解、寻优、最速降线、迭代(二)——分形、迭代(三)——混沌、密码、初等几何定理的机器证明、迭代(四)——几何形状的构造。最后还附有 Mathematica 简介。

本书适合于高等学校各专业本科生,以及具有初步的高等数学知识和计算机知识的其他读者。

图书在版编目(CIP)数据

数学实验/李尚志等著 —2版.—北京:高等教育出版社,2004.8

ISBN 7-04-014406-9

I. 数… II. 李… III. 高等数学-实验-高等学校-教材 IV. O13-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 053876 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京印刷集团有限责任公司印刷二厂		
		版 次	1999 年 9 月第 1 版
开 本	787×960 1/16		2004 年 8 月第 2 版
印 张	16 5	印 次	2004 年 8 月第 1 次印刷
字 数	290 000	定 价	19.30 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

再 版 前 言

我们的《数学实验》教材(第一版),自1999年出版以来,已经五年了。

五年前,我们刚刚通过对两届学生的试点教学以及对国内外相关书籍(有关在数学中应用计算机及其软件的书籍)的调研,撰写出版自己的《数学实验》教材,由高教出版社作为面向21世纪课程教材出版。在该书的前言中,介绍了我们当时对于开设数学实验课程的一些初步设想和具体做法。当然,我们也知道,这些设想和做法是否恰当,还要在以后的教学实践中接受检验,不断改进和完善。

五年时间过去,弹指一挥间。

五年时间虽然不长,但经过这五年的教学实践,我们对于开设数学实验课程的指导思想越来越明确,具体做法经过不断改进也更加合理。

我们的主要指导思想是:

既然是实验课而不是理论课,最重要的就是要让学生自己动手,自己借助于计算机去“折腾”数学,在“折腾”的过程中去学习,去观察,去探索,去发现,而不是由老师教他们多少内容。既不是由老师教理论,主要的也不是由老师去教计算机技术或教算法。

不追求内容的系统性、完整性。而着眼于激发学生自己动手和探索的兴趣。

总之,本课程是激发学生求知欲的“开胃汤”而不是提供数学知识的“大餐”。学生的学习兴趣激发起来了,希望获得更多的数学知识,可以通过其他数学课程、数学书籍去学习和获得。

既然如此,在设计数学实验内容的时候,虽然我们也有意识让学生通过实验学会一些基本的方法,但是我们并不以这些方法为线索组织课程内容。我们设计了一些能够引起学生兴趣的问题,每个实验围绕解决一个或几个问题来展开,教学生使用若干种方法来解决所给的问题,在解决问题中学习和熟悉这些方法,自己观察结果,得出结论。

这一指导思想,与我们在五年前出版本书第一版时的设想基本上是一致的,但经过五年使用本书进行教学实践后更加明确。实践还证明,按照这一指导思想编写的教材和进行的教学受到学生的欢迎,取得了好的效果。

以下是中国科技大学选修了我们的《数学实验》的学生在网上自由发表的大量的感想体会中摘选出的几条:

该课程能激发我们的思维,启发我们去创新,能培养我们如何去发现问题、如何去分析问题、怎么去解决问题的能力,能调动我们学习和研究问题的积极性。

数学实验使我们从另一个角度看数学,数学奇妙无穷,数学实验使我们的一些新想法——无论对错——得以验证,充分利用计算机,为我们节约了大量宝贵的时间,让实验者充分发挥想像力,激发起对数学的兴趣,极大地调动我们的积极性,有时候还能感受那种成功的欣慰。我喜欢数学实验!

用崭新的办法激发我们学生的思考,从一些有趣的问题出发,引导学生利用现代科技探索经典数学中的各种问题。我感觉非常好!

