国家工科数学课程教学基地建设系列教材

# 运筹学及实验

华南理工大学数学科学学院

林健良　编著

华南理工大学出版社

## 内 容 简 介

本书较系统地阐述了运筹学的基本知识，包括了运筹学的最基本内容：线性规划、目标规划、运输模型、整数规划、动态规划、决策与对策、存贮论、排队论、计算机模拟、图与网络规划、非线性规划，此外，为了加强实用性，还有应用案例与相关软件的介绍.

本书主要满足高等学校信息管理类专业本科学生的学习要求，同时兼顾理工科专业，也可作为研究生或 MBA 教材或工程技术人员和管理决策者的参考用书.

**图书在版编目(CIP)数据**

运筹学及实验/林健良编著. —广州：华南理工大学出版社，2005.9
(国家工科数学课程教学基地建设系列教材)
ISBN 7-5623-2270-8

Ⅰ. 运…　Ⅱ. 林…　Ⅲ. 运筹学-高等学校-教材　Ⅳ. O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 092782 号

**总 发 行**：华南理工大学出版社(广州五山华南理工大学 17 号楼，邮编 510640)
发行部电话：020－87113487　87111048(传真)
**E-mail：scut202@scut.edu.cn　　http://www.scutpress.com.cn**
**责任编辑**：赵　鑫
**印 刷 者**：广东省农垦总局印刷厂
**开　　本**：787×960　1/16　**印张**：20.5　**字数**：460 千
**版　　次**：2005 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
**印　　数**：1～1 000 册
**定　　价**：38.00 元(含光盘)

# 总　序

自 1995 年以来，华南理工大学数学科学学院（原应用数学系）的老师们为建设国家工科数学课程教学基地不懈努力，在教育改革中做出了显著的成绩．“国家工科数学课程教学基地建设系列教材”的出版，是教学改革成果的重要部分．

21 世纪是经济全球化、信息化的时代，数学科学在科学技术中占有核心地位，成为直接的生产力．大学数学课程在高等教育中起着关键的作用，对学生素质的提高特别是创新能力的培养起着越来越重要的作用．

提高大学数学的教学质量，是一项艰巨、重要的任务．大学数学的教学，应该使学生在理解数学思想、数学建模和运算能力等方面，得到最基本的训练．为使学生理解数学思想，必须讲清基本概念，并通过必要的逻辑推理训练使学生理解基本概念和基本定理．通过数学建模的学习，学生可以了解数学的来源，并且学会运用数学．运算能力的培养是提高数学素质的基础．当然，这三方面综合能力的培养是一个有机的整体，根据不同专业的要求和学生的实际情况可以有所侧重．

为了适应新形势，本系列教材力求反映数学与其他学科的最新发展，删减过时的内容，介绍各种数学软件的应用，充分使用多媒体等技术．

本系列教材的出版，反映了我院教师多年来教学改革的成果，也吸取了不少兄弟院校同行的宝贵经验．限于我们的水平，其中疏漏在所难免，恳请国内外专家、同行指正．本系列教材的出版得到华南理工大学校领导与华南理工大学出版社的大力支持，特此表示感谢．

华南理工大学数学科学学院

2004 年 8 月

# 前　　言

运筹学是一门定量决策的学科，它研究如何有效地组织和管理好有限的资源，使其能尽量发挥最大的效益．运筹学的各个分支，大都是以实际问题为背景逐渐发展起来的．运筹学的提出问题、探索规律、建立模型和求解最优方案等一系列严密的科学方法和系统化思想，在提高学生的科学素养的教育中起到十分重要的作用．

本书根据编者多年的教学心得整理而成，包含了运筹学的最基本内容：绪论、线性规划与单纯形法、线性规划的相关问题、运输问题、整数线性规划、动态规划、决策与对策、存贮论、排队论、计算机模拟、图与网络规划、非线性规划，此外，还有运筹学应用案例和相关软件介绍．

