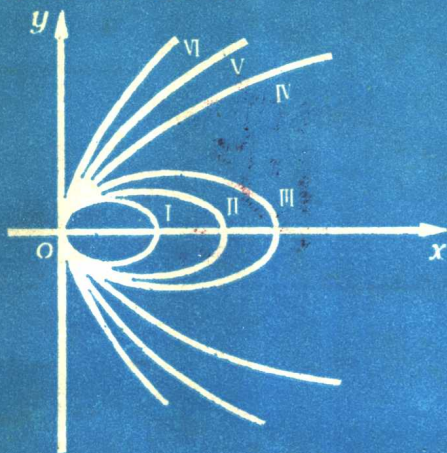


中学数理化读物



李锦涛 郑关东编

ZENYANG JIEDA
SHUXUE XUANZETI

怎样解答数学选择题

福建人民出版社

中学数理化读物

怎样解答数学选择题

李锦涛 郑关东 编

福建人民出版社

一九八五年·福州

怎样解答数学选择题

李锦涛 郑关东

*

福建人民出版社出版

(福州得贵巷27号)

福建省新华书店发行

三明市印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 $1/32$ 8.75印张 190千字

1985年12月第1版

1985年12月第1次印刷

印数: 1—26,830

书号: 7173·738 定价: 1.25元

出版说明

选择题是一种命题形式，具有概念性强、知识覆盖面广的特点，它在加深学生理解基本概念、帮助学生掌握基本规律、训练学生分析和判断能力上有着重要的作用。目前，选择题这种命题形式在我国的中学教学和各种考试中已经得到普遍推广和广泛应用。因此，编辑出版一套全面介绍中学数理化选择题的类型、特点和解法的课外学习参考书——中学数理化选择题丛书，是非常必要的。

这套丛书包括初中三本：《初中数学选择题》《初中物理选择题》《初中化学选择题》；高中三本：《怎样解答数学选择题》《怎样解答物理选择题》《怎样解答化学选择题》。它们具有四大特点：（一）针对性强。编选题目以现行的中学课本为依据，题目简明，难易适中，适合中学生的程度。（二）使用方便。所编选的题目，不仅按课本章节次序，而且按选择题类型作科学的编排，条理清楚，使用方便。（三）便于自学。全书按选择题的解法、题目、答案三大部分进行编写，便于在校学生和社会青年自学使用。（四）适合教师参考。本丛书紧密结合平时教学实践和升学考试实际，既可作为教师平时教学参考书，也可作为总复习指导书。

《怎样解答数学选择题》由李锦涛、郑关东老师编写。作者结合平时教学实际，系统介绍了中学数学选择题的类型、特点和解法；根据中学数学的主要内容，设计和精选了

近一千道题目，分类编排，可供学生做“对口”练习。这些题目，囊括了中学数学的基本知识和基本技能。其中部分题目，选自全国高等学校统一招生数学试卷，反映了高考对数学选择题的要求。

作者们编写这套丛书时，尽管花了相当多的时间和精力对中学数理化选择题进行了广泛的收集和精心的研究，但由于水平所限，不妥之处肯定还会有的，恳望读者批评指正。

目 录

第一部分 怎样解答数学选择题	(1)
一、数学选择题的基本类型	(1)
二、数学选择题的主要特点	(9)
三、数学选择题的一般解法	(26)
第二部分 数学选择题选	(65)
一、实数	(65)
二、复数	(71)
三、代数式	(79)
四、方程与方程组	(88)
五、不等式	(98)
六、集合与对应	(107)
七、函数	(116)
八、排列、组合和二项式定理	(125)
九、数列	(134)
十、数学分析初步	(143)
十一、命题的充要条件	(149)
十二、三角函数的性质	(156)
十三、加法定理	(166)
十四、解三角形	(177)
十五、反三角函数和三角方程	(186)
十六、直线形	(195)

十七、圆与正多边形	(205)
十八、空间直线与平面	(213)
十九、简单几何体	(223)
二十、直线和圆的方程	(231)
二十一、椭圆、双曲线和抛物线的方程	(241)
二十二、坐标变换、极坐标和参数方程	(251)
第三部分 答案	(262)

