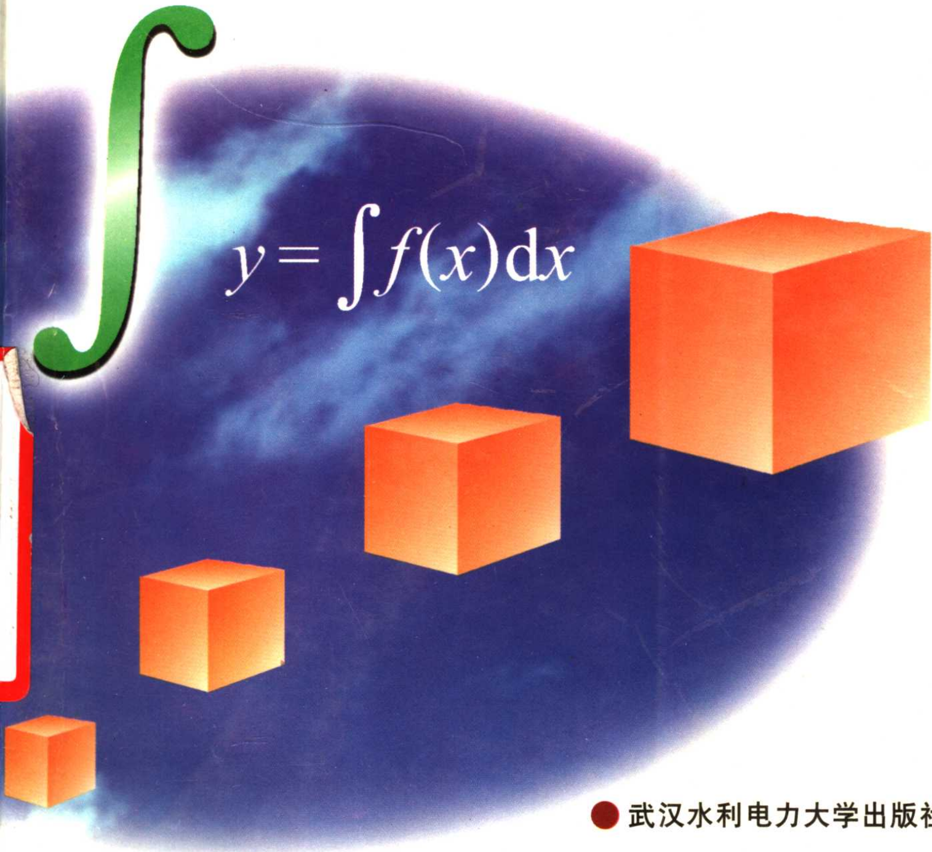
高等数学扩充模块

GAO DENG SHU XUE
KUO CHONG
MO KUAI

武汉水利电力大学数学物理系
高等数学扩充模块编写组　编



武汉水利电力大学出版社

(鄂)新登字 15 号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学扩充模块/武汉水利电力大学数学物理系《高等数学扩充模块》编写组编 . 一武汉:武汉水利电力大学出版社,1998.10

ISBN 7-81063-019-9

Ⅰ.高… Ⅱ.武… Ⅲ.应用数学 Ⅳ.O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 24704 号

责任编辑:李汉保　　封面设计:涂　驰

武汉水利电力大学出版社出版发行

(武汉市武昌东湖南路 8 号　邮编 430072)

京山金美印刷有限责任公司印刷

*

开本:850×1168　1/32　印张:10.625　字数:238 千字

1999 年 5 月第 1 版　1999 年 5 月第 1 次印刷　印数:0 001—4500 册

ISBN 7-81063-019-9/O·3　　定价:12.80 元

前　　言

这是一本工科数学教学改革教材。1995 年在学习高等学校工科数学课程教学指导委员会《关于工科数学系列课程教学改革的建议》中，我们深感高等数学课程的改革已刻不容缓，而现有的内容体系一时又很难改变，因此在执行现行高等数学教学大纲的同时，有必要编写一本补充读物，当然不能同目前的工程数学内容相重迭，它能够为高等数学课程提供一个现代数学的窗口和应用的园地，形式上应是小型化和模块化，便于采用。因此取名为《高等数学扩充模块》，全书包括六个模块：