本书的特点是偏向实用，具体来说，有以下几点：

(1)在介绍运筹学原理与方法的过程中，融入了一些新的方法，如“免人工变量法”，这是编者的研究成果．

(2)除了介绍运筹学的原理与方法，还着重介绍了编者开发的实验软件，让学生在学习原理方法的同时，也掌握实验方法，并亲自动手实验，增加学习兴趣，加深对所学内容的理解．

(3)不只是介绍简单的教学范例，在附录中还介绍了几个来自生产实际的应用案例，以启发学生如何应用运筹学的知识去解决实际问题．

(4)附录中还介绍了与本课程相关的几个应用软件的功能，使学生在实际应用过程中可以相互比较，取长补短．

(5)本书附一张由编者开发的运筹学实验软件光盘．

本书在内容上符合教育部关于运筹学教学的基本要求，主要用于高等学校信息管理类专业本科层次学生的学习，同时兼顾理工科专业，也可作为研究生或MBA教材或工程技术人员和管理决策者的参考用书．学习本书约需72学时，教师可根据专业情况对其内容作适当取舍．

鉴于编者水平有限，书中可能有不妥或错误之处，恳请各位读者赐教．

编　者

2005年5月

# 目　录

# 1 绪　　论

运筹学是利用现代数学成就来研究如何对人力物力进行合理的运用与筹划，使其能发挥出最高效率的一门学科．它是新兴的学科，在军事、工业、农业、商业、运输业、管理技术等方面都有着重要的应用．目前它已成为现代化军事、经济计划、系统工程、现代管理等领域的强有力的工具．

本章首先简要地介绍运筹学的概况，包括运筹学的起源与发展、发展前景、性质与特点以及它所研究的主要内容．然后分别介绍运筹学中线性规划、动态规划和网络规划几个例子的数学模型，使读者对运筹学的应用略见一斑．

## 1.1 运筹学概况

### 1.1.1 运筹学的起源和发展

朴素的运筹学思想在我国古代文献中就有不少记载，例如"齐王赛马"和"丁渭主持修复皇宫"的故事．"齐王赛马"说的是战国时期，一次齐王和田忌赛马，规定双方各出上、中、下三个等级的马各一匹．如果按同等级的马比赛，齐王可获全胜，但田忌采取的策略是以下马对齐王的上马，以上马对齐王的中马，以中马对齐王的下马，结果田忌反以二比一获胜．"丁渭修皇宫"的故事发生在北宋时代，皇宫因失火焚毁，由丁渭主持修复工作．他让人在宫前大街取土烧砖，挖成大沟后灌水成渠，利用水渠运来各种建筑材料，工程完毕后再以废砖乱瓦等填沟修复大街，做到减少和方便运输，加快了工程进度．

在国外，也有许多蕴含运筹学思想和方法的书籍和论文出现．例如，原苏联数学家康托洛维奇的《生产组织与管理中的数学方法》出版于 1939 年；冯·诺伊曼(J. Von Neumann)等所著的《对策论和经济行为》一书出版前所发表的一系列论文在 1928 年就开始刊出；爱尔朗(A. K. Erlang)关于用概率论理论来研究电话服务的论文发表于 1909 年．因此，运筹学的起源还能追溯得更早．

但是，"运筹学"这一名词的使用出现在第二次世界大战期间．以运筹研究命名的、直接为战争服务的、跨学科的研究小组也是在这一时期才出现的．最早是 1938 年出现的、在英国皇家空军战斗指挥部管辖下名为"(军事)行动的研究"小组，其英文是"Operational Research"．继后，美国、加拿大等国也组成一些同名小组进行战术评价、战术改进、作战计划、战略选择等方面的研究，同时也包括如何改进后勤调度和训练计划等方面的研究．这些研究，由于综合地运用了科学方法和技术，纠正了人们一些直观想像的错误，解决了当时战

争中提出的一些新问题,从而引起了人们对运筹学研究的重视. 因此,一般认为,运筹学是起源于第二次世界大战期间的.

