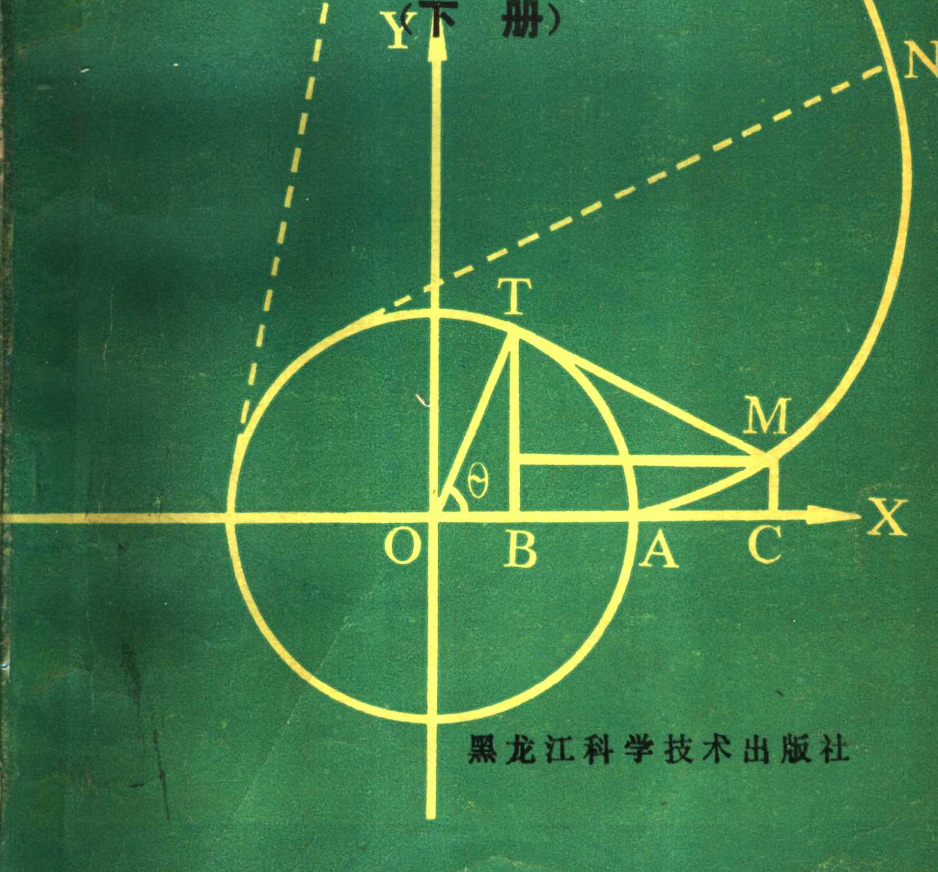
高中毕业

数学单元复习纲要

（下册）



黑龙江科学技术出版社

高　中　毕　业

数学单元复习纲要

《高中毕业数学单元复习纲要》编写组

（下　册）

黑 龙 江 科 学 技 术 出 版 社

一九八二年·哈尔滨

封面设计：曹汝明

高中毕业

数学单元复习纲要

《高中毕业数学单元复习纲要》编写组

黑龙江科学技术出版社出版

（哈尔滨市南岗区分部街28号）

佳木斯印刷厂印刷　黑龙江省新华书店发行

开本787×1092毫米1/32・印张14.10/16・字数320,000

1982年2月第1版　　1982年2月第1次印

印数1－74,550

书号：13217・028　　定价：（上下两册）1.30元

三　　角

§ 3.1　三角函数、反三角函数的定义域和值域

一　三角函数的坐标法定义，反三角函数的定义。

二　将三角函数看成是以实数为自变量的函数，它们的定义域和值域如下表：

函　数	定　义　域	值　　域
$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,\ 1]$
$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,\ 1]$
$y=\mathrm{tg}x$*	$(k\pi-\pi/2,k\pi+\pi/2),(k\in J)$	$(-\infty,+\infty)$
$y=\mathrm{ctg}x$	$(k\pi,(k+1)\pi),(k\in J)$	$(-\infty,+\infty)$
$y=\sec x$	$(k\pi-\pi/2,k\pi+\pi/2),(k\in J)$	$(-\infty,-1],[1,+\infty)$
$y=\csc x$	$(k\pi,(k+1)\pi),(k\in J)$	$(-\infty,-1],[1,+\infty)$
$y=\arcsin x$	$[-1,\ 1]$	$[-\pi/2,\pi/2]$
$y=\arccos x$	$[-1,\ 1]$	$[0,\ \pi]$
$y=\mathrm{arc\,tg}x$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\pi/2,\ \pi/2)$
$y=\mathrm{arcctg}x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\ \pi)$

