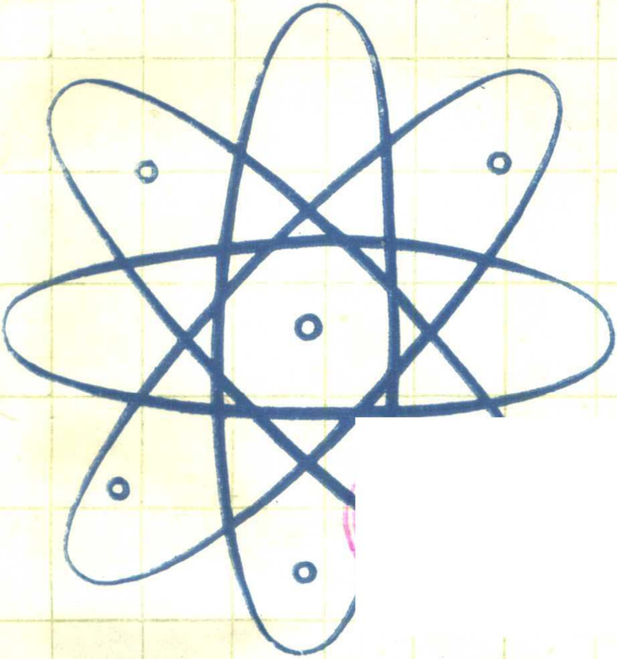
小学教师文库



代数初步知识教学

干平一

江苏人民出版社

XUEJIAOSHIWENKU

代数初步知识教学

干 平 一

江苏人民出版社

内 容 提 要

本书主要按《全日制十年制学校小学数学教学大纲》(试行草案)和现行统编教材要求编写。全书比较系统、通俗、深刻地叙述用字母代表数、代数式和代数式的值、简易方程、列方程解应用题等代数基础知识；研究小学数学中代数初步知识教学的方法。同时为了适应当前小学数学已渗透“集合”“对应”等现代数学思想的要求，简明扼要地介绍了“集合”方面的初步知识。

本书可供小学数学教师教学和进修参考。

代数初步知识教学

江苏人民出版社出版

江苏省新华书店发行　江阴人民印刷厂印刷

开本787×1092毫米　1/32　印张　2.375　字数　48,000

1981年9月第1版　1981年9月第1次印刷

印数 1—25.500册

书号：7100.116　定价：0.21元

责任编辑　何履邦

目　录

一、引　言

代数学是什么？代数学是数学领域中的一个重要的分支。在初等代数学里，字母代表通常的数，所以对含有字母的式子的变换是以数的运算法则为依据的（例如两数的和或积满足交换律，在代数里则写成 $a+b=b+a$，或 $a\cdot b=b\cdot a$ 等等）。一百多年来，尤其是本世纪以来，随着数学的发展以及应用的需要，代数学的对象和它的研究方法都发生了巨大的变革。简单地说，近世代数学是用字母来代表它所研究的对象，并对字母按照确定的运算法则进行变换。

在中、小学里的代数，既不是那样抽象的近世代数学，也不是纯粹的初等代数学。它除了初等代数的内容，还有属于算术方面的基础知识（例如求数的平方根、对数计算），以及属于数学分析方面的基础知识(例如初等函数、极限)等等。现行全日制十年制学校小学数学课本（以下简称现行教材）中的代数初步知识，专门讲解的只有简易方程这个内容。

从算术到代数是人们认识过程中的一个飞跃。它们的不同之处，主要是研究的对象扩充了，研究的方法改变了。算术里研究的对象是自然数、正分数和零，初等代数里把研究的对象——数——扩展到有理数、实数，直到复数。算术仅仅是通过具体的数的运算进行研究的，初等代数则通过代表数的字母的运算进行研究。由于初等代数的研究方法比算术抽象，所以它的应用也就更为普遍。

二、简 易 方 程

§1 用字母表示数

1.用字母表示数

在算术里，是用一些具体的数字进行计算的。例如，某人每小时平均走9里，2小时走多少里？这里的数字9就是9，2就是2，它们都是固定的具体数字，回答的数字也只能是固定的具体数字18（里）。