战后,运筹学活动扩展到工商部门与政府管理部门. 因此,美、德等国家的运筹学得以蓬勃发展,出现了应用研究和理论研究相互促进的局面. 从应用方面来讲,在工商业管理中的应用是主要的,特别是在美国,管理科学方面的主要内容便是运筹学. 随着工商业规模日益扩大,在历来缺乏严格的科学理论指导、主要凭经验实施的管理工作中,组织跨学科的专业人员组成研究集体,并引进科学的研究方法,这一做法为工商业带来了新的生机和活力. 因此,一些大公司和企业纷纷建立起一些运筹研究小组,后来还出现了一些专门提供咨询服务的研究机构. 在一些国家的政府部门中,除军事方面外,民用部门也建立了许多运筹研究小组. 例如,英国国家煤炭局所辖的运筹研究组在 1947 年煤炭工业国有化后不久就成立了, 1978 年,该组成员发展到 100 多人. 德士古石油公司在德国汉堡的一个分支机构的运筹研究小组也有数十名成员.

从学校教育方面来说,许多大学理学院的数学系及工学院、管理学院、经济学院的许多系中都开设运筹学课程. 在美国,20 世纪 50 年代就有大学设立运筹学系. 近年来,许多西方国家设立了经济与运筹学系或计算机与运筹学系. 在运筹学这一名称下发展起来的学科分支就有很多,如规划论(包括线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划、多目标规划等)、存贮论、网络规划、对策论、决策论和排队论等等.

早在 1952 年,美国就成立了运筹学会,以后世界上许多国家也都逐步成立了运筹学会,并于 1959 年成立了国际运筹学会联盟. 该会的一个主要出版物为《运筹国际文摘》,该文摘对各国 20 多种运筹专刊和近 50 种有关期刊中关于运筹学的理论和应用进行评述. 我国的运筹学会成立于 1980 年,《运筹学杂志》创刊于 1982 年并于 1997 年改名为《运筹学学报》.

### 1.1.2 运筹学的发展前景

从运筹学的发展现状与发展趋势来看,作为一门新兴学科,它在理论上和应用上,无论就广度和深度来说都有着无限广阔的前景.

(1) 运筹学的理论研究将会得到更加深入和系统的发展. 数学规划是 20 世纪 40 年代末期才开始出现的,到了 20 世纪 60 年代,它已形成为应用数学中一个重要的分支. 研究中,出现了各种方法和理论,这自然就要考虑如何把现存的方法和理论统一在某些系统之下来进行研究. 而目前这种由分散到统一、由具体到抽象的系统化过程正在逐步形成.

(2) 运筹学沿着原有的各学科分支发展仍是目前发展的一个重要方面. 例如,在规划论方面,从研究单目标规划到研究多目标规划,从研究静态规划到研究动态规划,从研究短期规划到研究长期规划;在对策论方面,从研究二人对策到研究多人对策等. 这些都是随着人们对事物认识的逐步深入自然延伸的结果.

(3) 运筹学中建立数学模型的思想方法日益受到重视. 运筹学研究工作的一个重要方面是如何把一个实际问题转化成一个数学模型,以便可以用数学方法来解决它. 因此,这方

面的方法与技巧的研究也是十分重要的.

(4) 运筹学渗透到其他学科,并促进其发展.例如,数学规划和网络规划的方法常用于工程的设计和管理、交通的运输与调度,称为“最优化方法”,已成为工程技术中的一个有力的研究工具;存贮论、对策论和排队论也是经济学研究的犀利武器.运筹学应用十分广泛,近年来它正迅速地向一些新的研究领域发展.

(5)运筹学的发展紧密地依赖于计算机的应用和发展.求解来源于实际问题的数学模型时,通常计算量都是很大的.因此,有了存贮量大、计算速度快的计算机,才使得运筹学有广泛的应用,并反过来推动了运筹学的进一步发展.如算法复杂性这个学科就是运筹学与计算机相结合的产物.

虽然运筹学只有约60年的发展历史,但它发展如此之快,运筹学工作者如此之多,都是前所未有的.其主要原因就是它有着极其广泛的应用,在应用过程中,又促使它在理论与方法的研究上有更深入的进展.因此,运筹学这门学科在理论及应用方面,无论就其广度还是深度来说,都有着无限广阔的前景,对于加快我国的现代化经济建设步伐将起到十分重要的作用.