模块Ⅰ　数理经济基础，编写者：周学良、蔡德祺、杨丽华；

模块Ⅱ　非线性规划，编写者：姜明启、高作汉、王渝生；

模块Ⅲ　曲线拟合法，编写者：贺俐、李大美；

模块Ⅳ　工程几何方法，编写者：游新中、丁宇明；

模块V　动力系统的稳定性，编写者：陈士华、陆君安；

模块VI　常微分方程建模，编写者：程卫生、梁树培。

这些模块相互独立，主讲教师可根据情况选用，也可以作为专题和讲座使用，当然也是大学生的一本课外读物。初稿曾印成讲义在我校96级学生中使用，在教学实践的基础上，将初稿作了认真修改，在97级学生中又一次使用。尽管这样，由于作为教改教材本身是一种尝试，从模块内容的选取到编写，我们都缺乏经验，加之编者的水平所限，本书一定存在不少缺点，敬请读者，特别是同行的老师们批评指正。

本教材从酝酿到最后定稿，得到了校、院、系和教务处各级领导的支持，一些同事虽然没有参加编写工作，但也提出过不少宝贵意见，在此一并表示衷心的感谢。

编者 1998年7月于武汉水利电力大学

目　录

模块 I

数理经济基础

第一节　市场均衡价格

一、需求函数

欲望是指人的需要——对某种物品，既有缺乏感觉，又有满足的愿望，二者缺一不可，否则就不能产生欲望。它是人类一切经济活动的原动力，由欲望的动机而产生具体要求。

需求是消费者在各种可能的价格下，对某种商品愿意并且能够购买的数量。如果只有购买的欲望而没有购买的能力，或者只有购买的能力而没有购买的欲望，都不会产生有效的需求，在市场形成实际的购买力。

一种产品的需求量，取决于一系列的因素，主要有：产品的价格，消费者的收入，消费者的偏好，有关产品的价格，此类产品的预期价格，季节的变化等等。

在这一节里，我们主要研究需求量与自身价格和消费者的收入之间的关系。

设市场上有 n 种商品，第 i 种商品的价格为 p_i（$i=1, 2, \cdots, n$），消费者的收入为 Y，该种商品的需求量为 D_i（$i=1, 2, \cdots, n$），则**静态需求函数**就是用表达需求量与当期价格和收入之间关系的一种函数，其一般表达式为：

$$D_1=f_1(P_1, P_2, \cdots, P_n, Y)$$

$$D_2=f_2(P_1, P_2, \cdots, P_n, Y)$$

$$\cdots\cdots$$

$$D_n=f_n(P_1, P_2, \cdots, P_n, Y)$$

如用向量形式表示，则 $\boldsymbol{D}=f(\boldsymbol{P}, Y)$，$\boldsymbol{D}=(D_1, D_2, \cdots, D_n)'$，$f=(f_1, f_2, \cdots, f_n)'$，$\boldsymbol{P}=(P_1, P_2, \cdots, P_n)'$。

当消费者的收入较稳定时，则可将 Y 看成是一常量，此时需求函数为 $\boldsymbol{D}=f(\boldsymbol{P})$，即需求量仅是价格的函数。

在特定的时间内，消费者对一定数量的商品所愿支付的最高价格，叫做**需求价格**。一般来说，需求量与需求价格成反向变动，即需求量是需求价格的递减函数，这就是需求法则，相应的需求曲线是从左上向右下倾斜的，该曲线具有负斜率，即 $f'(P)<0$。

