

历届高考数学试题

精选与解析

主 编 李庆胜 邵丽云

副主编 孙承巽 杨育红 龚洪戈

说 明

本书汇集了1978年以来全国普通高校招生统一考试的数学试题(包括全国卷、上海卷、广东卷、湖南、云南、海南卷),内容详尽.这些试题体现了高考对基础、能力和数学思想方法的要求,其中不少题目堪称典型问题,是每一位高中数学教师 and 高中学生必须领悟和把握的.因此,本书是高中学生和高中数学教师难得的宝贵资料.

本书分代数、立体几何、解析几何三个科目,并按教学顺序分章编写,每章又按内容(知识点或方法)分专题编排.这样,既适合于高考复习使用,又适合于高一、高二章节练习及复习使用.本书对每个问题除给出答案外,一般都有精炼的分析或解答,并给出多种常见的思路和方法,以有利于提高学生分析和解决问题的能力,有利于培养学生思维的广阔性、灵活性和针对性,也便于学生自学使用.因而,本书是为高中学生复习和学习数学提供的一把“钥匙”,是一本得力的自学辅导参考书.

本书在编写与出版过程中,山东教育出版社给予了大力支持和帮助.王金勇、田广明、高桂珍等同志也为本书的编写提供了热心的帮助.在此表示衷心的感谢.

因水平和篇幅所限,书中必有很多缺点、不足,敬请专家和广大读者指正.

编 者

目 录

第一部分 代数	1
第一章 幂函数、指数函数和对数函数	3
一 集合	3
二 映射与函数	11
三 函数的奇偶性	29
四 函数的增减性	36
五 反函数	47
六 指数、对数运算与指数方程、对数方程	57
七 函数应用问题	72
八 二次函数综合问题	89
第二章 三角函数	104
一 任意角的三角函数	104
二 三角函数的图象	110
三 三角函数的性质	115
四 简单的三角不等式	122
第三章 两角和与差的三角函数	126
一 两角和与差的三角函数	126
二 二倍角的正弦、余弦、正切	132
三 半角的正弦、余弦、正切	144
四 三角函数的积化和差、和差化积	148

五	三角函数的性质	153
六	证明、求值问题	169
七	解斜三角形	191
第四章	反三角函数和简单三角方程	195
一	反三角函数的化简和求值	195
二	求反三角函数的三角函数值	197
三	反三角函数和、差、倍的合并	198
四	求三角函数的反三角函数	199
五	解析式与图象	201
六	求反函数	204
七	函数的定义域、值域、单调区间	206
八	比较大小	207
九	解反三角不等式	210
十	三角方程	213
第五章	不等式	220
一	比较大小	220
二	解不等式	229
三	方程、不等式解的讨论	245
第六章	数列、极限、数学归纳法	254
一	等差数列	254
二	等比数列	264
三	等差数列和等比数列	270
四	数列的极限	279
五	数学归纳法	293
六	综合问题	300
第七章	复数	338

一	复数的三角形式	338
二	共轭复数	342
三	复数的运算	345
四	复数运算的几何意义	355
五	复变数方程	361
六	综合问题	367
第八章	排列、组合、二项式定理	385
一	排列与组合	385
二	二项式定理	403

第二部分 立体几何 415

第一章	直线和平面	417
一	平面	417
二	空间两条直线	420
三	空间直线和平面	425
四	空间两个平面	436
第二章	多面体和旋转体	471
一	多面体	471
二	旋转体	485
三	体积	495
四	综合问题	522

第三部分 解析几何 553

第一章	直线	555
-----	----------	-----

第二章	圆锥曲线	578
一	曲线和方程	578
二	圆	586
三	椭圆	616
四	双曲线	639
五	抛物线	662
六	坐标变换	701
第三章	参数方程和极坐标	705
一	参数方程	705
二	极坐标	710
三	二次曲线相交有关问题	726
四	二次曲线弦长有关问题	747
五	二次曲线弦的中点有关问题	772
六	求曲线方程有关问题	803

第一部分

代 数

第一章 幂函数、指数函数和对数函数

一 集合

(一)子集个数

1. ('88) 集合 $\{1,2,3\}$ 的子集总共有().

(A)7个 (B)8个 (C)6个 (D)5个

【分析】对子集按所含元素个数进行分类,分别列举出含有1个、2个、3个等元素的子集,而空集是任何集合的子集,所以子集共有8个.

另外,也可对子集按是否含有某元素进行分类.

一般地,应用组合数和二项式定理的知识,可推出含有 n 个元素的集合的子集个数为

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n.$$

答案:B.

2. ('92) 设含有10个元素的集合的全部子集数为 S ,其中由3个元素组成的子集数为 T ,则 $\frac{T}{S}$ 的值为_____.

【分析】全部子集数 $S = 2^{10}$,由3个元素组成的子集数 $T = C_{10}^3$,所以 $\frac{T}{S} = \frac{120}{2^{10}} = \frac{15}{128}$.

答案: $\frac{15}{128}$.

【说明】一般地,含有 n 个元素的集合的含有 m 个元素的子集数为 C_n^m .

(二)元素与集合的关系,集合的关系与运算

3. ('83) 设 $M = \{x | x \leq \sqrt{2}\}$, $a = \sqrt{11}$, 则下列关系式中正确的是().