### 1.1.3 运筹学的性质与特点

运筹学是具有众多分支的综合性科学,从其起源与发展过程中可以发现它有以下特点.

(1) 使用数学方法.运筹学是一门以数学为主要研究工具、探索在有限资源条件下的最优方案的学科.随着生产与管理的规模日益庞大,各因素间的数量关系也更加复杂,用数学方法研究各种变量间的规律是运筹学的一大特点.

(2) 强调系统性.运筹学研究问题是从系统的观点出发,研究全局性的问题,研究生产管理的计划、组织、协调、监督和控制过程的优化问题.它是系统工程理论的主要组成部分.

(3) 注重实际应用.运筹学工作者十分注重本学科的理论与方法的研究成果在实际工作中的实施,这也是运筹学研究工作中的一个重要组成部分.

(4) 跨学科性.在运筹学起源的早期,运筹小组就是由有关的各种专家组成的,他们综合应用多种学科的知识,通过集体研究来解决实际问题.这种组织和特点一直在一些地方和一些部门以不同的形式保留下来.这种跨学科的协作形式,往往是研究和解决实际问题所必需的.

(5) 理论和应用的相互促进.运筹学的各个分支,大都是以实际问题为背景逐渐发展起来的.如线性规划模型最初就是在研究生产的组织和计划中出现的,后来 G. B. Dantzig 等人进行了深入的研究使其形成了一套较完整的理论和方法,进而又开拓了线性规划的应用范围,并相继出现了一批职业的线性规划工作者.由于他们从事了大量的实践活动,反过来又进一步促进了线性规划求解算法的研究,从而又出现了椭球法、内点法等新的解线性规划的方法.这些算法又在实际中得以应用而产生效益,形成良性循环.

### 1.1.4 运筹学的主要内容

运筹学的发展虽然只有短短几十年的历史，但由于它涉及面广，应用范围大，故已形成一门内容相当丰富的学科. 它的主要内容一般应包含线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划、多目标规划、存贮论、网络规划、对策论、决策论和排队论等等. 其中每一个分支都有丰富的内容.

规划论部分是运筹学的重要组成部分，它们主要解决两个方面的问题：一方面是对于给定的有限资源，怎样充分利用才能发挥它们的最大效益；另一方面是对于给定要完成的任务，怎样才能最节省资源.

在生产或消费过程中，我们都必须储备一定数量的原材料、半成品或商品. 但存贮量要恰当：存贮少了会因停工待料或失去销售机会而遭受损失，存贮多了又会发生资金积压、原材料及商品损耗、费用增加等问题. 因此，如何确定合理的存贮量、购货批量和购货周期至关重要，这便是存贮论要解决的问题.

网络规划主要是研究解决生产组织、计划管理中诸如最小生成树、最短路径、最小费用流等问题. 在较大型的复杂工程管理上，网络规划技术尤其显得重要.

排队现象在日常生活中屡见不鲜，如机器等待修理、船舶等待装卸、顾客等待服务等. 它们有一个共同的问题，就是如果等待时间长了，会影响生产任务的完成，或者顾客会自动离去而影响经济效益；如果增加服务设施，又可能会提高成本，同样影响经济效益. 排队论的任务就是要研究如何妥善解决这类问题.

面对具有利害冲突的各方，如何制定出对自己最有利的竞争策略，这是对策论研究的任务. 战国时期“齐王赛马”的故事便是对策论的一个经典例子.

当决策者欲实现某个目标时，可能面临多种情况，而又有多个行动方案可供选择. 这时决策者可能会觉得不知所措，那么，他该如何从中选择一个最优方案，才能达到他的预期目标，这是决策论的研究任务.