第一部分 怎样解答数学选择题

选择题是一种重要的命题形式。由于它便于电子计算机阅卷评分和统计成绩，因此，近二三十年来随着电子计算机技术的不断发展，在中学教学中运用选择题这种命题形式愈来愈普遍，愈来愈广泛。

前几年，在我国中学数学的习题和试题中推广了选择题，它开始出现在中学数学联赛的试题中，后来又在1983年、1984年和1985年全国高等院校招生入学考试数学试题中作为主要的命题形式。所有这些都引起了广大中学数学教师和教育研究人员的极大兴趣。研究数学选择题的类型、特点和解法等问题，已成为当前中学数学教学的重要课题。现就这三个方面的问题，作一下简明扼要的阐述。

一、数学选择题的基本类型

近年来，在我国中等教育数学的教学和考核中，采用数学选择题命题形式越来越广泛，越来越普遍，它已经活跃在教师讲课的例题中，运用在课堂复习的提问上，出现在学生学习的练习题和考试题里。所有这些数学选择题，不仅在内容上涉及面宽、覆盖面广，而且在形式上花样新、门类多。目前，最常见的有下面三种基本类型。

(一) 单一选择题

单一选择题是最常见的、最大量的一类数学选择题。这

类选择题只要求回答一个问题，在提供选择的4个或5个答案中，有且仅有一个是正确的，故称之为单一选择题。是非题实质上也是单一选择题的一种形式。解答者只要把选择出来的某一个正确答案填到指定的位置上就算完成了答题。如果解答者选择了错误的答案或选择了两个以上的答案就是答题的失败。倘若把这类选择题作为试题，答对的给应得分数，答错的则按规定倒扣分数。

由于单一选择题答题规则简单、命题范围广泛，因此，应用最为普遍。

例1 i 是虚数单位， $1 + 2i + 3i^2 + 4i^3 + \dots + (4k-3)i^{4k-4} + (4k-2)i^{4k-3} + (4k-1)i^{4k-2} + 4ki^{4k-1}$ 的值则是 ()，其中 $k \in N$ 。

- (A) $2k - 2ki$; (B) $-2k - 2ki$;
(C) $-2k + 2ki$; (D) $2k + 2ki$ 。

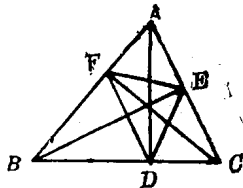
正确答案是(B)。

例2 设 $P = \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \cos 30^\circ + \dots + \cos 80^\circ$ ，那么，用 $\cos 10^\circ$ 可以把 P 表示成 ()。

- (A) $(\sqrt{3} + 1)(\frac{1}{2} + \sqrt{1 + \cos 10^\circ})$;
(B) $(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1)(1 + \sqrt{1 + \cos 10^\circ})$;
(C) $(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{2}\sqrt{1 + \cos 10^\circ} + 1)$;
(D) $(\sqrt{3} + \frac{1}{2})(1 + \sqrt{1 + \cos 10^\circ})$;
(E) $(\sqrt{3} - 1)(\frac{1}{2} + \sqrt{1 + \cos 10^\circ})$ 。

正确答案是(A)。

例3 如图示,锐角三角形 ABC 的三条高分别是 AD 、 BE 、 CF ,那么, $S_{\triangle EFA} : S_{\triangle ABC}$ 的比值是()。



- (A) $\operatorname{tg}^2 A$;
- (B) $\sin^2 A$;
- (C) $\operatorname{ctg}^2 A$;
- (D) $\cos^2 A$.

正确答案是(D)。

例4 下列各条中,不能定义一个集合的是()。

- (A) 高二(3)班参加围棋小组的学生;
- (B) 高二(3)班喜欢下围棋的学生;
- (C) 高二(3)班自备有围棋的学生;
- (D) 高二(3)班参加过各级围棋比赛的学生;
- (E) 高二(3)班下过围棋的学生。

正确答案是(B)。

例5 等差数列($d \neq 0$)的前 n 项和 S_n 可以表示成()。

- (A) $an + b$;
- (B) $an^2 + bn$;
- (C) $an^2 + bn + c$;
- (D) $an^3 + bn^2 + c$;
- (E) $an^3 + bn^2 + cn$.

