21世纪高职高专精品教材

高等数学

GAODENGSHUXUE

宋立温　姚艳文　范建华　主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

· 21世纪高职高专精品教材

高 等 数 学

主　编　宋立温　姚艳文　范建华
副主编　刘林平　朱广恩　刘永建
　　　　闫明刚　赵荣凯

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书着重强化微积分学的教学，在教材内容的取舍上注意了“文理兼融”，突出了高职高专理工专业的教学需要。教师可根据专业教学要求对教学内容作适当增删。教材的每一章节配备了丰富的例题和习题，在教学中可根据实际情况进行选择。教材在编写时，注意了数学建模思想的应用，强化了将实际问题变换成数学问题的过程，这也是高职高专的应用数学基础课教学中的一个创新。

本教材力求贯彻“以应用为目的，以必需够用为度”的原则，力求体现基础性、实用性和发展性三个方面需求和谐的统一。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 宋立温，姚艳文，范建华主编 .—北京：北京理工大学出版社，2005.9（2005.10 重印）

21 世纪高职高专精品教材

ISBN 7 – 5640 – 0614 – 5

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①宋…②姚…③范…　Ⅲ. 高等数学—高等学校：技术学校—教材
Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 100480 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /（010）68914775（办公室）　68912824（批销中心）　68911084（读者服务部）
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
电子邮箱 / chiefedit@bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京地质印刷厂
开　　本 / 787 毫米 × 1092 毫米　1/16
印　　张 / 22.75
字　　数 / 512 千字
版　　次 / 2005 年 9 月第 1 版　2005 年 10 月第 2 次印刷
印　　数 / 6001 ~ 9000 册　　责任校对 / 郑兴玉
定　　价 / 36.00 元　　责任印制 / 王　军

前　　言

为了适应高职高专教育发展的需要，培养造就更多的实用型、复合型、创造型人才，中央教育科学研究所高等教育研究中心教材研究部按照教育部对该课程编写大纲的有关要求，组织编写了这本《高等数学》。本书作为“21世纪高职高专精品规划教材，供全国高职高专院校理工、经济专业教学使用。

本教材力求贯彻“以应用为目的，以必需够用为度”的原则，力求体现基础性、实用性和发展性三个方面需求和谐的统一。具体反映在：第一，尊重学科，但不恪守学科性，注重教材自身的系统性、逻辑性，对难度较大的部分基础理论，注意讲清概念，减少理论证明，注重学生基本运算和分析问题、解决问题的能力培养。第二，重视理论联系实际，加强与实际应用联系较多的基础知识和基本方法，体现了学习数学主要要学习数学的思想，即学习怎样将实际问题归结为数学问题。

本书着重强化微积分学的教学，在教材内容的取舍上注意了“文理兼融”，突出了高职高专理工专业的教学需要。教师可根据专业教学要求对教学内容作适当增删。教材的每一章节配备了丰富的例题和习题，在教学中可根据实际情况进行选择。教材在编写时，注意了数学建模思想的应用，强化了将实际问题变换成数学问题的过程，这也是高职高专的应用数学基础课教学中的一个创新。其中许多章节都引用了不少实际问题，注意到理论联系实际。然而限于篇幅，本书不可能囊括各行各业的实际问题，因此教师们在使用时需要挖掘与本专业相关的问题加以补充。

本书是高职高专理工类、经济类专业的通用教材，也可以作为高等函授大学、夜大学、职工大学的学习教材，还可以供各类在职工作人员自学用书。

本书由宋立温、姚艳文、范建华担任主编，刘林平、朱广恩、刘永建、闫明刚、赵荣凯担任副主编。参加本书编写的有（以姓氏笔画为序）：冯源、朱广恩、刘永建、刘林平、刘洪运、闫明刚、李少荣、宋立温、范建华、赵玲、赵荣凯、祝福、姚艳文、高新惠。

这本教材的编写尽管我们作了很大的努力，但限于水平，加之数学教学改革中的一些问题还有待探索，不当之处恳请批评指正。

编　者

2005年7月

目　　录

第1章 函数、极限与连续

函数是数学的基本概念之一，高等数学就是以函数为主要研究对象的一门数学课程.研究函数使用的主要工具是极限，因而极限是贯穿"高等数学"始终的一个重要概念.连续则是函数的一个重要性态，只有掌握好函数与极限的基本知识，才能学好函数的连续性、导数、积分等内容.