## 1.2 运筹学的数学模型举例

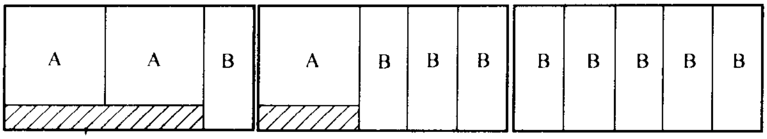
运筹学所研究的数学模型，一般是由字母、数字和运算符号组成的，它将一个系统或过程通过抽象、简化后，把其某些特征及数量指标的相互关系表达出来. 它试图精确地和定量地表示系统的各种数量关系. 下面就介绍几个常用的运筹学数学模型.

### 1.2.1 线性规划模型

**例 1-1** 现要用规格为 $100\times50(\mathrm{cm}^2)$的原材料裁剪出规格分别为 $40\times40\ (\mathrm{cm}^2)$与 $50\times20(\mathrm{cm}^2)$的两种零件，前者需要 25 件，后者需要 32 件. 问如何裁剪，才能最省料？

**解** 为方便起见，把规格为 $40\times40\ (\mathrm{cm}^2)$与 $50\times20(\mathrm{cm}^2)$的两种零件分别称为零件 A

与零件 B. 先设计几个裁剪方案,如图 1-1 所示.



(a) 方案1 (b) 方案2 (c) 方案3

图 1-1

显然,若只用其中一个方案,都不是最省料的方法. 最佳方法应是多个方案的组合. 设方案 $i$ 使用原材料 $x_i$ 件($i=1,2,3$),共用原材料 $f$ 件. 则根据题意,可得如下数学模型:

$$\min f = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geqslant 25 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geqslant 32. \\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,3) \end{cases}$$

**表 1-1**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 |
| $x_2$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| $x_3$ | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

这是一个线性规划模型,其中 $\min f$ 表示对 $f$ 求最小值. 当然,更严格一点讲,各个变量还应要求是整数,故它是一个整数线性规划模型. 我们指出,最优解有 5 个,如表 1-1 所示,最优值 $\min f=17$.

### 1.2.2 动态规划模型

**例 1-2** 设某公司对某种产品要制定 $n$ 个阶段的生产计划,要求初始库存量和第 $n$ 阶段末库存量为 0,每阶段生产的产品最多为 $m$ 单位,单位成本为 $a$,而生产每批产品的固定成本为 $F$,第 $k$ 阶段产品需求量为 $d_k$,在每一阶段结束时剩余产品每单位存贮费为 $h$,试制定生产计划使总成本最小.

**解** 这是一个多阶段决策问题,可建立一个动态规划模型来描述它.

用第 $k$ 阶段的产量 $x_k$ 作为决策变量,第 $k$ 阶段初产品库存量 $v_k$ 作为状态变量,则状态转移方程为

$$v_{k+1} = v_k + x_k - d_k.$$

若设生产数量为 $x_k$ 的产品的成本是 $C_k(x_k)$,则有

$$C_k(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x_k = 0 \\ F + ax_k & \text{当 } 0 < x_k \leqslant m. \\ \infty & \text{当 } x_k > m \end{cases}$$

指标函数 $f_k(v_k)$ 表示当第 $k$ 阶段初产品库存量为 $v_k$ 时,今后各阶段采取最优计划时的成本,所以有递推关系

$$f_k(v_k) = \min_{x_k}\{C_k(x_k) + hv_k + f_{k+1}(v_{k+1})\},$$

当然 $f_{n+1}(v_{n+1})=0$. 这是一个动态规划模型.

### 1.2.3 网络规划模型

**例 1-3** 某厂使用一种设备,每年年初设备科需对该设备的更新与否作出决策.若购置新设备,就要支付一定的更新费(新设备的购置费 - 旧设备的残值);若继续使用旧设备,则需支付一定的维修费,设备使用的年数越长,每年所需的维修费就越大. 若第 1 年年初购置了一台新设备,问应如何制定一个设备更新计划,以便在使用一台这种设备 5 年内总费用(更新费 + 维修费)最小?

**解** 设该设备在 5 年内第 $i$ 年的更新费为

$$a_1=a_2=11,\quad a_3=a_4=12,\quad a_5=13.$$

设备使用不同年数的维修费如表 1-2 所示.