我们继续讨论下去：

3小时走　9×3（里）；

4小时走　9×4（里）；

5小时走　9×5（里）。

上面每个计算式子都只能分别解决个别的具体问题。如果不考虑那些固定的具体数字，把问题中的平均速度、时间和路程之间的关系写成式子

路程＝平均速度×时间。

如果为了叙述简便，可用字母S代表路程，字母V代表平均速度，字母t代表时间，那么上面的式子就改写成

$$S = Vt,$$

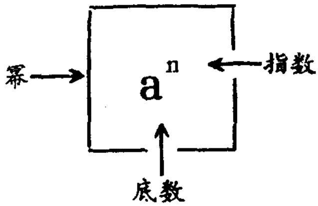
其中字母V、t和S代表还没有确定的数，只有在具体的问题中才有确定的数。因此，这个计算式子普遍适用于平均速度、时间和路程之间有关的一切问题。我们把这类式子叫做公

式。用字母代替数后所得到的公式，不再是就事论事，而能一般地同时又简明地表达某类问题的数量关系。

在代数里，我们通常用拉丁字母（a、b、c……）来表示数。习惯上，在某些特定的场合里，有些字母常常用来代替特定意义的数。例如在行程问题中，常常用字母S表示路程，V表示速度，t表示时间；在几何图形中，常常用字母V表示体积，S表示面积，h表示高，a、b、c……表示线段的长，R表示圆（或球）的半径，D表示圆（或球）的直径。特别地，有些常用的特殊数用固定的字母来表示，如圆周率是一个固定的数——3.14159……，习惯上大家都用希腊字母π来表示它。

通常在字母和字母中间或数字和字母中间的乘号“×”可以用“·”号代替。在不会发生混乱的情况下，乘号“·”亦可省略掉，如V×t可写成V·t，也可以写成Vt。因为字母表示数，而数的乘法满足交换律，所以乘积中字母的先后次序应尽量符合字母表上的自然顺序，如ab不要写成ba。如果数字和表示数的字母相乘时要省略乘号，就把数字写在字母的前面，如a×b×4，应写成4ab，不写成ab4或a4b。

与通常的数一样，若干个相同字母a相乘，即$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots\cdots a}_{n个}$，记做$a^n$。这种求**若干个相同因数的积的运算，叫做乘方，乘方的结果叫做幂**。在a^n中，a叫做**底数**，n叫做**指数**，a^n读做a的n**次方**。如果把a^n看做是a的n次方的结果时，又可读做a的n**次幂**。



例如，在8^5中，底数是8，指数是5，8^5读作8的5次方，或读作8的5次幂。

由于边长为a个长度单位的正方形的面积等于a^2个平方单位，棱长为a个长度单位的正方体的体积等于a^3个立方单位，所以我们常把a的二次方读作a的平方，a的三次方读作a的立方。

我们规定a^1就是a，即一个数a看做这个数a本身的一次方，指数1通常省略不写。

2.用字母表示数的应用

通过下面的一些应用举例，可以进一步看到用字母表示数的优越性。

(1)用字母表达数的共同性质

先看一个例子：

一页作文纸有15行，每行20格，共有

$$20\times15=300(\text{格})。$$

另有一种计算方法：有20列，每列15格，共有

$$15\times20=300(\text{格})。$$

两种不同的计算方法有相同的结果，因此有

$$20\times15=15\times20。$$

这个等式揭示了20和15这两个具体的数在求它们积的时候，

交换被乘数和乘数的位置，不影响结果。但是仅凭这个例子不能揭示对于任意两个数都具有这个性质，即乘法满足交换律。如果用字母a和b表示任意的两个数，乘法交换律就可以用

$$a\times b=b\times a$$

来表示。这个等式说明所有的两个数都满足乘法的交换律。

算术里一些运算定律都可以用字母来表示，从而正确地表达了数的共同性质。事实上，用a、b、c等字母表示任意的数，那末

①加　法

i.加法交换律　$a+b=b+a$。

ii.加法结合律

$$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c).$$

②减　法

i. $a-(b+c)=a-b-c.\ (a\geqslant b+c)$

ii. $a+(b-c)=a+b-c.\ (b\geqslant c)$

iii. $a-(b-c)=a+c-b.\ (a\geqslant b-c\geqslant 0)$

③乘　法

i.乘法交换律　$a\times b=b\times a$。

ii.乘法结合律

$$a\times b\times c=(a\times b)\times c=a\times(b\times c).$$

iii.乘法对加法的分配律

$$(a+b)\times c=a\times c+b\times c.$$

iv.乘法对减法的分配律

$$(a-b)\times c=a\times c-b\times c.\ (a\geqslant b)$$

④除　法

i. $a(b \div c) = a \cdot b \div c$。($c \neq 0$)

