新世纪大学数学立体化系列教材

总主编　于义良

微积分名师导学

主　编　张银生　安建业

中国人民大学出版社

新世纪大学数学立体化系列教材

总主编　于义良

微积分名师导学

主　编　张银生　安建业
副主编　李美凤　王全文

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分名师导学/张银生,安建业主编.
北京:中国人民大学出版社,2004
(新世纪大学数学立体化系列教材)

ISBN 7-300-05890-6/O·64
Ⅰ.微…
Ⅱ.①张…②安…
Ⅲ.微积分-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 087711 号

新世纪大学数学立体化系列教材
总主编　于义良
微积分名师导学
主　编　张银生　安建业
副主编　李美凤　王全文

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　话	010-62511242(总编室)		010-62511239(出版部)
	010-82501766(邮购部)		010-62514148(门市部)
	010-62515195(发行公司)		010-62515275(盗版举报)
网　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　销	新华书店		
印　刷	北京东方圣雅印刷有限公司		
开　本	787×965 毫米 1/16	版　次	2004 年 10 月第 1 版
印　张	25	印　次	2004 年 10 月第 1 次印刷
字　数	454 000	定　价	28.00 元

“新世纪大学数学立体化系列教材”编委会

总　序

随着科学技术的迅猛发展，数量分析已渗透到各个领域，数学的重要性已被整个社会所公认；由于计算机技术的广泛普及与提高，许多繁难的计算和抽象的推理已不再是高不可攀，数学的应用越来越深入；随着人类素质的不断提高，数学素质教育已成为全体公民的必修课，数学的普及越来越广泛。为适应新形势的发展和社会的需要，信息技术与学科课程整合已是教育教学改革的“重中之重”，运用信息技术改造和优化传统学科内容是培养新世纪具有创新能力的高素质人才的必然要求。经过多年的教学研究和实践，我们组织了具有丰富教学经验的第一线教师，编写了这套“新世纪大学数学立体化系列教材”，奉献给大家。

这套系列教材是“21 世纪初天津市普通高校教学改革项目《信息技术与经济数学课程整合的研究和实践》”成果的延伸，包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《数学建模》、《运筹学》五本教材和《微积分名师导学》、《线性代数名师导学》、《概率论与数理统计名师导学》三本教学指导书。这套教材力求体现如下特点：

第一，以实用为原则，“教、学、做”融为一体，内容体系整体优化，使读者实现由知识向能力的转化。

第二，以实际为背景，概念阐述简明、通俗化，举例贴近

生活，运用多媒体技术使内容直观化、图形化，使读者消除对数学的陌生感、抽象感、恐惧感，激活求知欲，增强学好数学、做好数学的信心。

第三，以计算机为工具，传统内容与信息技术应用融为一体，注重基本知识、基本思想、基本能力的培养，对繁、难、抽象的内容，充分利用当前极为流行的 Mathematica 软件、Excel 软件来实现，比如函数图形描绘、矩阵计算、数据分析等。

第四，每册教材均配有多媒体助学助教光盘，包括课程要求、电子教案、模拟演示、练习详解、单元测试、实例选编、试题分析、名人简介等众多模块，信息量大，使用方便，便于读者更好地理解、掌握、巩固所学知识，并有助于及时检测和提高。

总之，这套系列教材配有光盘，方便教学，信息量大；融入软件，突出技能，实用性强。内容可视化，你不会再为抽象而烦恼；计算软件化，你不会再为繁难而困扰；方法现实化，你不会再因无用而厌学。

2003 年冬季，我有幸到澳大利亚 La Trobe 大学学习考察，亲身经历了国外大学数学教育对学生能力、素质培养的实践，它们特别重视数学思想的熏陶和数学知识的应用，“做中学、学中悟、悟中醒、醒中行”做得非常出色。让我们可喜的是即将出版的这套系列教材恰好在这方面做了有益的尝试。

我们期盼这套系列教材能为广大读者带来学数学的轻松、做数学的快乐和用数学的效益。

“新世纪大学数学立体化系列教材”编委会主任、总主编　于义良

2004 年 3 月

前　言

学校要以学生为本,给每个学生提供优质教育资源是每个教育工作者义不容辞的职责。为了提高服务意识,帮助学生学好大学数学中微积分这门重要基础课,我们在多年教学研究与实践的基础上,总结编写了这本《微积分名师导学》,旨在教给学生学习、掌握新知识的思路和方法,激活求知欲,启迪悟性,挖掘潜能,使每个学生尽快成为微积分这门科学的实践者。