本章将在复习和深化函数有关知识的基础上，讨论函数的极限、连续性等问题.

1.1 函 数

1.1.1 函数的概念

1.函数定义

在许多实际问题中，量往往不是孤立地存在着的，一些变量之间相互联系、相互制约，存在着确定的对应关系.我们已经学习过描述两个变量间关系的函数知识，下面用集合的观念再次给出函数的定义.

定义 设 D 是一个由实数组成的集合，如果对属于 D 的每一个数 x，变量 y 按照一定的法则 f 总有惟一确定的数值和它对应，那么 y 就叫做定义在数集 D 上的 x 的函数，记作 $y=f(x)$，x 称为自变量，数集 D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域.

当 x 取 $x_0\in D$ 时，通过对应法则，函数 y 有惟一确定的值 y_0 对应，则称 y_0 为函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的函数值，记作 $y_0=y\Big|_{x=x_0}=f(x_0)$，当 x 取遍 D 中的一切实数值时，与它对应的函数值的集合 $M=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域.

例如，某地区薄钢板材第一年到第八年的消费方程为 $y=150+40x$，其中 y 表示消费量(单位：kt)，x 表示时序数(即第几年).显然 y 是 x 的函数，这个函数的定义域 $D=\{1,2,\cdots,8\}$，对应法则是 $y=150+40x$.

2.函数的记号

y 是 x 的函数，可以记作 $y=f(x)$，也可以记作 $y=\psi(x)$ 或 $y=F(x)$ 等，但同一函数在讨论中应取定一种记法，同一问题中涉及多个函数时，则应取不同的记号分别表示它们各自的对应法则.为方便起见，有时也用记号 $y=y(x)$、$u=u(x)$ 等表示函数.

3.函数的两个要素

函数的两个要素是定义域和对应法则.因此，对于两个函数来说，当且仅当它们的定义域和对应法则都分别相同时，才表示同一函数，而与自变量及因变量用什么字母表示无关，如函数 $y=f(x)$ 也可以用 $y=f(\theta)$ 表示.

正因为如此，我们在给出一个函数时，一般都应标明其定义域，它就是自变量取值的允许

范围.这可由所讨论的问题的实际意义确定,凡未标明实际意义的函数,其定义域是使该式有意义的自变量的取值范围.

由函数的要素知,$y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 就不是相同的函数,而 $w=\sqrt{u}$ 及 $y=\sqrt{x}$ 就是相同的函数.

4.函数的表示方法

函数的具体表达方式是不尽相同的,这就产生了函数的不同表示法.通常有以下三种.

(1)表格法.将自变量的值与对应的函数值列成表格表示两个变量的函数关系的方法,如三角函数表、对数表、企业历年产值表等等,都是以这种方法表示的函数.表格法的优点是所求的函数值容易查得.

(2)图像法.用图像表示两个变量的函数关系的方法.这种方法在工程技术上应用较普遍,图示法的优点是直观形象,且可看到函数的变化趋势.

(3)解析法.以数学式子表示两个变量的函数关系的方法.如 $y=\sin 5x$, $y=\log(x+8)$ 等,解析法的优点是便于理论推导和计算.

以下几种函数也属于用解析法表示的函数关系.

(1)分段函数.在定义域的不同范围内用不同的解析式表示的函数称为分段函数.分段函数在数学上和工程技术上以及日常生活中都会经常遇到.

例1　旅客乘坐火车可免费携带不超过 20 kg 的物品,超过 20 kg 而不超过 50 kg 的部分每 kg 交费 a 元,超过 50 kg 部分每 kg 交费 b 元,求运费与携带物品重量的函数关系.

解　设物品的重量为 x kg,应交运费为 y 元.由题意可知这时应考虑三种情况:

第一种情况是重量不超过 20 kg,这时 $y=0$, $x\in[0,20]$,第二种情况是重量大于 20 kg,但不超过 50 kg,这时 $y=(x-20)a$, $x\in(20,50]$,第三种情况是重量超过 50 kg,这时 $y=(50-20)a+(x-50)b$, $x>50$,因此,所求的函数是一个分段函数.

$$y=\begin{cases}0 & x\in[0,20]\\ a(x-20) & x\in(20,50]\\ a(50-20)+b(x-50) & x>50\end{cases}$$

注意　分段函数仍然是一个函数而不是几个函数.