由于篇幅所限,以上只是从大量学生的体会中选出几条。但这些感想和体会很有代表性,不但科大其余选课学生的体会与他们类似,我们应邀到全国六十多所院校和许多会议去讲学或报告,这些不同的学校的不同的师生也都表示了类似的感受,非常喜欢本教材让学生自己探索、自己动手解决问题的设计和做法,感到确实激发了他们对数学的兴趣,深化了他们对数学的认识。

我们到全国很多高校示范讲授数学实验课的时候,参加听课的很多教师和学生都说:“以前就很喜欢你们写的数学实验书。听了你们的讲课,感到比写的书更生动,更精彩。”他们的本意是赞扬我们的讲课,但仔细一想也是对我们教材的批评。当然,讲课中的精彩确实有很多是没有办法写在书上的,讲课比书更精彩也是很正常的事情。但是,当我们自己重新再去阅读自己写的教材时,确实感到有不少地方不够精彩,自己都不满意。特别是:有不少地方还是过多地向读者讲授数学知识,说教的味道太浓,启发兴趣的功夫还不够,这本身就是与我们的指导思想不一致的。还有,许多实验的精彩在于它们的结果。不少实验的结果是体现在图形上,要眼见为实,千言万语不如一幅图。而原书的图形太少,这就减少了图文并茂的乐趣。

五年来的教学实践给我们带来了成功的喜悦,也使我们发现了原来教材的一些不足之处。教材本来应当是长期教学经验和教训的结晶。我们的教材,虽然也包含了作者几十年学习、研究、讲授数学的经验,但作为一本将计算机与数学结合、以实验而不是以理论推导为主要形式的数学教材,刚刚经过两年的教学实践就写出来了,反映的是我们五年之前的认识和实践水平,有不足之处是理所当然的。又经过了五年的实践,以七年教学实践的水平回过头来看两年教学实践的水平下写成的教材,感到不满意也是理所当然的。如果完全满意,就说明这五年来我们自己没有什么长进。

因此,需要对原来的教材进行修订。这就有了现在的第二版。

五年以前出版本书第一版时,就感到内容上不很全面。比如缺乏离散数学

的内容,概率统计的内容也偏少。原来希望在经过修订出版第二版时补充一些内容。现在确实补充了内容,增加了利用计算机设计图形的一个实验,在原来各实验中也有一些小的补充。但总的说来,增加的内容不多。这当然是一个遗憾。但既然本书的风格是像《聊斋志异》那样的短篇小说集,而不像《三国演义》那样的长篇小说,永远无法追求到全面和完美,与其为了求全而增加一些自己都还不满意的内容,还不如等到这些内容比较成熟之后再增加。

因此,在进行修订时我们的重点就不在于增加内容,而在于将原有的实验安排得更精彩,更活泼,更能激发学习数学的兴趣,更能引导读者抓住数学的本质。五年来教学实践中一些好的东西,包括上课时用的多媒体电子“板书”上的一些精彩内容,经过适当编排进入了教材。

五年前当本书第一版出版时,本书主要的作者自己都还不会用计算机完成所设计的实验,教学主要还是黑板加粉笔。黑板加粉笔为主的教学方式,对于理论教学有它不可替代的优点。但既然是实验课,实验的主要手段是使用计算机,仅仅用黑板加粉笔来上课就明显地有缺陷。通过五年的教学实践,本课程现在已经全部采用多媒体教学,上课时图文声并茂,学生增加了身临其境的感觉,大大提高了教学积极性。现在本课程已经被教育部评为2003年国家级精品课程,教学资源全部上网;通过网址 <http://www.teach.ustc.edu.cn> 登陆到中国科技大学教务处的首页,进入精品课程,即可找到本课程已经上网的全部资料,包括我们上课所用的全部教案和运行程序。这些网上资料与纸质教材构成了本课程的立体化教材体系。作为一本书,纸质教材当然不可能将电子资料纳入其中。但也在原来第一版的基础上增加了不少的图形,使读者更能生动直接地感受到所设计的实验的数学魅力,增加本教材的生动性。