* $y=\mathrm{tg}x$的定义域的其它表示法是(1){x: $x\in R$, $x\neq k\pi+\pi/2$, $k\in J$}；(2) $k\pi-\pi/2<x<k\pi+\pi/2$, ($k\in J$)；(3)不等于$k\pi+\pi/2$($k\in J$)的一切实数。

我们看到反三角函数的定义域分别是它们的反函数的值域；反三角函数的值域则分别是它们的反函数的定义域中的一个单调区间。

例 1 求下列各题中函数的定义域：

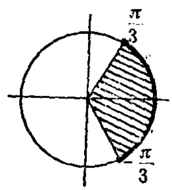
（1）$y=\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x$，（2）$y=\sqrt{2\cos x-1}$；

（3）$y=\arccos\dfrac{1}{x-2}$；

（4）$y=\mathrm{arc\,tg}\sqrt{-x^2+2x+3}$；

（5）$y=\sqrt{49-x^2}+\sqrt{\sin x}$。

解 （1）$\mathrm{tg}x$的定义域为 $(k\pi-\pi/2,\ k\pi+\pi/2)$，$\mathrm{ctg}x$ 的定义域为$(k\pi,\ (k+1)\pi)$，故函数 y 的定义域为$(k\pi-\pi/2,\ k\pi+\pi/2)\cap(k\pi,\ (k+1)\pi)=(k\pi/2,\ (k+1)\pi/2)$，$(k\in J)$。



（2）由$2\cos x-1\geqslant 0$，得 $\cos x\geqslant 1/2$，由余弦函数在第一象限为减函数，在第四象限为增函数，可得函数 y 的定义域为 $[2k\pi-\pi/3,\ 2k\pi+\pi/3]$，$(k\in J)$。

（3）$|1/(x-2)|\leqslant 1$，即 $|x-2|\geqslant 1$，于是有 $x-2\geqslant 1$，即 $x\geqslant 3$，或 $x-2\leqslant -1$，即 $x\leqslant 1$．故函数 y 的定义域为$(-\infty,1]$，$[3,+\infty)$。

（4）由$-x^2+2x+3\geqslant 0$，得函数 y 的定义域：$-1\leqslant x\leqslant 3$。

（5）$49-x^2\geqslant 0\quad\therefore\quad -7\leqslant x\leqslant 7$ ①

$\sin x\geqslant 0\quad\therefore\quad 2k\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi\,(k\in J)$ ②

①、②的公共部分即为函数 y 的定义域：

$-2\pi\leqslant x\leqslant -\pi$，$0\leqslant x\leqslant \pi$，$2\pi\leqslant x\leqslant 7$

例 2 α 为什么值时 $\sec\varphi=\dfrac{\alpha-2}{1-2\alpha}$ 有意义？

解 要使 $\sec\varphi$ 有意义，须且只须 $\left|\dfrac{\alpha-2}{1-2\alpha}\right|\geqslant 1$，即

$|\alpha-2|\geqslant|1-2\alpha|$，$(1-2\alpha\neq 0)$，

两边平方，整理得 $\alpha^2\leqslant 1$，即 $-1\leqslant\alpha\leqslant 1$，$(\alpha\neq 1/2)$。

也就是 $-1\leqslant\alpha<1/2$，$1/2<\alpha\leqslant 1$。

例 3 求函数 $y=\dfrac{2\cos x+1}{3\cos x-2}$ 的值域。

解 由 $y=\dfrac{2\cos x+1}{3\cos x-2}$，得 $\cos x=\dfrac{1+2y}{3y-2}$，$(3y-2\neq 0)$，