(2)隐函数.如果自变量与函数的对应关系是用一个方程 $f(x、y)=0$ 确定的,这种函数称为隐函数,例如 $x^2+y^2=r^2$, $x+y=e^{xy}$ 等,相应地,我们将前面讨论的函数称为显函数.

(3)参数方程所确定的函数.在许多实际问题中,变量 x 与 y 之间的函数关系还可以用含某一参数的方程来确定,即

$$\begin{cases}x=\psi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

其中 t 为参数,这种函数称为由参数方程所确定的函数.

5.函数的定义域

在实际问题中,应根据问题的实际意义来确定函数的定义域,当不考虑函数的实际意义,而仅就抽象的解析式来研究函数时,求定义域的一般方法是求出使解析式有意义的自变量的全体,要使解有意义,一般应考虑以下几点:

(1)在分式中,应是分母不为零;

(2)在偶次根式中,被开方数必须为非负数;

(3)在对数式中，真数必须大于零；

(4)幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数考虑各自的定义域；

(5)分段函数的定义域是各个定义区间的并集；

(6)若函数表达式是由几个数学式子组成，则其定义域应取各部分定义域的交集.

例 2　求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x-3}$；　　(2) $y=\lg\dfrac{x-1}{2}+\sqrt{x-3}$.

解　(1)要使函数有意义，必须

$$\begin{cases}4-x^2\neq 0\\ x+3\geqslant 0\end{cases}\qquad \begin{cases}x\neq \pm 2\\ x\geqslant -3\end{cases}$$

所以，函数的定义域为$[-3,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(2)要使函数有意义，必须

$$\begin{cases}x-1>0\\ x-3\geqslant 0\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}x>1\\ x\geqslant 3\end{cases}$$

所以 $x\geqslant 3$，即函数的定义域为$[3,+\infty)$.

例 3　求函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}\quad 及\quad g(x)=\begin{cases}-1 & -1<x<0\\ 2\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x+1 & x>1\end{cases}$$

的定义域，其中 $\operatorname{sgn}x$ 称为符号函数.

分析　$f(x)$与 $g(x)$都是分段函数，它们的图分别如图 1-1 和图 1-2 所示.

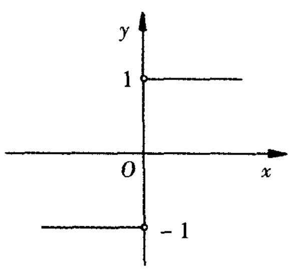

图 1-1

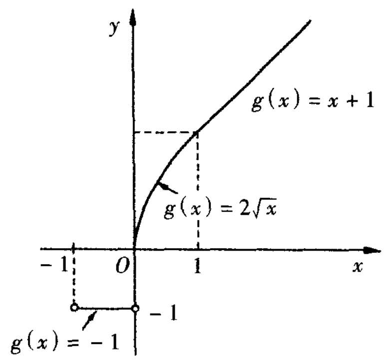

图 1-2

解　分段函数的定义域是各段定义区间的并集，

$f(x)$的定义域是　$(-\infty,0)\cup\{0\}\cup(0,+\infty)=(-\infty,+\infty)$

$g(x)$的定义域是　$(-1,0)\cup[0,1]\cup(1,+\infty)=(-1,+\infty)$

6. 函数值的计算

例 4　设函数$f(x)=x^3-2x+3$，求$f(1)$，$f(-\dfrac{1}{a})$，$f(t^2)$，$[f(b)]^2$，$\dfrac{1}{f(c)}$(其中 $a\neq 0$，$f(c)\neq 0$).

解　$f(1)=1^3-2\times 1+3=2$

$$f(-\frac{1}{a})=(-\frac{1}{a})^3-2(-\frac{1}{a})+3=-\frac{1}{a^3}+\frac{2}{a}+3=\frac{3a^3+2a^2-1}{a^3}$$

$$f(t^2)=(t^2)^3-2(t^2)+3=t^6-2t^2+3$$

$$[f(b)]^2=(b^3-2b+3)^2$$

$$\frac{1}{f(c)}=\frac{1}{c^3-2c+3}$$

例 5 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-2 & -1<x<0\\ 2\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x+1 & x>1\end{cases}$，求 $f(-\frac{1}{2}),f(1),f(3)$.