《微积分名师导学》的结构:

章、节序号与同系列教材中的《微积分》一致,每章均提出学习目标要求,每节均由知识梳理、易错提示、范例点拨、学做检测、参考答案五部分组成。

《微积分名师导学》的特点:

1. 每章学习目标明确,便于学生分清主次,突出重点。

2. 每节基本知识表格化梳理,便于学生一览全局,掌握内容体系。

3. 每节针对学生易犯错误编写了易错提示,便于学生明确知识点间的联系与区别。

4. 每节范例点拨注意阐述解题思路,尽量提供一题多解方法,便于学生很快掌握解题要领,开拓思路,提高创新能力。

5. 每节针对基础知识理解和基本技能训练均配有学做检测，题型全面，内容丰富，便于学生通过实践，亲手做数学，检测自己对知识的理解掌握程度。

学做检测是一个应用创新的过程，是培养学生综合能力、应用创新能力的手段，给予学生锻炼能力的机会。学做检测分 A、B 两类：A 类侧重于对知识点的涵盖，侧重于对基础知识、基本技能的考察，侧重对重点知识的突出。旨在让学生通过对 A 类题目的解答，夯实基础知识，提高基本技能，确保重点知识的过关。相比之下，B 类则比 A 类跃升了一个层次，它侧重对综合能力和应用创新能力的考察。突出综合知识的应用和综合能力的体现，突出创新思维空间的开发。旨在让学生通过对 B 类题目的解答，使其综合运用知识的能力、联系实际解决具体问题的能力、创新能力得到运用、提高和增强。先做 A 类，再做 B 类，由浅入深，由基础知识到应用创新，这给学生以厚积薄发的机会，给学生综合素质的提升搭建了一个攀升的阶梯。两类题目在内容设计上，尽量给学生提供了一个“联系实际、注重应用、自主探究、引导创新”的空间，让学生在宽松自如的情境下独立地完成。这不仅有利于对教学效果的真实检测，更重要的是让学生的综合能力、应用创新能力在做数学的过程中得到潜滋暗长。

6. 每节学做检测均配有参考答案，便于学生及时反馈信息，进行总结提高。

参加《微积分名师导学》编著的是天津市首届(2003)高等学校教学名师、天津商学院应用数学科学系教授于义良，天津商学院应用数学科学系副教授张银生，天津商学院优秀教师、多媒体课件一等奖获得者应用数学科学系副教授安建业，天津市青年教师教学基本功竞赛二等奖获得者应

用数学科学系讲师李美凤，天津商学院优秀教学质量奖获得者应用数学科学系讲师王全文，湖南商学院信息系龙建新、肖晴初、段玉以及天津商学院继续教育学院李爱玲。

在编写过程中，得到了天津市教委高教处、天津商学院院领导、天津商学院教务处、天津商学院教材中心、湖南商学院、上海水产大学、天津理工学院、天津职业技术师范学院、天津科技大学、山西大学工程学院、运城学院和中国人民大学出版社等单位的大力支持和鼓励，在此一并表示最衷心的感谢。

限于编著者的水平，书中若有不当之处，敬请读者批评雅正，以期不断修改与完善。

编著者

2004 年 6 月 18 日

目 录

第 1 章

函数与极限

您学了本章之后，应该能够做到：

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

2. 了解二元函数的概念及其几何意义，熟悉几种常见的二元函数的图形.

3. 掌握基本初等函数的性质及图形，理解复合函数、反函数、隐函数和分段函数的概念，了解初等函数的概念.

4. 会建立简单应用问题中的函数关系式.

5. 了解数列极限和函数极限（包括左、右极限）的概念；直观上能描述极限过程的几种常见形式，了解极限的几个基本性质.

6. 理解无穷小的概念及其基本性质，掌握无穷小的比较方法，了解无穷大的概念及其与无穷小的关系.

7. 了解极限存在的两个准则，掌握极限的四则运算法则，会应用两个重要的极限.

8. 理解函数连续性的概念（包括左连续和右连续），会判别函数间断点的类型（可去间断点和不可去间断点）.

9. 理解闭区间上连续函数的性质（有界性，最值定理，介值定理）及其应用.