任何事情都有两面性。在书中增加图形,固然可以增加阅读时的生动性,但也有一个缺点:预先看到了图形,也就是知道了实验的结果,等到自己做实验得出同样的结果的时候,就缺少了意外的惊喜,享受不到发现和发明的乐趣。这好比读一本侦探小说,如果一开始就知道谁是罪犯,就没有悬念,就没有兴趣读下去了。如果教材中不告诉实验的结果,让读者自己通过做实验去得出结果,自己画出图形来观察,可以将发现和发明的乐趣留给这些读者。但这样一来,另外一些不准备做实验的读者在阅读本书时就失去兴趣了,而且也会给一些学校的教师使用本书教学增加困难。因此,我们面临一个两难的问题,无论怎样做都只对一部分读者有利而对另一部分读者不利。作为折衷,在本书第二版中我们仍然只将一部分图形画出来,并且给出一部分实验的程序,以便大多数读者在阅读本书时就能引起兴趣,有兴趣继续读下去,并且可以自己作出一些实验。而另外一些实验的结果仍然不告诉,将发现、发明和探索的乐趣留给读者。还有一部分实

验的程序让读者自己去编写。当然,所有的读者仍然可以从网上得到我们的资源。不过,我们在网上公布的程序也可能很笨,只能算是抛砖引玉,读者大有自己改进的用武之地。我们的这种折衷的做法是否大体上合适,有待实践检验。两全其美肯定是做不到的。是否能起到好的作用,还在于每位读者根据自己的情况灵活使用本书。

读了本书的修订版,你肯定会发现它还是有很多遗憾之处。如果能将你的批评意见反馈给我们,便于我们进一步改进,不胜感谢之至。反馈意见可寄到如下通讯地址:

中国科技大学数学系, 邮政编码 230026
任何一位作者收。

作者
2004 年 5 月

前 言

本书是高等院校数学实验课的教材,适用于全国理、工、农、医、文各类高等院校,凡是开设高等数学课的学校都可以使用。

在大学中开设数学实验课,是教育部组织的“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”课题组的重要研究成果。该课程的教学对象,是全国所有高校,不分理工农医等科类的本科生。课程目的,是使学生掌握数学实验的基本思想和方法,即不把数学看成先验的逻辑体系,而是把它视为一门“实验科学”,从问题出发,借助计算机,通过学生亲自设计和动手,体验解决问题的过程,从实验中去学习、探索和发现数学规律。

这是在我国高等学校中新开设的一门课程,还处于摸索和试点阶段。课程的指导思想、上课内容和方式都有待于在试点中逐步明确。该课程在数学专业和非数学专业都要开设,因此也是数学专业课题组和非数学专业课题组共同的任务。

中国科技大学数学系参加了数学专业和理科非数学专业面向 21 世纪教学内容和课程体系改革的两个课题组,并且受课题组委托进行了开设数学实验课的试点,产生了这本教材。参加这一试点工作的有我系的李尚志教授、陈发来教授、王树禾教授、侯定丕教授、吴耀华副教授、张韵华副教授等。为了真正检验我们的试点课的效果,看它是否能够引起学生的兴趣,是否能够达到预想的教学效果,是否适合于各不同专业的学生,我们采用了面向全校的选修课的形式,让全校所有专业的学生自愿自由选课。结果,在 1998 年和 1999 年的两次试点中,全校各专业选课的学生人数达到 240 人左右,几乎涵盖了所有的系科和专业,其中数学系学生约占 $1/3$,非数学系的学生占 $2/3$ 。学生们不但对于听课很有兴趣,而且主动积极地完成所布置的实验作业,在作业中表现出了很大的兴趣和创造性,还对开设这门课程的必要性和如何改进提出了很多很好的意见。