解 因为 $-\frac{1}{2}\in(-1,0)\quad 1\in[0,1]\quad 3\in(1,+\infty)$

所以 $f(-\frac{1}{2})=-2\quad f(1)=2\sqrt{1}=2\quad f(3)=3+1=4$

注意 在求分段函数的函数值时，应先确定自变量取值的所在范围，再按相应的式子进行计算.

例 6 函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x^2 & -\infty<x\leqslant 0\\ 1 & 0<x\leqslant 2\end{cases}$

为定义在$(-\infty,2]$上的一个分段函数，对于任何一个 $x\in(-\infty,0]$，其函数值以 $\cos x^2$ 计算；对于任何一个 $x\in(0,2]$，其函数值均为 1.

1.1.2 函数的四个主要性质

1.奇偶性

定义 设函数的定义域关于原点对称，如果对于定义域中的任何 x，都有 $f(x)=f(-x)$，则称 $y=f(x)$为偶函数；如果有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$为奇函数.

对于偶函数，因为在 x 和 $-x$ 处对应的函数值是相等的，所以图形关于 y 轴对称.见图 1-3.

对于奇函数，因为在 x 和 $-x$ 处对应的函数值绝对值相等，符号相反，所以图形关于原点对称.见图 1-4.

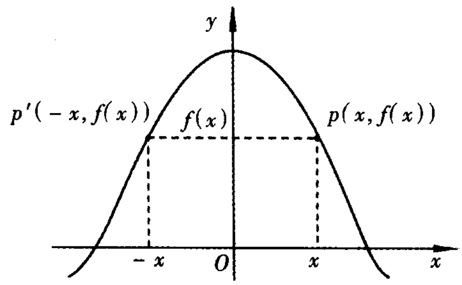

图 1-3

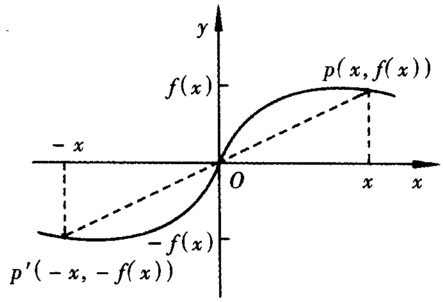

图 1-4

不满足偶函数和奇函数定义的函数叫做非奇非偶函数，如函数 $y=x^2+x+1$，$y=e^x$ 等都是非奇非偶函数，它们的图像关于 y 轴和原点都不对称.

例 7 证明 $f(x)=x^4\sin x^3$ 为奇函数.

证 因为 $f(x)=x^4\sin x^3$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且有

$$f(-x)=(-x)^4\sin(-x)^3=-x^4\sin x^3=-f(x)$$

所以该函数为奇函数.

2.单调性

定义　给定函数 $y=f(x)$,(a,b)是函数定义域内的某一区间,对于区间(a,b)内的任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,如果函数 $y=f(x)$满足$f(x_1)<f(x_2)$则称$f(x)$在区间(a,b)内单调增加或称递增;如果$f(x_1)>f(x_2)$,则称$f(x)$在区间(a,b)内单调减少或递减.例如,$y=\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加;$y=\cot x$ 在$(0,\pi)$内单调减少.

上述定义也适用其他有限区间或无限区间的情形,函数的递增、递减统称为函数是单调的.

从几何直观来看,递增就是当 x 自左向右变化时,函数的图形渐渐上升;递减就是当 x 自左向右变化时,函数的图形渐渐下降.(图 1-5)

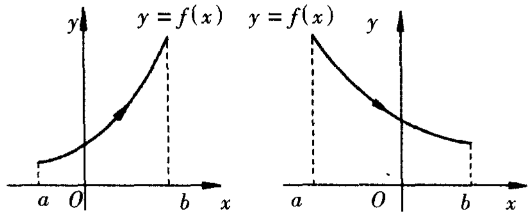

图 1-5

例 8　求证$f(x)=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$内是单调递减的,在区间$(0,+\infty)$内是单调递增的.