**表 1-2**

| 使用年数 | (0,1] | (1,2] | (2,3] | (3,4] | (4,5] |
|---|---|---|---|---|---|
| 维修费 | $b_1=5$ | $b_2=6$ | $b_3=8$ | $b_4=11$ | $b_5=18$ |

建立网络模型如图 1-2 所示,其中顶点集

$$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\},$$

有向边集

$$E=\{(v_i,v_j)\mid i<j,i=1\sim5,j=1\sim6\}.$$

在此,$v_1,v_2,\cdots,v_5$ 对应第 1,2,⋯,5 年的年初,$v_6$ 对应第 5 年年末.有向边$(v_i,v_j)$表示第 $i$ 年年初购买一台设备一直用到第$j-1$ 年年末. 显然,对于每一种可能的设备更新方案,在图 1-2 中都有相应的一条从 $v_1$ 到 $v_6$ 的路.例如,路 $v_1\to v_3\to v_5\to v_6$ 表示第 1,3,5 年年初购买新设备这一方案.

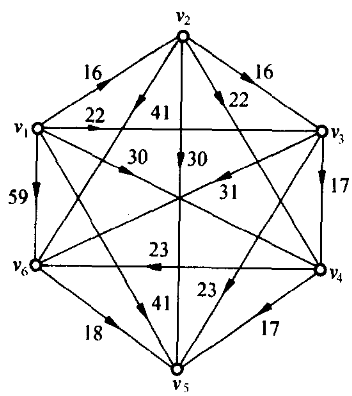


图 1-2

网络的权可按如下法则给出:

$$w_{ij}=w(v_i,v_j)=a_i+b_1+b_2+\cdots+b_{j-i}.$$

例如,边$(v_2,v_5)$表示第 2 年年初购买一台新设备,使用至第 4 年年底,相应的购买费为 11,维修费为 5+6+8=19,于是,边$(v_2,v_5)$上的权 $w_{25}=11+19=30$.

这样,制定一个最优的设备更新方案就等价于寻求图 1-2 中 $v_1$ 至 $v_6$ 的最短路问题.由相关算法可求得 $v_1$ 至 $v_6$ 的最短路为 $v_1\to v_3\to v_6$,即第 1,3 年购买新设备;或者 $v_1\to v_4\to v_6$,即第 1,4 年购买新设备.两个方案 5 年的总费用都为 53.

## 1.3 运筹学实验软件的安装

运筹学实验软件是我们集多年的教学经验积累和编程技巧为一体的软件,对辅助教学、提高学生学习兴趣、培养学生解决问题能力都有很大的帮助.

运行文件 OR _ CAI \ websetup \ setup. exe, 得如图 1 - 3 所示界面.

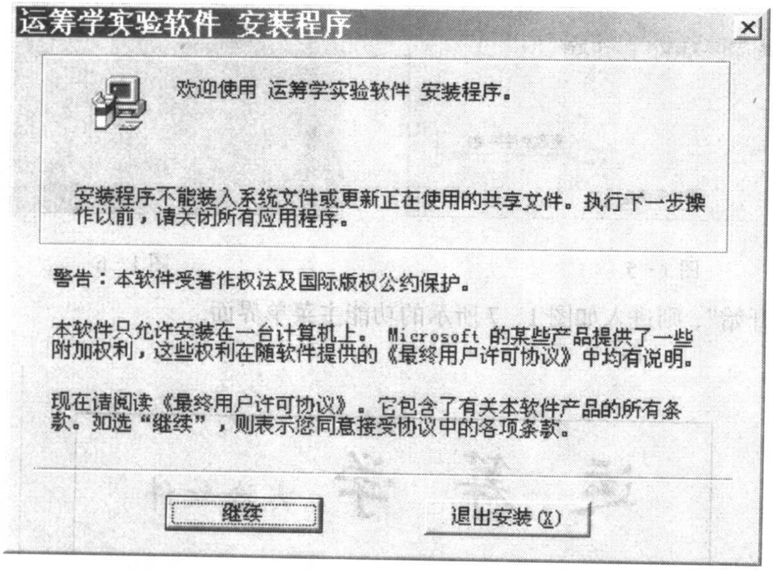



图 1 - 3

填写“姓名”与“单位”,界面如图 1 - 4 所示.