ii. $a \div (b \times c) = a \div b \div c$。($b \neq 0$，$c \neq 0$)

iii. $a \div (b \div c) = a \cdot c \div b$。($b \neq 0$，$c \neq 0$)

iv. $(a + b) \div c = a \div c + b \div c$。($c \neq 0$)

v. $(a - b) \div c = a \div c - b \div c$。($a \geqslant b$，$c \neq 0$)

(2)用字母表达某一个法则

我们知道，两个分数（如果是带分数先化成假分数）的乘法法则是：把分子相乘的积做分子，分母相乘的积做分母，写成一个分数。如果用字母a和b（$\neq 0$）分别表示第一个分数的分子和分母，字母c和d（$\neq 0$）分别表示第二个分数的分子和分母，那末就可以把两个分数的乘法法则表达成

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}. \quad (b \neq 0,\ d \neq 0)$$

可见，这个法则用语言来叙述多么噜苏，而用字母代替数以后，就非常清晰地表达了分数的乘法法则。

又如两个分数（都不是带分数）的除法法则是

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}.$$

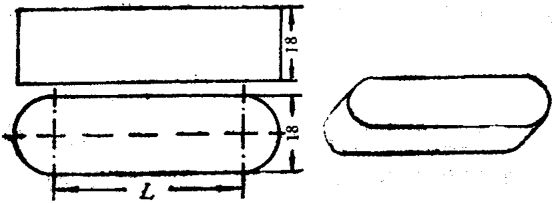
$$(b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0^{*})$$

(3)用字母代表数在生产上的应用

---

*这个条件可以简写成$b \cdot c \cdot d \neq 0$。

在生产上，用字母表示数后，带来不少方便。例如图1（2）是一张加工相同宽度和高度而不同长度的键的图纸。



（1）　　　　（2）

l	件数
45	
50	
55	
60	
65	

图　1

它表示键的宽度和高度都是18mm*，长度是$l$mm，l有五种尺寸，列表补充说明。这样，用了代表数的字母l后，一张图纸就起到了五张图纸的作用。

（4）用字母代表数便于对一些问题的研究

有些不依赖于固定的数字的性质，在考察具体的数字的时候，容易被人们所忽视。例如，一个两位数80，把它的数位的次序调换过来排列，就是$0\times10+8$，即得到一个新的数8，这两个数的差是72。这个差数72并不引人注意。可是用字母a（$1\leqslant a\leqslant9$的自然数）表示十位上的数码，个位上的数码是0，那末原来的数是$A=10\times a$。调换这个数的数位次序后，得到的新数是一位数$B=a$。显然$A>B$，所以它们的差是

$$\begin{aligned}A-B&=10\times a-a\\&=(10-1)\times a\qquad（分配律）\\&=9\times a\ .\end{aligned}$$

*图纸上凡不标明长度单位的，一般都是以毫米（mm）为长度单位。

由这个结果，能一目了然，无论A是怎样的整十两位数，调换它的数位次序后得新数B，那末A和B的差总是9的倍数。这个一般的性质在用字母代替数后，就充分地显示出来了。

从具体的数字抽象到用字母来代替数，在数学上是一个重大的发展。这个发展与人类在长期的实践中形成了数的概念一样重要。每一次发展都使数学更加抽象，从而也就更加深刻更加普遍地揭露事物的本质，更加简单更加正确地揭示数量关系的一般规律。然而每经过一次抽象化，必然会给学生带来不少困难。