证　在$(-\infty,0)$内任取两点 x_1,x_2 且 $x_1<x_2$,

这时 $f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$,其中 $x_1+x_2<0,x_1-x_2<0$,

所以 $x_1^2-x_2^2>0$,即 $f(x_1)-f(x_2)>0$,亦即 $f(x_1)>f(x_2)$,因此 $f(x)=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$内单调递减.

用此类的方法可以证明在区间$(0,+\infty)$内是单调递增的.

在某一区间内单调递增或单调递减的函数都叫做这个区间的单调函数,这个区间叫做此函数的单调区间,上例中区间$(-\infty,0)$,叫做$f(x)=x^2$ 的单调递减区间,而区间$(0,+\infty)$叫做 $f(x)=x^2$ 的单调递增区间.

3.周期性

设函数 $y=f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,若存在正数 T,使得对于定义域内的一切实数 x,都有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称 $y=f(x)$为周期函数.

对于每个周期函数来说,定义中的 T 有无穷多个,因为如果 $f(x+T)=f(x)$,那么就有

$$f(x+2T)=f[(x+T)+T]=f(x+T)=f(x)$$
$$f(x+3T)=f[(x+2T)+T]=f(x+2T)=f(x)$$

等等.

规定　若其中存在一个最小正数 a,则定义 a 为周期函数$f(x)$的最小正周期,简称周期.例如,$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 是周期为 2π 的周期函数,$y=\tan x$,$y=\cot x$ 是周期为 π 的周期函数.

周期函数图像的特点是自变量每增加或减少固定的距离 T 后,图形重复出现.

4.有界性

定义 设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义,若存在一个正数 M,当时 $x\in I$,恒有$|f(x)|\leq M$成立,则称 $f(x)$为遮 I 上的有界函数;如果不存在这样的正数 M,则称 $f(x)$为在 I 上的无界函数.

例如,因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$时,恒有$|\sin x|\leq 1$,所以函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界函数.又如 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$,$f(x)=\arctan x$ 在它们的定义域内是有界的,而 $f(x)=\tan x$ 在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$内是无界函数.

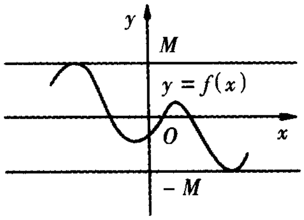

图 1-6

有的函数可能在定义域的某一部分有界,而在另一部分无界.例如,$f(x)=x^3$ 在区间$(1,2)$内是有界的,而在$(-\infty,+\infty)$内是无界的,因此我们说一个函数是有界的或者是无界的,应同时指出其自变量的相应范围.

有界函数的图像全部夹在直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间,如图 1-6.

1.1.3 反函数

定义 设有函数 $y=f(x)$,它们的定义域为 D,值域为 M,若对每一个 $y\in M$ 都可通过关系式$y=f(x)$确定惟一的 $x\in D$ 与之对应,这就是说变量 x 是变量y 的函数.这个以为 y 自变量的函数称为函数$y=f(x)$的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$,其定义域为 M,值域为 D.

由于人们习惯用 x 表示自变量,y 表示函数,为了照顾习惯,我们将函数 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$用 $y=f^{-1}(x)$表示.

我们还知道,函数 $y=f(x)$的图像与它们的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

此外,利用定义还可以证明:若函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内单调递增(或递减),那么它的反函数 $y=f^{-1}(x)$在相应的区间也是单调递增(或递减).

由函数 $y=f(x)$求它的反函数的步骤是:由方程 $y=f(x)$解出 x,得到 $x=f^{-1}(y)$;把函数 $x=f^{-1}(y)$中的 x 和y 分别换成y 和x,这样就得到反函数 $y=f^{-1}(x)$.

例 9 求函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$的反函数.

解 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$可解得 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$,交换 x,y 的位置,即得所求的反函数

$$y=\log_2\frac{x}{1-x} \quad 或 \quad y=\log_2 x-\log_2(1-x)$$

其定义域为$(0,1)$.

应当指出,函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$之间存在着这样的关系:

$$f^{-1}[f(x)]=x \text{ 和 } f[f^{-1}(x)]=x$$

例如,$y=\log_a x$ 的反函数是$y=a^x$,则 $\log_a(a^x)=x$,$a^{\log_a x}=x$.