故有 $\left|\dfrac{1+2y}{3y-2}\right|\leqslant 1$，$\left(y\neq\dfrac{2}{3}\right)$，即 $|1+2y|\leqslant|3y-2|$，两边平方并整理得 $5y^2-16y+3\geqslant 0$，$(y\neq 2/3)$，解得 $y\leqslant 1/5$ 或 $y\geqslant 3$。

说明 本题所用的方法叫做逆求法．这是求函数的值域（有时变形为证明不等式）问题中常用的一种方法．我们要求函数 y 的值域，先考虑它的逆函数 $\arccos\dfrac{1+2y}{3y-2}$，然后确定这个逆函数的定义域，也就是函数的值域。

例 4 求下列各函数的值域：

（1）$y=\dfrac{\operatorname{arc\,tg}(x^2-1)}{2}$；（2）$y=\operatorname{arcctg}\dfrac{2\sin x-1}{\sin x+3}$；

（3）$y=\arcsin\dfrac{x^2+2x-3}{2(x^2-2x+3)}$。

解 （1）$\because \quad x^2\geqslant 0$，$\therefore \quad x^2-1\geqslant -1$，

于是 $-\pi/4\leqslant \operatorname{arc\,tg}(x^2-1)<\pi/2$，$\therefore \quad -\pi/8\leqslant y<\pi/4$。

（2）设 $z=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x+3}$，则有 $z=2-\dfrac{7}{\sin x+3}$

$\dfrac{7}{\sin x+3}$极小时 z 极大，故$\sin x=1$时

$$z_{极大}=2-\frac{7}{1+3}=\frac{1}{4},$$

$\dfrac{7}{\sin x+3}$极大时 z 极小，故$\sin x=-1$时

$$z_{极小}=2-\frac{7}{-1+3}=-\frac{3}{2},$$

由于反余弦函数为减函数

$$\therefore \quad \operatorname{arcctg}\frac{1}{4}\leqslant y\leqslant \operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{2}\right)$$

（3）设 $z=\dfrac{x^2+2x+3}{2(x^2-2x+3)}$，则有

$$(2z-1)x^2-2(2z+1)x+3(2z+1)=0.$$

x为实数须且只须$(2z+1)^2-(2z-1)\cdot 3(2z+1)\geqslant 0$，

于是 $$(2z+1)(z-1)\leqslant 0,$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{2}\leqslant z\leqslant 1, \quad \therefore \quad -\frac{\pi}{6}\leqslant z\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

例 5 求函数 $y=\arcsin\sqrt{x}+\arccos x$的值域。

解 $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}\cdot 2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\sqrt{1+x}-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x^2}}$，

由 $y'=0$，得 $x=1/3$。当 $x<1/3$ 时 $y'>0$，$x<1/3$ 时 $y'<0$，故 $x=1/3$时 y 为极大值。函数的定义域为$[0,1]$，

求端点值：$x=0$时 $y=\pi/2$；$x=1$时 $y=\pi/2$，端点值相等，故函数 y 的值域为$\left[\frac{\pi}{2},\ \arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}+\arccos\frac{1}{3}\right]$。

说明 本题应用了导数法。否则如果从 $0\leqslant\arcsin\sqrt{x}\leqslant\pi/2$，$0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$两式相加得 $0\leqslant y\leqslant 3\pi/2$，这个结果不能表示函数的值域，因为不存在这样的$x$值，同时使 $\arcsin\sqrt{x}$ 取极小值而 $\arccos x$取极大值。

【练习】

1．将函数 $y=\csc x$的定义域用几种不同的形式表示之。

2．证明下列各题中 $A=B$：

（1）$A=\{x:\ x=m\pi+(-1)^m\pi/2,\ m\in J\}$，

$B=\{x:\ x=2n\pi+\pi/2,\ n\in J\}$；

（2）$A=\{x:\ x=m\pi/3,\ m\in J\}$，

$B=\{x:\ x=n\pi\text{或}\pm\pi/3,\ n\in J\}$。

3．求下列各函数的定义域：

（1）$y=\sin x+\cos x+\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x+\sec x+\csc x$；

（2）$y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$；　　（3）$y=\sqrt{\lg x}$；

（4）$y=\dfrac{1}{\arccos x}$；　　（5）$y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x^2-x-6}$。