数的认识从儿童学话时就开始，一直延伸到小学若干年，这么漫长的时间内不知不觉的在逐步深化。但是在教学中由固定的具体数字（如2、4、81等等）过渡到用字母（a、b、c等等）代替不固定的具体数字，这个认识过程的时间却非常短暂，因此困难不少。当然也有积极的因素可以利用，因为学生的年龄大了一点，他们积累的知识也就丰富了一些，接受能力也增强了一点。根据这些特点，在教学时应从学生已有的知识出发，通过实例，反复对比、归纳，使学生弄清楚引进字母的目的，为学生形成概念创造条件。

用字母来代替数，实际上学生早已接触过，例如：

长方形的面积＝长×宽；

路程＝平均速度×时间。

在这些公式中的面积、长、宽，路程、平均速度、时间等等，都表示某些数。事实上，这也是用字母代替数的一种形式，所

不同的是用中文而不是用外文来代替数。如果用字母S表示长方形的面积，a表示长方形的长，b表示长方形的宽，那末求长方形面积的公式就可以“翻译”成

$$S=a\cdot b.$$

这就是代数中所习惯的形式了。

又如，已知两个加数的和与其中的一个加数，求另一个加数，在小学三年级的时候就曾经用字母x来表示另一个加数，如$x+8=17$。只是那时候的字母x仅仅起着括号“(　)”的作用，即(　)$+8=17$。因此有人形象地把“x”看作由括号“(　)”中两个面对面的圆弧改变成背靠背的“x”得来的。尽管这种认识是肤浅的，不完整的，但是比较直观，学生容易接受，对小学生引进表示数的字母有积极作用。

现行教材第八册安排用字母表示数这一内容，首先通过学生熟悉的数量关系的例子，很自然地步步深入阐明用字母表示数的意义，怎样用字母表示数；接着重点介绍了用字母表示运算定律和用字母表示公式，并出现了等式。这样做一方面进一步说明用字母表示数的优越性，另一方面为以后学习简易方程和列方程解应用题打下基础。

还可以向学生提出“李健比王小华大2岁”这个已知条件，让学生得到王小华1岁、2岁、3岁……时，李健的岁数。接着，教师应提问“从上面计算李健岁数中，每一个表示王小华岁数的数字都是固定的，如1就是1，2就是2。如果撇开这些表示王小华岁数的具体数字，我们有没有发现求李健岁数的一般规律?”使学生打开思路，使问题的讨论深入一步。但学生限于知识水平，往往只能回答：“王小华的岁数加上2，就是李健的岁数。”在学生积极思索之后，教师可进一步告诉

学生：经过长期的实践，人们用一个字母a表示王小华的岁数，那末求李健岁数的文字计算式就可以写成一个简单的含字母的计算式子：$a+2$。这里的字母a表示王小华的岁数，可以表示1，2，3……。当a的数字一确定，李健的岁数$a+2$也就随着确定了。因此，$a+2$包括了$1+2$，$2+2$，$3+2$……，也就是说概括了李健和王小华两人岁数之间的关系。

但是，把李健的岁数说成$a+2$，学生可能不易接受，所以教师应该指出，$a+2$不能再化简，可以算做计算结果。

又如每件衣服用布b米。50件这样的衣服共用布多少米？先写成$b\times50$，这是含有字母的应用题，不能再计算、化简，因此再根据书写要求改写成$50b$，算做计算结果。以后再经过多次接触，学生会慢慢习惯这种表示数的方法。

学生初步掌握了含有一个字母的式子表示一个数量关系后，就可讲解如“已知每小时做的零件数和工作的时间，求所做的零件总数”。这里要用两个字母同时分别表示每小时做的零件数和工作的时间，所以比上面只含一个字母的例子复杂。教学这个例子可分两步进行：先确定每小时做的零件数（或工作时间），如每小时做4个零件（或工作3小时），得到t小时（或每小时做a个）所做零件总数是$4\times t$（或$a\times3$）；再把时间t（或每小时做的零件数a）看做固定的数字，如果每小时做a个（或工作t小时），便得到做的零件总数是$a\times t$，即at。

在学生初步掌握了用字母表示数的方法以后，应进一步提出，在含有字母的式子里，通常在字母和字母中间或数字和字母中间的乘号“×”可以用“·”号代替，或者省略不写。并着重指出：省略乘号后数字要写在字母的前面，乘号“·”应该点在中间，以免与小数点混同。但是，数和数相乘，