1.1.4 初等函数

微积分的研究对象,主要为初等函数,而初等函数是由基本初等函数组成的.

1.基本初等函数

常数函数　$y = C$　（C 为常数）

幂函数　$y = x^{\alpha}$　（α 为常数）

指数函数　$y = a^{x}$　（$a > 0$ 且 $a \neq 1$，a 为常数）

对数函数　$y = \log_a x$　（$a > 0$ 且 $a \neq 1$，a 为常数）

三角函数　$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$

反三角函数　$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$

这六种函数统称为基本初等函数.

2.复合函数

某商店经营一种价格允许浮动的商品，那么营业额是价格的函数，而价格又是货源的函数，对于这种在一个变化过程中有着确定对应关系的三个变量，我们有如下的定义：

定义　设 y 是 u 的函数 $y = f(u), u \in B$，而 u 是 x 的函数 $u = \varphi(x), x \in A$，若 $\varphi(x)$ 的值域 $M \subseteq B$，则 y 通过变量 u 成为 x 的函数，这个函数称为由函数 $y = f(u)$ 和函数 $u = \varphi(x)$ 构成的复合函数，简称为 x 的复合函数，记为 $y = f[\varphi(x)]$，其中变量 u 称为中间变量，其定义域为 $D = [x \in A \mid \varphi(x) \in B]$.

例 10　求函数 $y = u^2, u = \cos x$ 构成的复合函数.

解　把 $u = \cos x$ 代入 $y = u^2$ 中，即为所求的复合函数 $y = \cos^2 x$，其定义域为 $(-\infty, +\infty)$，它也是 $u = \sin x$ 的定义域.

例 11　求函数 $y = \sqrt{u}, u = 1 - x^2$ 构成的复合函数.

解　把 $u = 1 - x^2$ 代入 $y = \sqrt{u}$ 中，即为所求的复合函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$，其定义域为 $[-1, 1]$，它只是 $u = 1 - x^2$ 的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 的一部分.

注意　(1)不是任何两个函数都可以合成一个复合函数的.例如，$y = \arccos u$ 与 $u = 3 + x^2$ 就不能复合成一个复合函数；

(2)复合函数也可以由两个以上的函数经过复合构成.例如，由 $y = \ln u, u = \sin v, v = x^5$ 这三个函数可得复合函数 $y = \ln(\sin x^5)$，其中 u 和 v 都是中间变量.

例 12　指出下列复合函数的复合过程：

(1) $y = \sqrt[3]{\sin x^2}$；　　(2) $y = (3x + 5)^{10}$.

解　(1) $y = \sqrt[3]{\sin x^2}$ 是由 $y = \sqrt[3]{u}, u = \sin v$ 和 $v = x^2$ 复合而成的.

(2) $y = (3x + 5)^{10}$ 是由 $y = u^{10}$ 和 $u = 3x + 5$ 复合而成的.

注意　分解复合函数时应把各层函数分解到基本初等函数或基本初等函数及常数经有限次四则运算所构成的函数时为止，我们在后面的学习中常用到分解复合函数，应予以重视.

例 13　设 $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}, \varphi(x) = \sqrt{\sin x}$，求 $f[\varphi(x)], \varphi[f(x)]$.

解　求 $f[\varphi(x)]$ 时，应将 $f(x)$ 中 x 的视为 $\varphi(x)$，因此

$$f[\varphi(x)] = \frac{1}{1 + \varphi(x)} = \frac{1}{1 + \sqrt{\sin x}}$$

求 $\varphi[f(x)]$ 时，应将 $\varphi(x)$ 中的 x 视为 $f(x)$，所以

$$\varphi[f(x)]=\sqrt{\sin[f(x)]}=\sqrt{\sin\frac{1}{1+x}}$$

例 14　设 $f(x)=x^3, g(x)=\ln x$,求 $f[g(x)], g[f(x)], f[f(x)]$.

解

$$f[g(x)]=[g(x)]^3=\ln^3 x$$

$$g[f(x)]=\ln f(x)=\ln x^3=3\ln x$$

$$f[f(x)]=[f(x)]^3=[x^3]^3=x^9$$

3.初等函数

定义　由基本初等函数及常数经过有限四则运算或有限复合步骤所构成,并且可以用一个数学式子表示的函数称为初等函数.