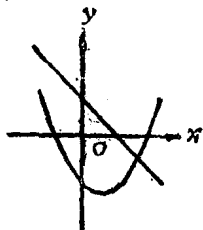
其中 a 、 b 、 c 均为常数,且 $a \neq 0$ 。

正确的答案是(B)。

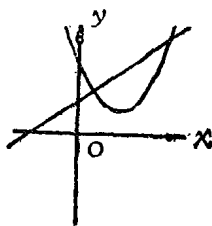
例6 已知函数 $y = ax + b$ 和 $y = ax^2 + bx + c$,其中 $a \neq 0$,那么,它们的图象应该是下页所示的图象中的()图象。

正确答案是(C)。

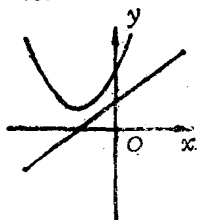
(A)



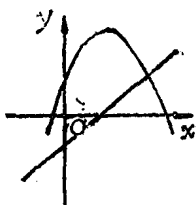
(B)



(C)



(D)



(二) 多重选择题

多重选择题与单一选择题不同，这类选择题也是要求回答一个问题，但是，在提供选择的答案中，正确的不止一个，可能是两个以上甚至全部，所以称之为多重选择题。解答者只有把所有正确的答案都选出来，并把它们填到指定的位置上才算是答题成功，否则都算失败。倘若把这类选择题作为试题，答题成功的给应得分数，失败的则按规定倒扣分数。

多重选择题比单一选择题往往更灵活、更综合，涉及面更宽、更广；解题时，更需要周密分析题目，全面研究答案，尤其还要注意题目中的一些特殊情况和隐蔽条件，否则就容易出差错。

例7 集合 $\{x \mid x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \mid x = k\pi - (-1)^k \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$ 与下面的 () 集合是一样的。

$$(A) \quad \{x \mid x = k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad k \in Z\};$$

$$(B) \quad \{x \mid x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \text{ 或 } x = (2k+1)\pi \pm \frac{\pi}{3}, \\ k \in Z\};$$

$$(C) \quad \{x \mid x = k\pi \pm (-1)^k \frac{\pi}{3}, k \in Z\};$$

$$(D) \quad \{x \mid x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \text{ 或 } x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3} \text{ 或 } x = 2k\pi + \\ + \frac{2\pi}{3}, k \in Z\}.$$

(A)、(B)、(C)、(D)都是正确答案。

例8 已知直角三角形的三条边成等比数列，那么，它的公比可以是（ ）。

$$(A) \quad \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}, \quad (B) \quad \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}},$$

$$(C) \quad \frac{\sqrt{\sqrt{5}+1}}{2}, \quad (D) \quad \frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{2}.$$

(A)、(B)是正确的。

例9 平面上有红点9个，白点5个。若这些点中，有4个红点在一条直线上，其余无三点共线，那么，以相同颜色的点为顶点连成的三角形的个数可以用下面（ ）式子表示。

$$(A) \quad C_6^3 + C_6^3; \quad (B) \quad C_6^3 + 4C_6^3;$$

$$(C) \quad C_6^3 + C_6^3 + C_4^3; \quad (D) \quad C_6^3 + C_6^3 - C_4^3.$$

(B)、(D)是正确答案。

例10 下面几个不等式中，不成立的有（ ）。

$$(A) \quad \sqrt{3} + \sqrt{8} < 1 + \sqrt{10};$$

$$(B) \quad \sqrt{3} + \sqrt{8} > 1 + \sqrt{10};$$

$$(C) \quad \sqrt{2} + \sqrt{7} < \sqrt{3} + \sqrt{6};$$

(D) $\sqrt{2} + \sqrt{7} > \sqrt{3} + \sqrt{6}$;

(E) $\sqrt{3} + \sqrt{6} < \sqrt{5} + 2$;

(F) $\sqrt{3} + \sqrt{6} > \sqrt{5} + 2$.