10. 了解二元函数的极限和连续的直观意义.

11. 会利用 Mathematica 进行有关函数和极限的计算及简单函数的绘图.

第 1.1 节　函数及其基本性质

知识梳理

	内　容
函数定义	设有两个非空的集合 D_f 和 R，其中 $D_f \subseteq R$，R 是实数集. 称映射 $f: D_f \to R$. 为 D_f 到 R 的函数，通常记作 $y = f(x)$，并称 y 是 x 的函数，其中 x 称为自变量，$x \in D_f$；y 称为因变量，$y \in R$；f 称为对应法则. D_f 称为函数 f 的定义域；集合 $Z_f = \{f(x) \mid x \in D_f\}$ 称为函数 f 的值域，$Z_f \subseteq R$.
基本性质	(1) 单调性　设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，对于任意的 $x_1, x_2 \in D$，且 $x_1 < x_2$， 1) 若 $f(x_1) < f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加； 2) 若 $f(x_1) > f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调减少. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数，使函数 $f(x)$ 单调的区间称单调区间. (2) 奇偶性　设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，对于任意的 $x \in D$，若恒有 1) $f(-x) = f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为 D 上的偶函数； 2) $f(-x) = -f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为 D 上的奇函数. (3) 周期性　设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，如果存在常数 $a > 0$，使对于任意的 $x \in D$，恒有 $f(x+a) = f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为周期函数. 满足上式的最小的正数 a，称为 $f(x)$ 的周期. (4) 有界性　设函数 $f(x)$ 在区间 D 上有定义，如果存在常数 M，使得对任意的 $x \in D$，恒有 1) $\mid f(x) \mid < M$（此时 $M > 0$），则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界；否则称函数 $f(x)$ 在 D 上无界. 2) $f(x) < M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有上界. 3) $f(x) > M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有下界.

易错提示

1. 函数记号 $y = f(x)$ 中的 $f(\quad)$ 有着广泛的涵义，不能仅认为它只表示某个数学表达式. 它可以表示成一个或几个数学表达式，也可以表示为一个图形、一张表格或一段话. 不能把 $f(x)$ 看作 f 乘以 x.

2. 确定一个函数的基本要素有两个：定义域和对应法则. 当两个函数的对应法则和定义域相同时，即使变量与对应法则使用的符号不同，实际

上也是同一个函数. 例如,$f(x)=\ln|x|$ 与 $g(t)=\dfrac{1}{2}\ln t^2$ 是同一函数.

3. 函数的单调性与有界性都与所讨论的区间有关. 具有奇偶性的函数的定义域关于原点对称. 周期函数中的周期与自变量无关.

范例点拨

例 1　画出以下问题的合理图像,并解释理由.

(1) 办公室中一杯刚烧开的水的温度作为时间函数的图像.

(2) 一家电视机销售商店的年收入关于广告费用的图像.

解　(1) 刚烧开的水的温度为 100℃. 开始时,温度下降快. 随着与室温(25℃) 逐渐接近, 温度下降越来越慢, 最后趋于室温(25℃). 见图 1.1.1.

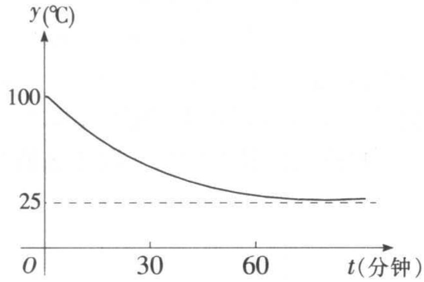

图 1.1.1

(2) 开始时,年收入随着广告费用的增加而快速增长. 随着人们对该商品认识越来越广泛,需求量逐渐趋于稳定,年收入增长的速度越来越慢,最后年收入趋于一个常数 y_1. 见图 1.1.2.

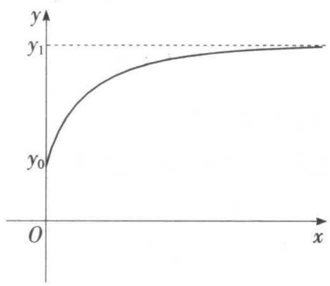

图 1.1.2

注　年收入关于广告费用的图像还有其他情形,读者试给出.