以下是我们对于开设数学实验课的想法和做法,也是这本书的主要指导思想。

一、指导思想

主要是让学生自己通过动手去体验,而不在于教完他们多少内容。不追求内容的系统性、完整性,而应当激发学生自己动手和探索的兴趣。

我们参照了物理实验课、化学实验课的内容和上课方法:这些实验课并不需

要花多少时间讲解理论和原理,讲解理论和原理是物理、化学的理论课程的任务。实验课主要是学生自己做实验,观察和分析实验结果。我们认为,数学实验也应当这样,不要在数学实验课上讲很多理论,也不应当花很多时间和精力来教算法。但是,物理、化学实验课往往是把实验的每个步骤都给学生规定得很详细,学生只要按部就班完成这些步骤,而实验的结果也是预先就知道了的,留给探索的余地不多。我们在设计数学实验课的时候就努力避免这种情况,尽量留些问题让学生自己去设计方法来解决,避免把实验课变成单纯传授计算技术的课程。

在设计数学实验内容的时候,虽然我们也有意识让学生通过实验学会一些基本的方法,但是我们并不以这些方法为线索组织课程内容。我们设计了一些能够引起学生兴趣的问题,每个实验围绕解决一个或几个问题来展开,教学生使用若干种方法来解决所给的问题,在解决问题中学习和熟悉这些方法,自己观察结果,得出结论。比如,围绕计算圆周率的近似值这一问题学习数值积分法、泰勒级数法、蒙特卡罗法、分数向无理数的最佳逼近;围绕光的折射定律和最速降线学习各种优化方法;围绕天体运动规律学习微分方程的数值解法;等等。

我们认为,尽管数学专业和非数学专业学生的数学课程的难易程度有很大的差别,但数学实验课对他们来说却不必有多大的差别,基本的部分完全可以是共同的,只有一些理论较深的部分可以根据各自的情况有所取舍。我们在试点中的体会是,学生完成实验作业的难易主要不在于对数学知识的掌握程度,而是运用计算机能力的差别。我们感到,开设数学实验课以二年级为宜,让学生学过高等数学中必要的基本概念即可,不必学过很多的数学定理。这样,就可以有比较多的未知的东西供他们去探索。已学的东西太多,学生对探索的兴趣反而下降。实际上,选修我们课程的也有很多一年级学生,其中也有许多人的作业做得很好。因此,在一年级下学期开设这门课程也是可以的。

我们设想,数学实验可以包括两部分主要内容:第一部分是基础部分,围绕高等数学的基本内容,让学生充分利用计算机及软件的数值功能和图形功能展示基本概念与结论,去体验如何发现、总结和应用数学规律。另一部分是高级部分,以高等数学为中心向边缘学科发散,可涉及到微分几何、数值方法、数理统计、图论与组合、微分方程、运筹与优化等,也可涉及到现代新兴的学科和方向,如分形、混沌等。这部分的内容可以是新的,但不必强调完整性,教师介绍一点主要的思想,提出问题和任务,让学生尝试通过自己动手和观察实验结果去发现和总结其中的规律。即使总结不出来也没有关系,留待将来再学,有兴趣的可以自己去找参考书寻找答案。比如我们设计了一个实验让学生画分形的图形。这些图形的画法很简单,但画出来的结果却让学生感到神奇,引起他们极大的兴

趣,很多学生自己到图书馆找了有关分形的参考书来看。

二、关于数学实验课与一些相关课程的差别和联系

与计算方法、统计方法、优化方法等课程的区别和联系:数学实验课尽管也要介绍和用到数值计算方法、统计方法、优化方法,但是不应取代这些课程。否则,学生会失去兴趣,认为反正还要上这些课程,何必上数学实验课呢?为划清这一界限,我们主张,数学实验课所用到的方法应当比较简单和浅显,可以由高等数学课程中的内容很快推出来,(其推导难度只应相当于高等数学作业题),而不需要花时间和精力作专门的讲解。而关于专门的、比较精细的专门方法的讲解,则留给这些课程去完成。当然,这些课程本身也应改革,不能纸上谈兵,也应有学生自己动手实践作为重要环节。