例如,$y=\ln\cos^2 x$, $y=\sqrt[3]{\cot x}$, $y=\dfrac{2x^2-1}{x^2+7}$等都是初等函数.

按初等函数的定义,初等函数须用一个式子表示,如果一个函数必须用几个式子表示时,那么,它就不是初等函数,例如,$g(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2+x & x>1\end{cases}$就不是初等函数.而称为非初等函数.

1.1.5　建立函数关系举例

函数的应用非常广泛,在实际生活和生产中,常遇到量与量之间的函数关系,下面举例说明通过写出函数关系式解决实际问题的一般方法.

例 15　某工厂生产人造钻石,年产量为 x kg,其固定成本为 312 万元,每生产 1 kg 人造钻石,可变成本均匀地增加 50 元,试将总成本 $C_{总}$(单位:元)和平均单位 kg 成本 $C_{均}$(单位:元/kg)表示成产量(单位:kg)的函数.

解　由于总成本 = 固定成本 + 可变成本,平均成本 = 总成本 ÷ 产量,所以

$$C_{总}=3\ 120\ 000+50x$$

$$C_{均}=\frac{3\ 120\ 000+50x}{x}=\frac{3\ 120\ 000}{x}+50$$

例 16　设有一块边长为 a 的正方形薄板,将它的四角减去边长相等的小正方形制作一只无盖盒子,试将盒子的体积表示成小正方形边长的函数(图 1－7).

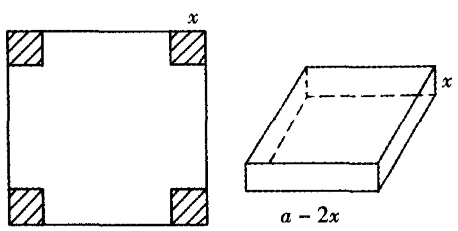

图 1－7

解　设剪去的小正方形的边长为 x,盒子的体积为 V,则盒子的底面积为$(a-2x)^2$,高为 x,因此所求的函数关系为

$$V=x(a-2x)^2,\quad x\in\left(0,\frac{a}{2}\right)$$

例 17　某运输公司规定每吨货物的运费,当运输里程不超过 100 km 时,每 km 运费 5 元,若超过 100 km 时,其超过部分每 km 运费 4 元,求运价与里程的函数关系.

解　设里程为 x,运价为 y,根据题意可列出函数关系如下:

$$y=\begin{cases}5x & 0\leqslant x\leqslant 100\\ 500+4(x-100) & x>100\end{cases}$$

这个分段函数表示了运价和里程的函数关系,定义域为$(0,\infty)$.

这里我们只能介绍一些简单的建立函数关系的例子.在实际问题中建立函数关系的大致步骤如下:

(1)分析出问题中的常量、变量,再进一步分析出变量中的自变量和函数;

(2)把常量、自变量和函数用适当的字母或符号表示出来;

(3)根据所给条件,运用数学、物理或其他知识,确定等量关系;

(4)具体写出解析式 $y=f(x)$,并指明定义域;

(5)应用函数关系,找出实际问题的解.

习　题　1-1

1.求下列函数的定义域:

(1)$y=\dfrac{x^2}{1+x}$;　　(2)$y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

(3)$y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$;　　(4)$y=\arcsin\dfrac{7-x}{4}$;

(5)$y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\lg(5-x)$;　　(6)$y=\lg(x+3)+\arccos(x-1)$.

2.判断下列函数的奇偶性:

(1)$f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$;　　(2)$f(x)=a^x-a^{-x}\quad(a>0)$;

(3)$f(x)=x^3+4$;　　(4)$f(x)=\sin x+\cos x$;

(5)$f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$;　　(6)$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

3.设$f(x)=\dfrac{x}{1-x}$,求$f(-2),f(a),f(a)+1,f(a+1),f[f(x)]$.

4.设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x<0\\ x & 0\leqslant x<1\\ 1 & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$,(1)求$f(-\dfrac{1}{2}),f(0),f(\dfrac{1}{2}),f(2)$;(2)求$f(x)$的定义域.