引起需求量与需求价格反向变动的原因在于：一是收入效应。当价格上升或下降时，都会影响到消费者的实际收入，从而影响购买力，比如，当某种商品的价格下降时，意味着

购买者的实际收入增加，从而增加对该种商品的购买量。而在原价格上无力购买的人，此时可能成为新的购买者。二是替代效应。一些商品在使用上存在着彼此可以替代的关系。当某种商品的价格变化高于其它的商品价格时，消费者就可能改变购买计划，以价格变得相对低的商品去代替它。如，猪肉价格上涨幅度大了，消费者就可能用涨价幅度较小的鱼来替代部分猪肉的消费。

但是也有例外的情况，如古玩、字画、邮品等等。当其价格上升时，需求量反而会增加。

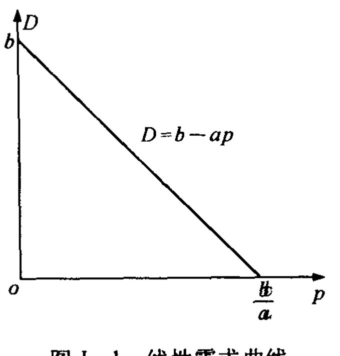
最简单的商品关于价格的静态需求函数有如下几种常见形式：

1. 线性需求函数

$$D=b-ap \quad (a>0,\ b>0)$$

当 $P=0$ 时，$D=b$，称 b 为饱和需求量；

当 $P=\frac{b}{a}$ 时 $D=0$，即当价格为 $\frac{b}{a}$ 时，消费者对此商品的需求为零，当价格超过 $\frac{b}{a}$ 时，消费者对此商品无需求。需求曲线如图Ⅰ-1。

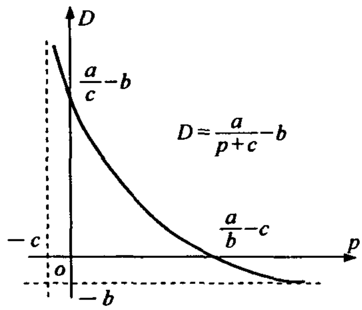


图Ⅰ-1 线性需求曲线

2. 双曲线型需求函数

$$D=\frac{a}{P+c}-b \quad (a>0,\ b>0,\ c>0)$$

当 $P \to -c$ 时，$D \to \infty$；当 $P \to \infty$ 时，$D \to -b$，故此需求曲线有两条渐进线（见图Ⅰ-2）。当 $P=0$ 时，$D=\frac{a}{c}-b$；表示该商品的饱和需求量为 $\frac{a}{c}-b$；当 $P=\frac{a}{b}-c$ 时，$D=0$，表示此时商品的需求量为零。



图Ⅰ-2 双曲线需求曲线

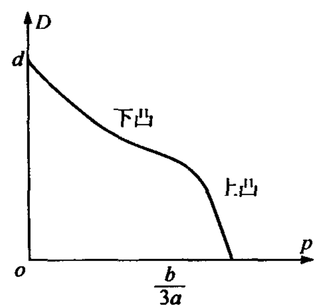
3. 三次需求函数

$D=-aP^3+bP^2-cP+d\,(a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0)$

将此需求函数对价格求导，可得

$$\frac{dD}{dP}=-3aP^2+2bP-c$$

$$\frac{d^2D}{dP^2}=-6aP+2b$$



图Ⅰ-3 三次需求曲线

当 $P=0$ 时，$D=d$；当 $P<\frac{b}{3a}$ 时，$\frac{d^2D}{dP^2}>0$；

当 $P>\frac{b}{3a}$ 时，$\frac{d^2D}{dP^2}<0$，故 $P=\frac{b}{3a}$ 是需求曲线上拐点的横坐标。（见图Ⅰ-3）这是一类很重要的需求函数，许多耐用消费品的需求均具有这种规律。当价格下降，此商品的需求量迅速上升，但当价格下降到 $\frac{b}{3a}$ 附近时，市场呈现出一种