4．求下列各函数的值域：

（1）$y=2+0.5\sin x$；　　（2）$y=|1-2\csc^2x|$；

（3）$y=2\operatorname{arctg}x$，$(x<0)$；

（4）$y=\arcsin(2x^2-5/2)$。

5．x 为何值时下列各等式成立：

（1）$\operatorname{ctg}x\sec x=\csc x$；

（2）$\lg\operatorname{tg}x=\lg\sin x-\lg\cos x$；

(3) $\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\operatorname{ctg}x-\sin x$;

(4) $\arcsin(-x)=-\arcsin x$;

(5) $\operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg}x$.

【习题】

1. 求下列各函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{\csc x}{1-\operatorname{tg}x}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{\arccos(2x-1)}$;

(3) $y=\sqrt{\sqrt{2}-2\sin x}$; (4) $y=\arcsin(\operatorname{tg}x)$;

(5) $y=\sqrt{\lg\cos x}$;　(6) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$.

2. 求下列各函数的值域：

(1) $y=\sin(\cos x)$;

(2) $y=\operatorname{arctg}(9-8\cos x-2\sin^2 x)$.

3. 若 $\sin 3\alpha=y\sin\alpha$，其中 $\alpha\neq k\pi,(k\in J)$，求 y 的取值范围.

4. 求函数 $y=\dfrac{1}{2}\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ 的值域.

5. a 为什么数值时，下列各式有意义：

(1) $\cos x=4-3a$;　(2) $\csc x=\dfrac{2a}{3a+1}$.

6. 求函数 $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{2+\operatorname{tg}x}{1-2\operatorname{ctg}x}$ 的定义域及值域.

§3.2　三角函数、反三角函数的基本性质

一　有界性　由函数的值域可知

$|\sin x|\leqslant 1$, $|\cos x|\leqslant 1$, $\mathrm{tg}x$、$\mathrm{ctg}x$都可为任意实数值，$|\sec x|\geqslant 1$, $|\csc x|\geqslant 1$，所以 $y=\sin x$, $y=\cos x$ 是有界函数，其它三角函数是无界函数。又$|\arcsin x|\leqslant\pi/2$，$|\arccos x|\leqslant\pi$, $|\mathrm{arc\,tg}x|<\pi/2$, $|\mathrm{arc\,ctg}x|\leqslant\pi$，所以反三角函数都是有界函数。

二　单调性　三角函数的单调性，是指自变量x在某一区间内的变化来说的，下表说明在 $0\sim 2\pi$ 范围内，各三角函数的单调性：

x / y	0	↗	π/2	↗	π	↗	3π/2	↗	2π
sin x	0	↗	1	↘	0	↘	−1	↗	0
cos x	1	↘	0	↘	−1	↗	0	↗	1
tg x	0	−∞ ↗	不存在	↗ −∞	0	+∞ ↘	不存在	↗	0
ctg x	不存在	+∞ ↘	0	↘ −∞	不存在	+∞ ↘	0	↘ −∞	不存在
sec x	1	+∞ ↗	不存在	↗ −∞	−1	↘ +∞	不存在	+∞ ↘	1
csc x	不存在	+∞ ↘	0	+∞ ↗	不存在	↘ −∞	−1	↘ −∞	不存在

在定义域内，$y=\arcsin x$、$y=\mathrm{arc\,tg}x$ 都是增函数，$y=\arccos x$、$y=\mathrm{arc\,ctg}x$都是减函数。

三　奇偶性　$y=\sin x$、$y=\mathrm{tg}x$、$y=\mathrm{ctg}x$、$y=\csc x$、$y=\arcsin x$、$y=\mathrm{arc\,tg}x$都是奇函数，$y=\cos x$、$y=\sec x$ 都是偶函数，$y=\arccos x$、$y=\mathrm{arc\,ctg}x$ 既不是奇函数，也不是偶函数。

四　周期性　三角函数是周期函数，其中 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$的周期都是2π，$y=\mathrm{tg}x$、$y=\mathrm{ctg}x$的周期都是π。反三角函数不是周期函数。

例 1 比较下列各题中两个函数值的大小.