5.设$f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,求$f(\dfrac{1}{x}),\dfrac{1}{f(x)}$.

6.指出下列复合函数的复合过程:

(1)$y=\cos 5x$;　　(2)$y=\sin^8 x$;　　(3)$y=(2-3x)^{\frac{1}{2}}$;

(4)$y=e^{\sin 3x}$;　　(5)$y=a^{1-x}$;　　(6)$y=\lg(\arctan\sqrt{1+x^2})$.

7.判断下列各对函数中,哪些是同一函数,哪些不是:

(1)$f(x)=(\sqrt{x})^2$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$;　　(2)$f(x)=1$ 与 $g(x)=\cos^2 x+\sin^2 x$;

(3)$f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x+3}$与 $g(x)=x-1$;　　(4)$f(x)=\lg x^3$ 与 $g(x)=3\lg x$.

8.某水果商到西瓜产地收购西瓜,市场行情是每千克0.3元,如果收购数量超过200 kg,那么超过的部分可以6折优惠.

(1)写出收购数量x(千克)与收购款y(元)之间的关系式.

(2)收购150 kg、500 kg各需收购货款多少元?

(3)若收购500 kg时,又以每千克0.50元的价格出售,且每千克需0.02元的运费及税收,问所得纯利润是多少元?

1.2　数列的极限

我们看这样一个问题:对无穷数列$\{a_n\}$,当项数 n 无限增大时,a_n 的变化趋势如何?

先看下面三个数列的变化趋势:

(1) $a_n=\frac{1}{n}:1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots;$

(2) $a_n=\frac{n-1}{n}:0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n-1}{n},\cdots;$

(3) $a_n=(-\frac{1}{2})^n:-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots,(-\frac{1}{2})^n,\cdots.$

为直观起见,我们把这三个数列的前项分别在数轴上表示出来.(图 1－8,图 1－9,图 1－10)

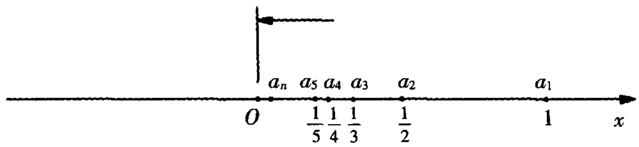

图 1－8

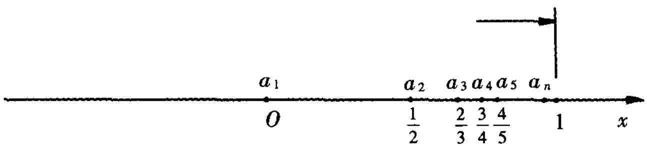

图 1－9

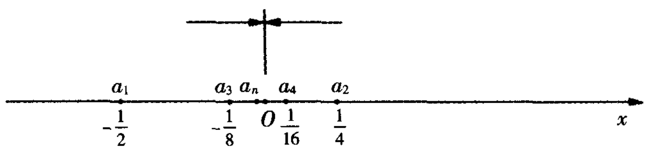

图 1－10

可以看出,随着数列项数逐渐增大,它们有着各自的变化趋势.由图 1－8 可看出,当 n 无限增大时,表示数列 $a_n=\frac{1}{n}$的点逐渐密集在 $x=0$ 的右侧,即数列 $a_n=\frac{1}{n}$从 $x=0$ 的右侧逐渐接近于0;由图 1－9 可看出,当 n 无限增大时,表示数列 $a_n=\frac{n-1}{n}$的点逐渐密集在 $x=1$ 的左侧,即数列 $a_n=\frac{n-1}{n}$从 $x=1$ 的左侧无限接近于 1;由图 1－10 可看出,表示数列 $a_n=(-\frac{1}{2})^n$的点逐渐密集在 $x=0$ 的左右两侧,即数列 $a_n=(-\frac{1}{2})^n$ 从 $x=0$ 的两侧无限接近于 0.

归纳这三个数列的变化趋势可以看出,当项数 n 无限增大时,数列$\{a_n\}$都分别地无限接近于某个确定的常数,对此我们有如下定义.

定义　如果无穷数列$\{a_n\}$的项数 n 无限增大时,a_n 无限地接近于某一个确定的常数 A,那么 A 就称为数列$\{a_n\}$的极限,记作