(A)、(D)、(F)是正确答案。

例11 方程 $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 4$ 的根是 ()。

(A) 2; (B) -2; (C) 4; (D) -4。

正确答案是(A)、(B)。

例12 当 θ 是 () 时, 抛物线 $y = x^2 - 2x\sin\theta + 1$ 的顶点在椭圆 $x^2 + 4y^2 = 1$ 上。($0^\circ < \theta < 360^\circ$)

(A) 60° ; (B) 90° ; (C) 120° ;

(D) 240° ; (E) 270° ; (F) 300° 。

(A)~(F)全部正确。

(三) 选择填空题

选择填空题是单一选择题和多重选择题的进一步发展和综合。这类选择题要求解答的问题不止一个(即“空位”不止一个), 而是多个, 而且这些问题互有关联, 所提供选择的答案往往也比较多, 要求按空位填写答案(每个空位的正确答案可以是一个, 也可以是多个), 故称之为选择填空题。解答者把选择出来的正确答案分别填到指定的空位上, 就算完成了答题。由于这类选择题要求解答的问题有多个, 因此, 它很适合于把复杂的问题或综合的问题分解成若干简单的问题后编制成选择题的情况。在解答选择填空题时, 除了解答正确和解答错误这两种情况外, 还有部分正确, 部分错误。这一点区别于单一选择题和多重选择题。因此, 倘若把它作

为试题，其计分方法也随之不同，一般采取按“空”给分（即按填每一空位的正确与错误给分）。

选择填空题难易程度差别很大，简单的问题可以编成选择题填空题，难度较大的综合题也可以编成选择填空题。一般地说，选择填空题多是系列题、组合题、综合题，要求解答者具有更加全面、细致地分析问题、判断问题的能力。

例13 设平面上有一凸 n 边形，那么，连结凸 n 边形任意两个顶点可以得到（ ）条直线；在这些直线中，有（ ）条是多边形的边所在的直线，有（ ）条是多边形的对角线所在的直线。

- (A) n ; (B) C_n^2 ; (C) $C_n^2 - n$;
(D) $C_n^2 + n$; (E) $C_n^2 + 2n$; (F) $C_n^2 - 2n$ 。

这个选择填空题有三个问题要求解答，其正确答案分别是(B); (A); (C)。它是由“凸 n 边形有几条对角线”的问题分解成的三个小问题组成的，比较简单。

例14 设数列的首项 $a_1 = 3$ ，而且 $S_{n+1} + S_n = 2a_{n+1}$ ，则这个数列的前 n 项和 S_n 是（ ）；从第（ ）项开始是等比数列。

- (A) 1; (B) 2; (C) 3;
(D) 3^n ; (E) 3^{n-1} ; (F) $2 \times 3^{n-1}$ 。

解答这个问题应从分析递推关系式 $S_{n+1} + S_n = 2a_{n+1}$ 入手，得出 $a_{n+2} = 3a_{n+1}$ ，再由条件 $a_1 = 3$ ，得出数列通项公式

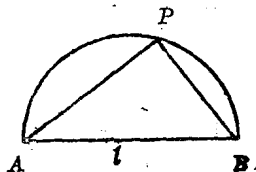
$$a_n = \begin{cases} 3 & \text{当 } n = 1 \text{ 时} \\ 2 \times 3^{n-1} & \text{当 } n \geq 2 \text{ 时} \end{cases}, \text{从而求出它的前 } n \text{ 项和。正确答案分别是(D); (B)。$$

例15 若在以 $AB = l$ 为直径的半圆周上取一点 P ，那么， $AP + BP$ 的最大值是（ ）； $2AP + BP$ 的最大值是（ ）；

3. $AP + 4BP$ 的最大值是 ()。

- (A) $\sqrt{2}l$; (B) $2l$; (C) $\sqrt{5}l$;
(D) $5l$; (E) $2\sqrt{5}l$; (F) $5\sqrt{2}l$ 。

这个选择填空题是个极值问题，可以引入一个参数 $\theta (= \angle BAP)$ ，利用三角函数性质来解它。其正确答案分别是 (A); (C); (D)。

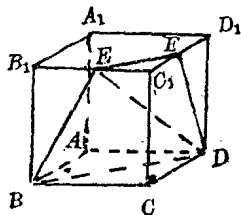


例16 已知点 $P_1(2pt_1^2, 2pt_1)$ 和 $P_2(2pt_2^2, 2pt_2)$ 是抛物线 $y^2 = 2px$ 上任意两点，那么，过 P_1, P_2 两点的直线方程是 ()；过 P_1 点的切线方程是 ()；过 P_1 点的法线方程是 ()。