中间的乘号可以用“·”，却不能省略，如3·8不能写成38。加号（+）或减号（-）或除号（÷），在用字母代替数的计算式子中，也不能省略，如3-8a不能写成38a，a÷4不能写成4a。今后教了分数，两数相除还可写成分数的形式，如a÷4写成$\frac{a}{4}$，三角形面积公式写成$S=\frac{ah}{2}$。

由于数的运算定律，学生是熟悉的，因此教学用字母表示运算定律的时候，可以先通过数字来复习，并由学生用语言叙述运算定律，然后改用字母表示，使学生看到算术里一些运算定律都能简明、正确地用字母来表达。数的运算法则是现行教材解方程的原理，因而教学上应引起足够的注意，并加强这方面的练习。通过用字母表示运算定律的练习，一能进一步了解用字母表示数的意义和作用，二能记熟并运用运算法则，三能提供简便的计算方法，提高计算能力。

教学字母表示公式时，应该先复习公式中的数量关系。例如，复习路程*、速度和时间的数量关系，让学生说出过去学过的公式：路程=速度×时间，再指导学生用字母来表示这个公式。含有字母的公式实质上就是用字母表示公式里的数量关系，因此这个内容如果学习得好，对以后列方程解应用题很有好处。

在正方形面积的计算公式中，教材引入了a^2。学生往往因为不清楚它的意义，所以书写时没有把“2”写在“a”的右上角，使得a^2和$a\times2$两者混淆起来。因此教师应该重视它，讲清它的意义、写法和读法。

---

* “路程”和“距离”是有区别的，距离是指两点间最短连线的长度，因此行程问题中用“路程”比较确切。

§2 代数式和代数式的值

1.代数式

用字母来表示数以后，我们可以用运算符号*和结合符号，把字母和数字连接起来，得到一个式子，这样的式子叫做代数式。例如

$$Vt,\ \frac{1}{2}ah,\ \ \frac{m+n}{P},\ 3a+(b+4)\cdots\cdots$$

都是代数式。特别地，单独的一个数或者一个字母，例如

$$1.45,\ 10,\ 0,\ a,\ x\cdots\cdots$$

虽然没有运算符号，但是为了方便起见，可以看成是该数（或字母）乘以或除以1，所以规定它们也是代数式。

2.系　数

如果一个代数式是一个数字和若干个表示数的字母的乘积，那末这个数字因数叫做字母因数的系数。例如：$10a$，10是a的系数；$\frac{1}{2}ah$，$\frac{1}{2}$是ah的系数；$1.8x^2yz^3$，1.8是x^2yz^3的系数。

通常都把系数写在字母的前面，如$10a$，$\frac{1}{2}ah$。如果是$1\times a$，$1\times ah$，不写成1a，1ah，而写成a，ah，把系数1省去不写。

代数式里的字母都表示数，因而有关数的运算律都适用于代数式。

---

*代数运算有六种：加、减、乘、除、乘方和开方。开方在小学里没有讲，所以这里的运算仅指加、减、乘、除和乘方。

例1 计算：

（1）$9t+7t$；　　（2）$3\frac{1}{2}ab+3.3ab$；

（3）$3x-2x+5x$；　　（4）$3(4a+7b)+2a$.

解 （1）$9t+7t=(9+7)t$ （乘法对加法的分配律）

$=16t$.

（2）$3\frac{1}{2}ab+3.3ab=(3\frac{1}{2}+3.3)ab$

$=6.8ab$.

（3）$3x-2x+5x=(3-2+5)x$

$=6x$.

（4）$3(4a+7b)+2a=12a+21b+2a$

（乘法对加法的分配律）

$=12a+2a+21b$

（加法交换律）

$=(12a+2a)+21b$

（加法结合律）

$=(12+2)a+21b$

（乘法对加法的分配律）

$=14a+21b$.

3.列代数式

许多实际问题，常常需要把语言所表达的数量关系用代数式来表示，这叫做**列代数式**。换句话说，列代数式就是把文字的叙述“翻译”成代数的语言——代数式。

例2 用代数式表示：

（1）y与2的和；