例 2 某工厂生产某产品年产量为 x 台，每台售价为 250 元. 当年产量在 600 台以内时，可以全部售出. 经广告宣传后又可再多出售 200 台，每年平均广告费 20 元，若生产再多，本年就销售不出去了. 试建立本年的销售总收入 R 与年产量 x 的关系.

解 总收入 = 产量 × 单价；根据题意可列出函数关系如下：

$$R(x)=\begin{cases}250x, & 0\leqslant x\leqslant 600\\ 250\times 600+(250-20)(x-600), & 600<x\leqslant 800\\ 250\times 600+230\times 200, & x>800\end{cases}$$

例 3 已知某厂生产单位产品时，可变成本为 15 元，每天的固定成本为 2000 元，如这种产品出厂价为 20 元，求

(1) 利润函数；(2) 若不亏本，该厂每天至少生产多少单位这种产品.

解 (1) 因为 $L(x)=R(x)-C(x)$，$C(x)=2\,000+15x$，$R(x)=20x$，则 $L(x)=20x-(2\,000+15x)=5x-2\,000$

(2) 当 $L(x)=0$ 时不亏本，于是有 $5x-2\,000=0$，得 $x=400$(单位).

例 4 图中给出了 $y=f(x)$ 的图像(见图 1.1.3)，试问：(1) $f(x)$ 的定义域是什么？(2) $f(x)$ 的值域是什么？(3) y 取什么值恰能与 x 的一个值对应？

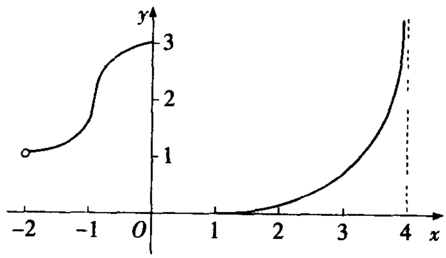

图 1.1.3

解 从图像中观察，可以得出：

(1) $f(x)$ 的定义域：$D_f=(-2,0]\cup[1,4)$

(2) $f(x)$ 的值域：$Z_f=[0,+\infty)$

(3) 当 $y\in[0,1]\cup(3,+\infty)$ 时，y 恰能与 x 的一个值对应.

例 5 求下列函数的定义域.

(1) $y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}$，(2) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$，(3) $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$

(4) $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 3\\ x-2, & x>3\end{cases}$,求 $f(x+1)$ 的定义域.

(5) 已知 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$,若 $0<a<\dfrac{1}{5}$,求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域.

解　(1) 当 $\left|\dfrac{x-2}{3}\right|\leqslant 1$ 时函数有定义,即:$-1\leqslant\dfrac{x-2}{3}\leqslant 1$. 解得 $-1\leqslant x\leqslant 5$,所以函数的定义域为 $[-1,5]$.

(2) 当 $\lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 0$ 时函数有定义,从而推得:$\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 1$. 即 $(x-1)(x-4)\leqslant 0$. 故有 $1\leqslant x\leqslant 4$. 所以函数的定义域为 $[1,4]$.

(3) 当 $16-x^2\geqslant 0$ 及 $\sin x>0$ 同时成立时,函数才有定义,即求解不等式组:

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0\\ \sin x>0\end{cases}$$

由第一个不等式解得 $-4\leqslant x\leqslant 4$.

再看第二个不等式,由于正弦函数在第一、二象限为正,所以 $0<x<\pi$;又正弦函数的周期为 2π,故 $2n\pi<x<(2n+1)\pi$(n 为整数) 这两组的公共部分就是不等式组的解,即:$[-4,-\pi]\cup(0,\pi)$.

(4) 因为

$$f(x+1)=\begin{cases}-(x+1), & x+1<0\\ (x+1)^2, & 0\leqslant x+1<3\\ (x+1)-2, & 3<x+1\end{cases}$$

则 $f(x+1)=\begin{cases}-(x+1), & x<-1\\ (x+1)^2, & -1\leqslant x<2\\ x-1, & x>2\end{cases}$

所以 $D(f)=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$.

(5) 因为 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\ 0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}$,即 $\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\ a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$. 又因 $0<a<\dfrac{1}{5}$,所以 $D_f=[a,1-a]$.

注 1　函数的定义域一般有以下五种表示法:不等式表示法,区间表示法,集合表示法,图示法和叙述法. 前三种表示法较常用. 解题时,可采用