与数学建模课的区别和联系:数学建模与数学实验课都要用到计算机。但数学建模课是让学生学会利用数学知识和计算机手段来解决实际问题,而数学实验课侧重于在计算机的帮助下学习数学知识。一个是用,一个是学,两者的目标不同。从选材来说,我们主张两者都要从问题出发而不从概念出发。但数学建模强调问题的实用性而不强调普遍意义,解决问题本身就是目的;数学实验课可以从理论问题出发,也可由实际问题出发,但这个理论问题或实际问题最好是比较经典的、具有普遍意义,让学生以解决问题为线索总结规律,学到知识。当然,数学实验课可以作为数学建模课的预备课程,使学生可以更快地掌握数学建模的基本方法和机能。

与高等数学课的区别和联系:都是为了学知识,但学习方法很不相同。高等数学课主要是由教师传授知识,而数学实验课则希望通过学生自己动手和观察去体会这些知识是怎样得出来的。

与计算机课程的联系:对于非计算机专业的学生来说,计算机知识(包括计算机语言以及软件的使用等)只是一种工具。好比学语言,不能只停留于学一个个的单字和一条条的语法规则,而必须通过阅读课文来学。并且,学了就要用,就要读报纸,读小说等。教计算机语言也是这样,应当结合解决一定的问题来学,学了就要用来解决问题,才有兴趣学,才能学得会,才不会忘记。但现在大学里的计算机语言课有时和其他课程(特别是数学课程)脱节,导致很多学生学习计算机语言也只是为了得学分,考过了就忘了,到高年级真需要用的时候还得重新复习。开设数学实验课有助于改变这种状况。数学实验课逼迫学生学好计算机知识来解决数学问题,数学实验课又为计算机课程提供了大量真刀真枪的练习机会。二者的结合势必真正提高学生对于计算机知识的掌握水平和应用的能力,使计算机课程可以用更少的课时取得更好的效果。

数学实验课的开设,不但本身就是高等数学课程体系的一项改革,而且必将

促进其他许多相关课程的改革。

三、使用本书的注意事项

本书可以说是像《聊斋》而不像《三国演义》，不强调系统性，各个实验基本上是独立的。后面的实验一般不会用到前面实验的知识，(但也有几个例外)。实验安排的顺序基本上是由易到难，基础内容在前，较高级的扩散性的内容在后(但也不是绝对的)。虽然内容的编排实际上还是有一定的系统性，但我们并不强调这一系统性。我们强调的是从问题出发，自己动手做，自己观察结果，并且鼓励学生自己发明出新的实验。

因此，在使用本书时，不必按顺序从头到尾依次做各个实验，更不必全部做。可以根据各学校和学生的情况选做其中一部分实验。我们自己的做法是：每两周做一个实验，整个课程做8个到9个实验。也可以老师讲8到9个实验，但只要求学生在一学期中完成4个到5个实验，并且欢迎他们以后自己完成更多的实验。有些学校暂时没有时间完整开设数学实验课，可以先在高等数学课中结合课程内容安排做某些实验，甚至可以在计算机课程中作为作业安排做某些实验。总之，只要认真去做，做一个实验就有一分收获。

在每次实验中，我们的作法是先由教师讲两个课时，主要是提出问题，适当介绍问题的背景，介绍主要的实验原理和方法。然后就让学生自己动手去做，自己去折腾，去观察，通过观察得出结论。本来，实验结果一般都可以用理论推导出来，但这绝不是本课程的目的，教师千万不要花很多时间去作这种理论推导，最好也不要预先告诉学生实验的结果，实验结果让学生自己去观察得出。本书在某些实验后面作为附录作了这种推导，只是为了供有兴趣的学生课外阅读之用，决不是供教师讲解的教材，也不作为课程要求和考察内容，更不要以考试为手段强迫那些不感兴趣的学生去弄懂。在我们的试点中，有的学生希望少讲一些理论，多给他们留一些自己探索的空间，也有的学生希望多讲一些理论。我们说：能够通过实验使学生希望多学理论，这就是好事情。将他们学习数学理论的兴趣激发起来了，胃口吊起来了，这门课的目的就达到了。数学实验是“开胃汤”，而不是大餐。胃口吊起来之后希望多“吃”一些，请到正规的“餐馆”去，学生可以通过看参考书和学习其他课程来满足对于理论学习的渴求。