相对饱和状态。此时当价格变动时，需求量的变动不大，如果价格再大幅度下降而远离 $\frac{b}{3a}$时，其需求量又会大幅度上升。

如果考虑收入的作用，常见的需求函数有如下几种形式：

(1) $D=a+bY\,(b>0)$

(2) $D=a-bP+cY\,(b>0,\ c>0)$

(3) $D=a+b\,(Y/P)\,(b>0)$

(4) $D=a\exp\,(bY/P)\,(b>0)$

需求函数还有一种形式，将消费者在某种商品上的支出表示成收入的函数 $PD=\phi(Y)$，由此方程作出的曲线称为恩格尔曲线。是由德国的统计学家 E. Engel 提出来的。恩格尔运用此方程对不同商品进行了大量的统计分析，得出三条结论：

(1) 食品消费在家庭消费支出中占的份额最多；

(2) 食品消费支出占总支出的份额随收入的增加而减少；

(3) 随收入的增加，衣着消费和住房消费占总支出的份额几乎不变，而奢侈品占的份额将增加。

此三条结论称为恩格尔定律。

在恩格尔定律中，用的最多的是第二条。世界银行用一个国家中人均食品消费支出占总消费支出份额的大小来划分每个国家生活水平的高低程度，份额小的意味着生活水平高，份额大的则表示其生活水平低。

常见的恩格尔曲线有：

(1) $PD=a+bY$（线性）；

(2) $\log(PD)=a+b\log Y$（对数线性）；

(3) $PD=a-b/Y\,(b>0)$（双曲线）；

(4) $PD=a+b\log Y$（半对数）。

二、供给函数

市场上某种商品的供给是指在一定的时间内，厂商在某种可能价格下，对该商品愿意并能够提供的数量。

一种商品的供给量也取决于一系列因素，主要有：产品的价格、生产的成本及相应的产品的价格、技术水平、市场环境等等。

这里我们仅讨论完全竞争市场上商品的供给行为。

完全竞争市场是指具有价格既定，产品同质，要素自由，信息充分这四个特征的市场。

市场上商品的**供给函数**是将供给量表示成价格的函数，而假定影响供给的其它因素不变，即 $S=S(P)$。

在特定的时间内，厂商对一定数量的商品所愿意出售的最低价格，叫做**供给价格**。一般来说，随着价格的升高生产者出售商品时所获得的利润就越高，这样生产者就愿意提供更多数量的商品。因此，供给量与供给价格成正方向变化动。即对供给函数有 $S'(P)>0$，这就是供给法则，供给曲线是一条关于价格单调递增的曲线(见图 Ⅰ-4)。

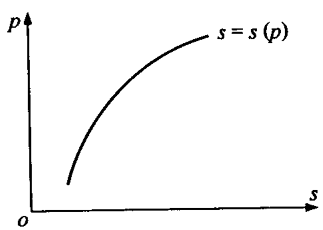


图 Ⅰ-4　供给曲线

当然，也有例外的情况，如劳务供给市场。劳务供给曲线（见图 Ⅰ-5)。

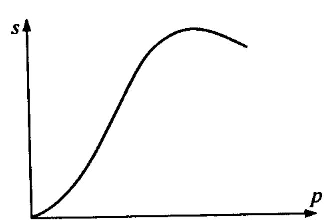


图 Ⅰ-5　劳务供给曲线

从图中可以看出，在开始阶段，劳务的价格即工资会引起劳务供给上升，但当工资提高到一定的水平后，劳务的供给者——劳动者对货币的需求没有在低收入时那样迫切，此时，工资的增加不会引起劳务的增加，相反还可能引起劳务供给的减少，因为此时劳动者可能更愿意休息而不愿意多工作。

常见的静态供给函数有：

1. 线性供给函数

$$S=aP-b \qquad (a>0,\ b>0)$$

由上式可得：当 $P=\frac{b}{a}$ 时，$S=0$，即供给量为零。

当 $P<\frac{b}{a}$ 时，S 出现负值，这是不可能的。因此，此式表明，只有当 $P>\frac{b}{a}$ 时，供给者才愿意出售商品。$P=\frac{b}{a}$ 为最低价格，供给曲线（见图Ⅰ-6）。