（1）$\sin 20°$与$\sin 25°$；（2）$\sec 50°$与$\csc 50°$；

（3）$\operatorname{ctg} 3$与$\operatorname{ctg} 6$；（4）$\arcsin 0.4$与$\operatorname{arcctg} 1.5$.

解 （1）$\sin 20° < \sin 25°$.

（2）$\csc 50° = \sec 40° < \sec 50°$.

（3）$\because$ $\operatorname{ctg} 6 = \operatorname{ctg}(6-\pi)$，而3、$(6-\pi)$都在区间$(0, \pi)$内，且 $3 > 6-\pi$，$\therefore$ $\operatorname{ctg} 3 < \operatorname{ctg} 6$.

（4）$\because$ $\arcsin 0.4 < \arcsin 0.5 = \pi/6$，

$\operatorname{arcctg} 1.5 > \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi/6$，

$\therefore$ $\arcsin 0.4 < \operatorname{arcctg} 1.5$.

例 2 求满足 $\sin x \geqslant 1/2$且$\cos x < \sqrt{2}/2$的 x 值.

解 由 $\sin x \geqslant 1/2$ 得

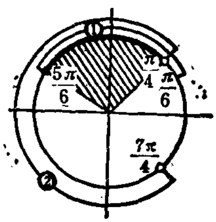
$$2k\pi + \pi/6 \leqslant x \leqslant 2k\pi + 5\pi/6,\ (k \in J) \qquad ①$$

由 $\cos x < \sqrt{2}/2$ 得

$$2k\pi + \pi/4 < x < 2k\pi < 7\pi/4,\ (k \in J) \qquad ②$$

取①、②的公共部分

$$2k\pi + \pi/4 < x \leqslant 2k\pi + 5\pi/6, (k \in J).$$



说明 解题步骤：

1）确定 $\sin x$、$\cos x$的共同周期2π；2）结合圆形图，在一个长度为2π 的区间如$[0.2\pi)$内，由$\sin x = 1/2$求出 $x = \pi/6$、$5\pi/6$，再由 $\sin x$的单调性确定满足$\sin x \geqslant 1/2$的 x 在$[\pi/6, 5\pi/6]$内，对 $\cos x < \sqrt{2}/2$ 也同样做；3）求出公共区间$(\pi/4, 5\pi/6]$；4）写出一般式.

例 3 判断下列各函数的奇偶性：

（1）$f(x) = \arcsin x/\cos^3 x$；

（2）$f(x)=\mathrm{tg}x(\csc x+\sec x)$。

解（1）$\because$ $f(-x)=\arcsin(-x)/\cos^3(-x)$

$=-\arcsin x/\cos^3 x=-f(x)$，$\therefore$ $f(x)$ 为奇函数。

（2）$\because$ $f(-x)=\mathrm{tg}(-x)[\csc(-x)+\sec(-x)]=-\mathrm{tg}x(-\csc x+\sec x)$，$f(-x)\neq f(x)$，$f(x)\neq -f(x)$，

$\therefore$ $f(x)$ 不是偶函数，也不是奇函数。

例 4 求下列各函数的周期：

（1）$y=\sin 3x$；（2）$y=3\cos(x/2+\pi)+1$；

（3）$y=\cos x+\mathrm{ctg}x$；（4）$y=\sec 4x+\mathrm{ctg}(3x/2)$。

解（1）$T=2\pi/3$。（2）$T=2\pi\div 1/2=4\pi$。

（3）$\cos x$ 的周期 $T_1=2\pi$，$\mathrm{ctg}x$ 的周期$T_2=\pi$，由于2π 是 π 的整数倍，故 $T=2\pi$。

（4）$\sec 4x$ 的周期$T_1=2\pi\div 4=\pi/2$，

$\mathrm{ctg}(3x/2)$的周期 $T_2=\pi\div 3/2=2\pi/3$，将T_1、T_2通分：$T_1=3(\pi/6)$，$T_2=4(\pi/6)$，求 T_1、T_2中$\pi/6$ 的系数的最小公倍数，得12，于是 $T=12(\pi/6)=2\pi$。