本书各实验大体上以 Mathematica 软件作为主要使用的软件，并且在一些实验后面附上了 Mathematica 程序供参考，以避免学生或老师在计算机方面花费太多的时间，冲淡了探索数学内容的趣味。但这并不意味着本书的实验只能用 Mathematica 去做，更并不意味着没有 Mathematica 就不能做这些实验。实际上，课本中对于计算机的要求也是相当开放的，实验方法的叙述和建议着重于数学思路，这些思路可以用 Mathematica 来实现，也可以用别的软件或自己编

程完成。

我们的试点课没有专门的考试,评定成绩的惟一依据是平时的实验报告。实验报告评分的最基本标准是要自己动手,要写上自己观察到的现象并进行分析。实话实说,不能造假。哪怕观察到的现象与预计不一致,或者与理论推导的结果不一致,也不能在实验报告中说假话,而应当分析其原因,找出改进的办法,重做实验,重新得出结论。对实验报告的更高的标准是创造性。对于有创造性的报告,要给以高分作为鼓励。教师批改了实验报告之后,要在下一次实验开始时,对以前的实验中出现的优点和缺点进行评讲,包括让学生参加讨论。

以上是我们对于开设数学实验课的想法和作法,本书则是这些想法和做法的物化和固化。数学实验课的开设在我国还是一件新的事情,处于摸索阶段。怎样开设,势必有许多不同的想法和作法。我们认为,现阶段应当鼓励各种不同的想法和作法,各自进行自己的探索和试点。可以而且应当相互交流,但不必统一,也不必争论哪种做法更好。现在首先是要先干起来,经过若干年实践去积累和总结经验,根据实践的效果来逐渐完善和成熟。

由于时间比较仓促,我们自己的试点还很不完善,本书写作中的不完善和疏漏之处一定不少。现在的这本书只能算个毛坯,先供自己和大家使用起来,在使用中改进。希望在不久的将来能将本书改得更好。

感谢两个教改课题组的负责人萧树铁教授和姜伯驹教授,正是在他们的领导下才使我们开始了数学实验的教改试点,才有可能产生这本书。数学实验课程试点的成功,还离不开中国科技大学和数学系领导的支持,以及学校各部门、特别是教务部门的支持,他们对教育改革的一贯支持,以及在全校范围内造成的搞教改的热烈而宽松的气氛,是我们作出成绩的重要保证。感谢数学系王树禾教授、侯定丕教授参加试点和讲课,感谢选修这门课程的广大学生,正是他们积极认真地参与,才使得我们开设数学实验课的试点搞得有声有色,使本书的指导思想 and 内容得以形成和完善。

在本书的写作过程中,我们参考了由 Mount Holyoke College(美)编写的、清华大学白峰杉和蔡大用翻译的、高等教育出版社与施普林格出版社合作出版的《数学实验室》一书,并且受到启发。在此感谢该书的作者、译者和出版者。

作 者

1999年6月于合肥

郑 重 声 明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

传 真：(010) 82086060

E - mail：dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮 编：100011

购书请拨打电话：(010)64014089 64054601 64054588

策划编辑	马 丽
责任编辑	高尚华
封面设计	李卫青
责任绘图	黄建英
版式设计	范晓红
责任校对	王 雨
责任印制	宋克学

目 录

实验一	微积分基础	1
实验二	怎样计算 π	23
实验三	最佳分数近似值	31
实验四	数列与级数	43
实验五	素数	54
实验六	概率	64
实验七	几何变换	72
实验八	物理现象的数学模拟	86
实验九	迭代(一)——方程求解	105
实验十	寻优	114
实验十一	最速降线	125
实验十二	迭代(二)——分形	136
实验十三	迭代(三)——混沌	155
实验十四	密码	163
实验十五	初等几何定理的机器证明	172
实验十六	迭代(四)——几何形状的构造	181
Mathematica	简介	207

实验一 微积分基础

本实验的目的是:学习使用 Mathematica 的一些基本功能来验证或观察得出微积分学的几个基本结论.