2. 分式供给函数

$$S=\frac{aP-b}{cP+d} \qquad (a>0,b>0,c>0,ad+bc>0)$$

当 $p=\frac{b}{a}$，$S=0$，即最低价格为 $\frac{b}{a}$，当 $P\to\infty$ 时，$S\to\frac{a}{c}$；即当价格上涨时，商品的一饱和供给量 $\frac{a}{c}$，供给函数 S 关于价格 P 的一、二阶导数为

$$\frac{dS}{dP}=\frac{ad+cb}{(cP+d)^2}>0 \quad \frac{d^2S}{dP^2}=-\frac{2(ad+cb)c}{(cP+d)^3}<0$$

故分式供给曲线是一条单调递增凸向上的曲线(见图Ⅰ-7)。

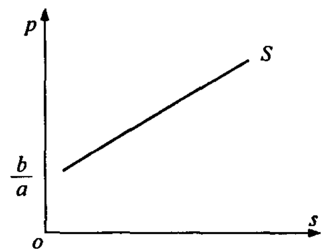


图 I-6　线性供给函数

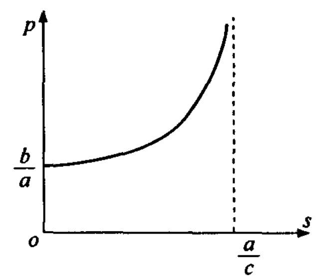


图 I-7　分式供给函数

三、静态均衡价格

前面我们已经讨论了市场上的需求函数和供给函数，现在来讨论在单一的完全竞争的市场条件下，静态均衡价格的存在性和稳定性。

在一个经济社会中，每一种商品都有大量的生产者和消费者，供给和需求在不断的变化。如此庞杂的经济活动的有机循环运行，是靠价格制度来协调的。供给和需求就象一把剪刀的两个刀刃，相互作用，从而决定价格。而价格又是供给与需求的桥梁，在完全竞争市场的条件下，通过价格可以自动调节供给与需求，使市场达到均衡。

1. 均衡价格的存在性

设市场上的需求函数和供给函数分别记为 $D=D(P)$，$S=S(P)$，一般的有 $\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}P}<0$，$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}P}>0$。均衡价格是指市场上供给量与需求量相当的那个价格，记作 P^*，于是有 $D(P^*)=S(P^*)$

定理 如果市场的需求函数和供给函数满足如下条件：

(1) 存在价格 P_1，使得 $D(P_1)>S(P_1)$，

(2) 存在价格 P_2，使得 $D(P_2)<S(P_2)$，

则市场的均衡价格存在且唯一。

证 设 $E(P)=D(P)-S(P)$，并称 $E(P)$ 为超需函数。因为 $\frac{\mathrm{d}E(P)}{\mathrm{d}P}=\frac{\mathrm{d}D(P)}{\mathrm{d}P}-\frac{\mathrm{d}S(P)}{\mathrm{d}P}<0$，所以超需函数 $E(P)$ 是关于价格单调下降的函数。由定理中的条件可知，存在价格 P_1，使 $E(P_1)>0$，存在价格 P_2，使 $E(P_2)<0$，由零点存在定理知，至少存在一P^*，介于 P_1 与 P_2 之间，使 $E(P^*)=0$ 又因为 $E(P)$ 是单调函数，故存在唯一的 P^*，使 $E(P^*)=0$，即均衡价格存在且唯一（见图 Ⅰ-8）。图 Ⅰ-8 中横轴表示数量，纵轴表示价格，超需函数与纵轴的交点就是均衡价格 P^*。