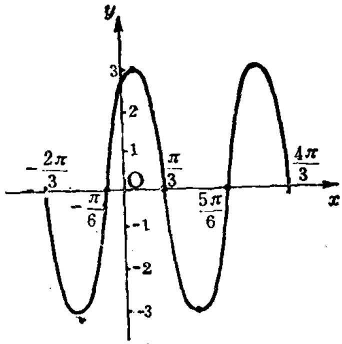
例 5 作函数 $y=3\sin(2x+\pi/3)$的图象。

解 用描点法。取 $2x+\pi/3=0$、$\pi/2$、π、$3\pi/2$、2π，求得相应的x、y值

$2x+\pi/3$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	$-\pi/6$	$\pi/12$	$\pi/3$	$7\pi/12$	$5\pi/6$
y	0	3	0	-3	0

描点作图．利用函数的周期性，将图象向左、右扩展出去，得到 $y=3\sin(2x+\pi/3)$的图象。

说明 本题所用的找五个关键点（即函数值最大和最小的点以及函数值为零的点）从而描出一个周期内的函数图象的方法，叫做"五点法"。这种方法可应用于正弦函数图象和余弦函数图象的绘制。



【练习】

1．不必查表，试分别比较下列各数与1的大小：

（1）$2\sin 509°$；　（2）$-2\cos(-482°)$；

（3）$\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}(-659°)$；　（4）$\mathrm{tg}10$；

（5）$2\arccos 0.8$。

2．设$0°\leqslant x<360°$，x为何值时满足下列各式：

（1）$\mathrm{tg}x>1$；　（2）$\sin x\geqslant\sqrt{3}/2$；

（3）$|\mathrm{ctg}x|\geqslant 1$；　（4）$\sec 2x>2$。

3．判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=\mathrm{tg}x+2\sin x$；　（2）$f(x)=(\mathrm{arc\,tg}x)^3$；

（3）$f(x)=\dfrac{\arcsin x}{\cos x}$；　（4）$f(x)=\dfrac{\mathrm{ctg}x}{\sin x+\mathrm{tg}x}$。

4．求下列各函数的周期：

（1）$y=2\sin\left(5x+\dfrac{\pi}{6}\right)$；　（2）$y=\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{3}$；

（3）$y=\sec^2 x$；　（4）$y=\cos^4 x+\sin^4 x$。

5．在$(A)\sin 2\pi x$　$(B)\cos x$　$(C)\mathrm{tg}x$　$(D)2^x$　$(E)2x^2$

$(F)|x|+2$　$(G)\lg x$　$(H)x^3$　$(I)\arcsin x$

$(J)\arccos x^2$ 中哪些函数满足下列条件：

（1）$nf(x)=f(x^n)$；（2）$f(nx)=\{f(x)\}^n$；

（3）$f(x+1)=2f(x)$；（4）$f(xy)=f(x)+f(y)$；

（5）$f(x+\pi)=f(x)$；（6）$f(-x)=-f(x)$；

（7）$f(-x)=f(x)$；（8）$f(x+1)=f(x)$；

（9）$f(-x)=f(x)$ 且 $f(0)=0$；

（10）$f(-x)=f(x)$ 且 $f(0)=1$；

（11）$f(x+2\pi)=f(x)$；（12）$f(-x)\cdot f(x)=1$。

6．画出各基本三角函数和反三角函数的图象。

【习题】

1．求满足下列各题的 x 的范围：

（1）$\sin x>1/2$ 且 $\cos x\geqslant 1/2$；

（2）$\operatorname{ctg} x\geqslant -\sqrt{3}/3$ 且 $\cos x<\sqrt{3}/2$。

2．求下列各函数的周期

（1）$y=\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}+\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{3}$；（2）$y=\sin 3x+\operatorname{tg}\frac{2}{5}x$；

（3）$y=|\sin x|$。

3．用“五点法”作出下列函数在一个周期内的图象：

（1）$y=4\sin 2x$；（2）$y=2\cos(x/2+\pi/4)$。

4．不画图，试写出下列各函数的振幅、周期和初相，并说明这些函数的图象可由正弦曲线 $y=\sin x$ 经过怎样的变化得出：

（1）$y=8\sin(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{8})$；（2）$y=\frac{1}{3}\sin(3x+\frac{\pi}{7})$。