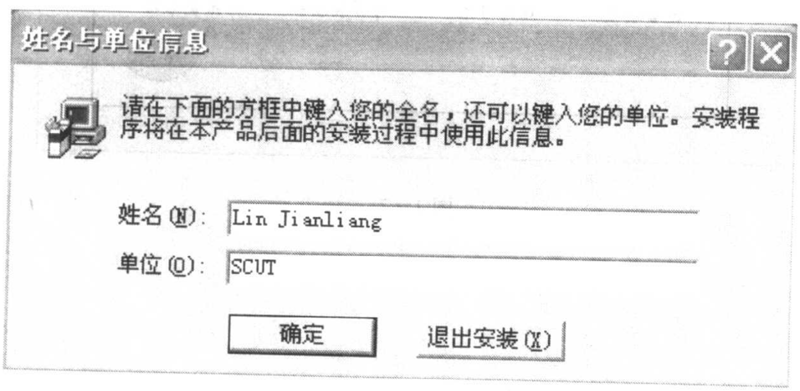



图 1 - 4

前面是安装的准备工作，开始安装界面如图 1－5 所示，文件夹默认值为 C:\OR_CAI，可以按需要更改. 单击左侧的大按钮开始安装.

安装完成后，运行在安装目录下的 OR_CAI.EXE 文件进入本软件的主界面，如图 1－6所示.

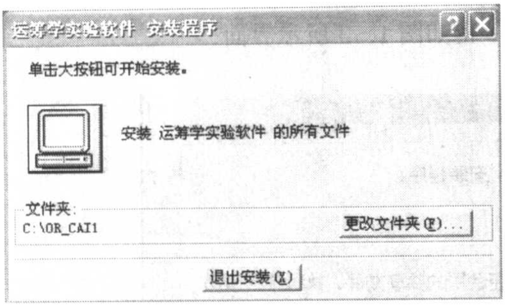



图 1－5


图 1－6

若点击“开始”，则进入如图 1－7 所示的功能主菜单界面.

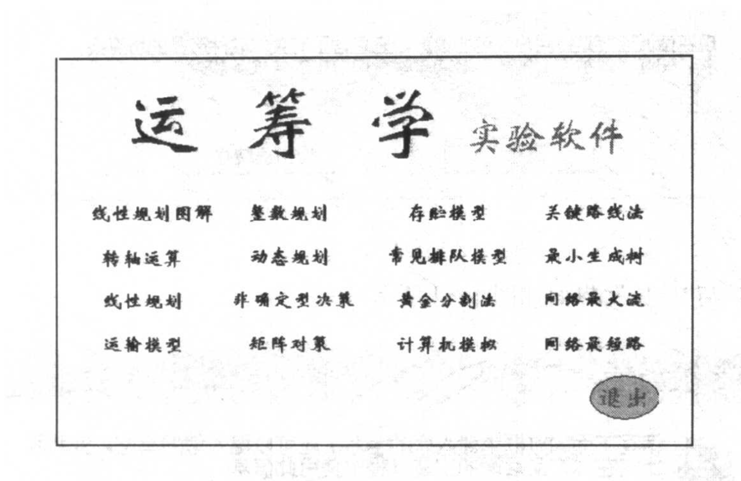



图 1－7

# 2 线性规划与单纯形法

线性规划(Linear Programming,LP)是运筹学的一个基本分支,其理论和方法比较成熟,应用非常广泛.借助越来越普及的计算机及其日益先进的计算机技术,它能更加快捷地渗透于军事、科研、工农业和商业等各个领域,为国民经济创造了十分可观的经济效益和社会效益.

本章通过几个简单的例子,归纳出线性规划模型的一般形式,介绍相关的一些基本概念、基本理论及求解线性规划模型的基本方法.