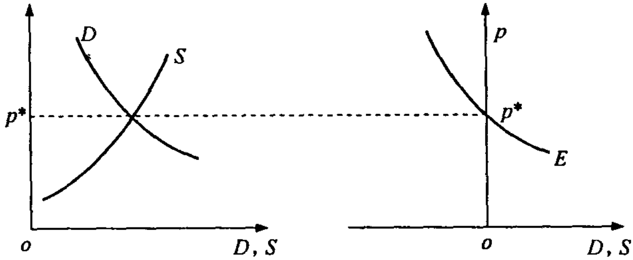
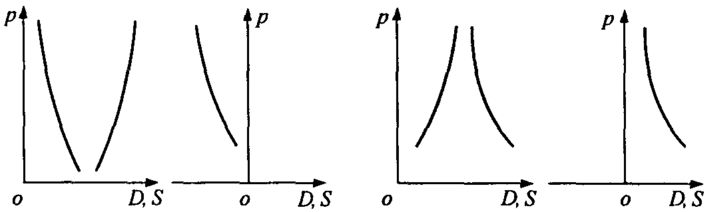


图 Ⅰ-8 均衡的存在性

注 1. 如果条件 (1), (2) 有一个不满足，则市场的均衡价格可能不存在（见图 Ⅰ-9）。

2. 如果单调性的假设不成立，则即使均衡价格存在，也可能不唯一。



不满足 (1) 的情况　　　　不满足 (2) 的情况

图 I - 9

例　已知某鸡蛋市场的需求函数为 $D=61-25P$，供给函数为 $S=-17+40P$，求出该市场的均衡价格和均衡数量。(单位：元/kg)

解　$D(P^*)=S(P^*)$　$D=a_0-a_1P^*$　$S=-b_0+b_1P^*$

代入方程 $a_0-a_1P^*=-b_0+b_1P^*$

得均衡价格 $P^*=\dfrac{a_0+b_0}{a_1+b_1}$ 均衡数量 $Q^*=S(P^*)=D(P^*)=\dfrac{a_0b_1-a_1b_0}{a_1+b_1}$

$$a_0=61，a_1=25，b_0=17，b_1=40$$

可得 $P^*=\dfrac{61+17}{25+40}=1.2$ (元) $Q^*=\dfrac{61\times 40-25\times 17}{25+40}=31(\text{kg})$

此结果表明，此鸡蛋市场当鸡蛋价格在 1.2 元，供给量为 31 kg 时，市场达到均衡。即所有愿意以供给价格出售的鸡蛋都能卖光，所有愿意以需求价格购买的鸡蛋都能买到。此时，市场上既没有多余的鸡蛋，也不存在鸡蛋短缺。

2. 均衡的比较静态分析

市场的需求与供给，除了受价格的影响外，还受其它因素的影响，当这些因素中的一个或几个发生变化时，市场的需求和供给都会发生变化。

对需求而言，这些因素有其它商品的价格，消费者的收入，个人的偏好等等。现将这些因素用综合参数 α 来表示。设价格不变，当 α 增加时，需求增加；当 α 减少时，需求减少，于是需求函数可表示为

$$D=D(P,\ \alpha) \tag{1-1-1}$$

且 $$D_P=\frac{\partial D}{\partial P} \quad D_\alpha=\frac{\partial D}{\partial \alpha}>0 \tag{1-1-2}$$

对供给而言，影响因素也很多，如生产成本，有关产品的价格等等。将这些因素用一综合参数 β 来表示，并假设 β 对供给是正的影响，于是供给函数可表示为

$$S=S(P,\ \beta) \tag{1-1-3}$$

且 $$S_P=\frac{\partial S}{\partial p}>0 \quad S_\beta=\frac{\partial s}{\partial \beta}>0 \tag{1-1-4}$$

当市场达到均衡状态时，有

$$D(P^*,\ \alpha)=S(P^*,\ \beta) \tag{1-1-5}$$

由此式可得均衡价格

$$P^*=\Phi(\alpha,\ \beta) \tag{1-1-6}$$

现在我们来讨论 α、β 的变动对 P^* 的影响，将式（1-1-5）两边关于 α 求偏导