- (A) $2t_1x + y = 2pt_1 + 4pt_1^3$;
(B) $x + y = 2pt_1t_2$;
(C) $x - (t_1 + t_2)y + 2pt_1t_2 = 0$;
(D) $2t_1y = x + 2pt_1^2$;
(E) $2t_1x + y = 2pt_1^2$ 。

解答这道选择填空题要用到直线的两点式和抛物线的切、法线公式。但是，由于 P_1, P_2 两点的坐标是以参数式形式出现，因此，计算比较复杂，应耐心细致地分析。其正确的答案分别是 (C); (D); (A)。

例17 如图，在棱长是 a 的正方体中，点 E 是棱 B_1C_1 的中点，那么，过 B, E, D 的截面面积是 ()；截面 BED 与底面 $ABCD$ 所成的锐角是 ()。



(A) $\frac{9}{8}a^2$;

(B) $\frac{5}{4}a^2$;

(C) $\frac{7}{6}a^2$;

(D) $\arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

(E) $\arcsin \frac{2\sqrt{2}}{3}$;

(F) $\arctg \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

解答这道选择填空题时，我们可以先作出平面 BED ，然后再研究平面 BED 与棱 C_1D_1 的交点 F 。不难证明， F 点正是 C_1D_1 的中点，可推出截面 $BEFD$ 是等腰梯形。再利用有关定义、公式就可以解出这个问题。正确的答案是(A)；(E)。

例18 有甲、乙、丙、丁、戊五个人排成一列，若甲必须在乙的前面一个，则有()种排法；若甲必须在乙之前，则有()种排法。

(A) 24; (B) 36; (C) 48; (D) 60; (E) 72.

解答这道选择填空题时，我们根据“甲总在乙前面一个”，把甲、乙两个人看作一人，因此不难计算出这种排法共有24种。因为甲在乙前和乙在甲前的情况是均等的，所以甲在乙前的排法是五个人自由排列数的一半即60种。这道选择填空题的正确答案分别是(A)；(D)。

二、数学选择题的主要特点

数学选择题作为一种题型，比如是非题，很早以前就被人们所采用，只是目前采用的选择题无论在形式、种类、适用范围、对知识的覆盖面等方面，都比过去有较大的发展。选择题的大量出现和采用，已充分显示了它所具有的特点和优点，主要的有以下四个方面。

(一) 选择题概念性强, 有利于数学的基本概念和基本规律的教与学

数学选择题具有概念性强和数学意义突出的特点。因此, 把有关基本概念和基本规律的内容编成选择题是相当合适的。如果选取这些选择题作为平时练习题, 则能够培养学生分析问题和判断是非的能力, 从而加深他们对数学概念、规律的认识和理解, 提高他们思维的敏捷性和可靠性。如果选取这些选择题作为试题, 往往量多面广, 这样可以比较客观地考查学生掌握数学基本概念与基本规律的程度和应用知识分析问题与解决问题的能力。在课堂教学中, 如果采用选择题提问, 还能引起学生广泛讨论, 调动学习积极性。无论作为练习题还是讨论题, 都要学生务必准确、熟练地理解、掌握数学的基本概念和基本规律。只有这样才能迅速地作出判断和正确地选出答案。于是, 在解答选择题时, 切不可胡猜、乱套、硬凑和想当然。

例19 已知, 条件甲: 复数 $a+bi$ (其中 $a, b \in R$) 是纯虚数, 条件乙: $a=0$ 。那么, 条件甲和条件乙之间的关系是 ()。

- (A) 甲是乙的必要条件;
- (B) 甲是乙的充分条件;
- (C) 甲是乙的充分必要条件;
- (D) 甲既不是乙的充分条件, 也不是乙的必要条件。

要解答这个问题必须准确地理解两个基本概念: (1) 充分条件与必要条件; (2) 纯虚数。

如果复数 $a+bi$ (其中 $a, b \in R$) 是一个纯虚数, 则应有 $a=0, b \neq 0$ 。现根据条件甲: 复数 $a+bi$ 是一个纯虚数, 即