5．若 $\arccos a-\arccos(-a)>0$，求a。

6．函数 $y=\sin(\arcsin x)$与 $y=x$ 的图象一样吗？

7．若 $0°\leqslant x<360°$，对于 x 的什么值有 $\operatorname{tg}2x>2\operatorname{tg}x$？

*8. 若$\left|\log_x\frac{\alpha}{\pi}\right|<2$，$x$是自变量，求使函数$y=\sin(x+\alpha)+\cos(x-\alpha)$为偶函数的常数$\alpha$的个数。

§3.3 三角式求值

三角式求值问题常见的有两种类型：一、在一定条件下求某些三角式的值；二、不用查表，求某些特殊角的三角函数值。解三角式求值问题必须：1.熟记$k\cdot30°(k=0,1,2,\cdots,12)$及$k\cdot45°(k=1,3,5,7)$的各三角函数值(不存在者除外)；2.合理而迅速地利用基本三角公式进行三角恒等变形，应掌握的基本公式有

同角三角函数关系、诱导公式、两角和、两角差、倍角、半角的三角函数（如下页列表）。

运用公式要注意：

1. 各公式的意义及适用范围，如“倍角”与“半角”是相对而言的，$\alpha/2$是$\alpha/4$的二倍，反之$\alpha/4$是$\alpha/2$的半角。半角公式中正负号由$\alpha/2$所在的象限来决定。

2. 熟悉这些公式的变形，如

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha\Leftrightarrow(\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha)(\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha)=1;$$

$$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1\Leftrightarrow\cos^2\alpha=(1+\cos2\alpha)/2;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\Leftrightarrow\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta).$$

还可利用上面公式推出

1. 三倍角公式

$$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,\quad \cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$

两角和、两角差、倍角、半角的三角函数

和角公式

$\sin(\alpha+\beta)$
$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)$
$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

用 $-\beta$ 代 β　　$\alpha=\beta$　　相除　　相加减

差角公式

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\,\mathrm{Sin}\,\beta$

相除　　相加减

倍角公式

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

相除　　变形

$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$

$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$

用 $-\beta$ 代 β　　$\alpha=\beta$

$\mathrm{tg}\,2\alpha=\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$

半角公式

$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

相除与变形

$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

$=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

$=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$

$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$

变形　　变形

和差化积

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

积化和差

$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$

2. 万能代换公式

$$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \mathrm{tg}\alpha=\frac{2t}{1-t^2},$$

$$(t=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2})$$

反三角函数求值问题常用的性质有

$\sin(\arcsin x)=x\ \ (x\in[-1,1])$,

$\cos(\arccos x)=x\ \ (x\in[-1,1])$,

$\mathrm{tg}(\mathrm{arc\,tg}x)=x$, $\qquad$ $\mathrm{ctg}(\mathrm{arc\,ctg}x)=x$,

$\arccos(-x)=\pi-\arccos x\ \ (x\in[-1,1])$,

$\mathrm{arc\,ctg}(-x)=\pi-\mathrm{arc\,ctg}x$。

例 1 已知 $\sin\alpha=-12/13$，求 $\cos\alpha$，$\mathrm{tg}\alpha$，$\mathrm{ctg}\alpha$，$\sec\alpha$，$\csc\alpha$。

解 $\csc\alpha=1/\sin\alpha=-13/12$。

$\because$ $\sin\alpha<0$，$\therefore$ α在第三象限或第四象限。

当α在第三象限时

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-(-12/13)^2}=-5/13,$$

$$\sec\alpha=\frac{-13}{5},\quad \mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{12}{5},\quad \mathrm{ctg}\alpha=\frac{5}{12};$$

当α在第四象限时

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=5/13$, $\qquad$ $\sec\alpha=13/5$,

$\mathrm{tg}\alpha=-12/5$, $\qquad$ $\mathrm{ctg}\alpha=-5/12$。

说明 解这类题目主要运用同角三角函数关系，把已知函数与所求函数联系起来，要注意符号的选择，选择的根据是角α所在的象限：1.如果已知角α所在象限，那么所求函数值的符号就可确定；2.如果只知道α的某个三角函数，那么应根据已知函数值的符号确定角α所在的象限；3.如果已