## 2.1 线性规划模型及其基本概念

### 2.1.1 线性规划模型

在经济活动和企业管理中,通常要考虑对有限的资源进行合理的分配,以期望获取最大的经济效益.以下是几个例子.

**例 2-1(生产计划问题)** 某厂生产 A,B,C 三种产品,每种产品生产需经过三道工序:零件加工、电镀和装配.根据现有的生产条件,可确定各工序的有效工时、耗用工时及利润如表 2-1 所示.试问应如何安排各种产品的周产量,才能获得最大利润?(每种生产方案由产品 A,B,C 的产量确定.)

表 2-1

| 工 序 | 单位产品耗用工时 | | | 每周有效工时 |
|---|---|---|---|---|
| | A | B | C | |
| 零件加工 | 1.1 | 1.2 | 1.4 | 4 600 |
| 电镀 | 0.5 | 0.6 | 0.6 | 2 100 |
| 装配 | 0.7 | 0.8 | 0.6 | 2 500 |
| 每件利润/元 | 12 | 14 | 8 | |

**解** 设 $x_1,x_2,x_3$ 分别表示产品 A,B,C 的周产量(件/周),$f$ 表示每周获利,则根据题目的意思,$f$ 可以表示为

$$f=12x_1+14x_2+8x_3.$$

希望在一定条件下 $f$ 达到最大,但 $x_1,x_2,x_3$ 受到一定的限制.生产 $x_1$ 件产品 A 所需

零件加工工时为 $1.1x_1$，生产 $x_2$ 件产品B所需零件加工工时为 $1.2x_2$，生产 $x_3$ 件产品C所需零件加工工时为 $1.4x_3$，且零件加工工序每周不能超过4 600工时，因此，变量 $x_1,x_2,x_3$ 应满足条件：

$$1.1x_1+1.2x_2+1.4x_3\leqslant 4\,600.$$

同理，分析电镀与装配两道工序的情况，可知变量 $x_1,x_2,x_3$ 还应满足条件：

$$0.5x_1+0.6x_2+0.6x_3\leqslant 2\,100,$$
$$0.7x_1+0.8x_2+0.6x_3\leqslant 2\,500.$$

当然，变量 $x_1,x_2,x_3$ 只能取非负值，故有

$$x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0,\quad x_3\geqslant 0$$

（注：这里暂且忽略决策变量整数的要求.）

综上所述，本问题可表示为下列数学模型：

$$\max f = 12x_1 + 14x_2 + 8x_3 \tag{2-1}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}1.1x_1 + 1.2x_2 + 1.4x_3 \leqslant 4\,600\\0.5x_1 + 0.6x_2 + 0.6x_3 \leqslant 2\,100\\0.7x_1 + 0.8x_2 + 0.6x_3 \leqslant 2\,500\\x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0\end{cases}. \tag{2-2}$$

上述数学模型由三个要素组成：①变量 $x_1,x_2,x_3$，或称决策变量，是问题中要确定的未知量，用以表明问题的方案、措施，可由决策者决定和控制；②目标函数(2-1)，是决策变量的函数，按优化目标在这个函数前加上 max 或 min，分别表示最大化与最小化；③约束条件(2-2)，指决策变量取值时受到的各种资源条件的限制，通常表达为含决策变量的等式或不等式，前面的“s.t.”是“subject to”的简写.

如果问题的数学模型中，决策变量的取值可以是连续的，目标函数是决策变量的线性函数，约束条件是决策变量的线性等式或不等式，则该类问题的数学模型称为**线性规划**.

实际问题中线性的含义：一是严格的比例性，如生产某产品对资源的消耗量和可获取的利润，同其生产数量严格成比例；二是可叠加性，如生产多种产品对某项资源的消耗量应等于各产品对该项资源的消耗量的和.

**例 2-2(运输问题)** 现要从两个仓库(发点)运送库存原棉来满足三个纺织厂(收点)的需要，每吨运费、需求量和库存量的数据如表 2-2 所示.试问在保证各纺织厂的需求都得到满足的条件下应采取哪种运输方案，才能使总运费达到最小？(每个运输方案由各仓库到各纺织厂的运输量确定.)