Mathematica 是一个符号计算系统. 它可以帮助你很容易进行初等数学和高等数学中的数值计算、符号计算、画图等各种事情.

1.1 函数及其图像

我们先从画图像开始.

这是因为,图像最容易引起兴趣.

更重要的是:很多数学现象和原理可以用图像直观生动地表达出来. 眼见为实,胜过千言万语.

用 Mathematica 画函数图像,不需计算、列表、描点. 只要告诉要画什么函数的图像、自变量在哪个范围内取值,运行 Mathematica 就会得到所需的图像.

比如:要画函数 $y=\sin x (x\in[-\pi,\pi])$ 的图像,在点击 Mathematica 的图标进入工作屏幕之后,输入以下语句:

```
Plot[Sin[x],{x,-Pi,Pi}]
```

再运行这个语句,屏幕上就立即显示出所需要画的图像.

在以上的语句中:

Plot 表示请计算机为我们画图.

Sin[x] 及 $\{x,-\pi,\pi\}$ 表示画函数 $y=\sin x (x\in[-\pi,\pi])$ 的图像.

注意:虽然函数 $y=\sin x$ 的自变量 x 可以取遍全体实数,但是屏幕的大小是有限的,不可能画出“ x 取全体实数”这样的无限区间. 所以必须给一个 x 取值的有限区间,比如 $x\in[-\pi,\pi]$. 另外,计算机键盘上没有 π 这样的符号,可用 Pi 表示.

以上语句中的 Sin[x] 可以换成别的函数, $\{x,-\pi,\pi\}$ 也可换成别的取值范围,这样就可以画各种函数在不同范围内的图像了.

可以将几个函数的图像画在同一个坐标系里. 比如:

```
Plot[{Sin[x],x},{x,-Pi,Pi}]
```

就表示将同一区间 $x\in[-\pi,\pi]$ 上两个函数 $y=\sin x, y=x$ 画在同一个坐标系里.

1. 泰勒(Taylor)级数

练习 1

(1) 在同一坐标系中画出同一个区间 $x \in [-\pi, \pi]$ 上的函数 $y = \sin x$, $y = 0.8x$, $y = x$ 与 $y = 1.2x$ 的图像.

观察过原点的直线 $y = 0.8x$, $y = x$, $y = 1.2x$ 中的哪一条与正弦曲线 $y = \sin x$ 最接近?

试验一些别的不同的 k 值, 在同一个坐标系内画出原点附近某一个区间上的直线 $y = kx$ 与正弦曲线 $y = \sin x$. 看具有哪一个斜率 k 的直线 $y = kx$ 与正弦曲线 $y = \sin x$ 在原点附近最接近? 这个 k 值就是 $y = \sin x$ 在 $x = 0$ 处的导数.

过 $y = \sin x$ 上另外一点, 比如 $P\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 作具有某个斜率 k 的直线 $y = k\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$, 观察这条直线在点 P 附近与正弦曲线的位置关系. 试验不同的 k 值, 看具有哪一个斜率 k 的直线与正弦曲线在 P 点附近最接近?

在上面的练习 1(1) 中发现, 在具有不同斜率 k 的过原点的直线 $y = kx$ 中, $k = 1$ 时的直线 $y = x$ 与正弦曲线 $y = \sin x$ 在原点附近最接近, 如图 1-1 所示.

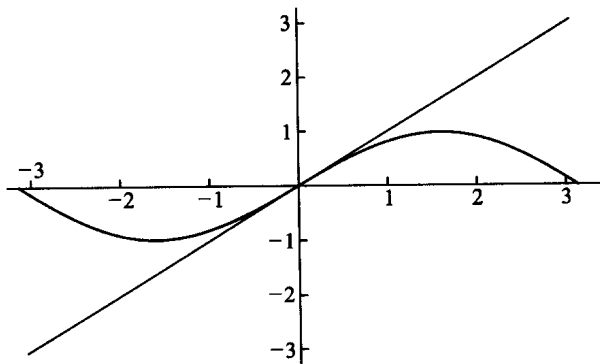


图 1-1

观察发现: 从原点出发沿直线 $y = x$ 前进与沿正弦曲线 $y = \sin x$ 前进的方向是一致的, 在原点附近很小一段旅程(比如 $x \in [-0.4, 0.4]$) 中两条路线几乎看不出有差别. 但继续走下去, 两条路线就分道扬镳了: 直线沿原来的方向继续前进, 而正弦曲线则开始转弯, 两条路线越离越远.

一次函数的图像是直线, 当然不能跟着正弦曲线转弯. 能不能用二次函数的图像去跟着正弦曲线转弯、比直线更好地逼近正弦曲线? 也不行. 这是因为: 正弦函数是奇函数, 而二次函数不是奇函数. 二次函数不行, 三次函数行不

行? 5次函数能不能更好? 7次呢? 9次呢? 能不能用越来越高次的多项式的函数图像越来越好地逼近正弦函数的图像? 请作下面的练习并观察作出的图像.

(2) 在同一坐标系里作出区间 $x \in [-\pi, \pi]$ 上正弦函数 $y = \sin x$ 及多项式函数 $y = x - \frac{x^3}{6}$, $y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$ 的图像. 如图 1-2, 观察这些多项式函数的图像逼近正弦曲线的情况. (如图 1-2 所示)

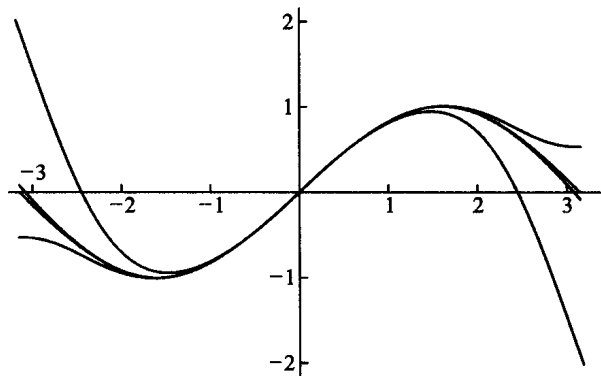


图 1-2

这些多项式是 $\sin x$ 的泰勒级数

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots$$

的前若干项组成的.

也许你感到: 这么多曲线画在同一个坐标系中, 不容易辨认哪一条曲线是哪一个函数的图像. 那么你可以分别将它们染上不同的颜色, 再显示在同一个坐标系中, 就容易辨认了. 比如: 将上述正弦曲线染成红色, 5次多项式的图像染成紫色, 3次和7次多项式仍为黑色. 语句如下:

```
curve1 = Plot[Sin[x], {x, -Pi, Pi}, PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]}];
curve2 = Plot[x - x^3/6 + x^5/120, {x, -Pi, Pi},
              PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 1]}];
curve3 = Plot[{x - x^3/6, x - x^3/6 + x^5/120 - x^7/(7!)}, {x, -Pi, Pi}];
Show[curve1, curve2, curve3]
```

请自己运行这些语句并观察结果.

上面的第一句是在区间 $x \in [-\pi, \pi]$ 上画 $y = \sin x$ 的图像. 选项 `PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0]}` 是将图像染成红色: 其中的 `RGBColor[1, 0, 0]` 中是红