(A) $a \subset M$ (B) $a \notin M$ (C) $\{a\} \in M$ (D) $\{a\} \subset M$

答案: B.

【说明】元素与集合的关系具有两歧性:或属于,或不属于.

4. ('84) 数集 $X = \{(2n+1)\pi, n \text{ 是整数}\}$ 与数集 $Y = \{(4k \pm 1)\pi, k \text{ 是整数}\}$ 之间的关系是().

(A) $X \subset Y$ (B) $X \supset Y$ (C) $X = Y$ (D) $X \neq Y$

【分析】数集 X, Y 都表示 π 的奇数倍组成的集合, X, Y 还可表示为 $\{(2n-1)\pi, n \in Z\}$, 这是因为 $\{2n-1, n \in Z\} = \{2n+1, n \in Z\} = \{4k \pm 1, k \in Z\}$.

证明如下:

设 $A = \{2n+1, n \in Z\}$, $B = \{4k \pm 1, n \in Z\}$.

(1) 设 $a \in A$, 则 $a = 2n+1, n \in Z$.

(i) 若 $n = 2k, k \in Z$, 则 $a = 2n+1 = 4k+1$, 即
 $a \in B$.

(ii) 若 $n = 2k-1, k \in Z$, 则 $a = 2n+1 = 4k-1$, 即
 $a \in B$.

由(i)、(ii)可知 $A \subseteq B$.

(2) 设 $b \in B$, 则 $b = 4k + 1$ 或 $4k - 1, k \in Z$.

(i) 若 $b = 4k + 1$, 则 $b = 2(2k) + 1$.

$$\therefore 2k \in Z,$$

$$\therefore b \in A.$$

(ii) 若 $b = 4k - 1$, 则 $b = 2(2k - 1) + 1$,

$$\therefore 2k - 1 \in Z,$$

$$\therefore b \in A.$$

由(i)、(ii)可知 $B \subseteq A$.

综合(1)、(2)得 $A = B$.

答案:C.

5. ('88, 广东, 文) 设 $P = \{x | x = \sin \frac{n\pi}{6}, m \in N\}, Q$

$= \{x | x = \sin \frac{n\pi}{12}, n \in N\}$, 那么().

(A) $P \subset Q$ (B) $P \supset Q$ (C) $P = Q$ (D) $P \cap Q = \emptyset$

【分析】 $\because \frac{m}{6} = \frac{2m}{12}, \therefore$ 对 $\sin \alpha$ 比较 $\alpha = \frac{2m\pi}{12} (m \in N)$ 与 $\alpha = \frac{n\pi}{12} (n \in N)$ 所取的值, 显然 $P \subset Q$. 具体说来 $\sin \frac{n\pi}{6}, \sin \frac{n\pi}{12}$ 的值可在单位圆上表示出来, 也可直接给出 P 和 Q : $P = \{0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1\}, Q = \{0, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1, \pm \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4}\}$.

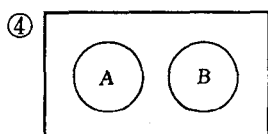
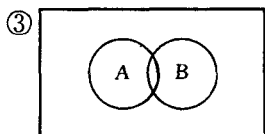
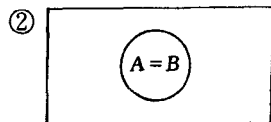
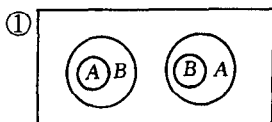
答案:A.

【说明】确定两非空集合的关系的方法有:

- (1) 比较两集合的元素的特征条件;
- (2) 列举两集合的全部或部分元素, 比较判断;
- (3) 利用文图.

具体解题时, 可灵活掌握.

两非空集合的从属关系可用文图表示如下:



6. ('85, 文) 设集合 $X = \{0, 1, 2, 4, 5, 7\}$, $Y = \{1, 3, 6, 8, 9\}$, $Z = \{3, 7, 8\}$, 那么集合 $(X \cap Y) \cup Z$ 是().

- (A) $\{0, 1, 2, 6, 8\}$ (B) $\{3, 7, 8\}$
(C) $\{1, 3, 7, 8\}$ (D) $\{1, 3, 6, 7, 8\}$

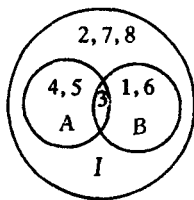
【分析】用列举法给出即可.

答案:C.

7. ('86) 已知全集 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 6\}$, 那么集合 $\{2, 7, 8\}$ 是().

- (A) $A \cup B$ (B) $A \cap B$
(C) $\overline{A \cap B}$ (D) $\overline{A \cup B}$

【分析】用列举或文图检验.



答案:C.

8. ('89) 如果 $I = \{a, b, c, d, e\}$, $M = \{a, c, d\}$, $N = \{b, d, e\}$, 其中 I 是全集, 那么 $\overline{M \cap N}$ 等于().

- (A) ϕ (B) $\{d\}$ (C) $\{a, c\}$ (D) $\{b, e\}$

答案:A.

9. ('94) 设全集 $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, 集合 $A = \{0, 1, 2,$

3}, 集合 $B = \{2, 3, 4\}$, 则 $\overline{A} \cup \overline{B} = (\quad)$.

(A) $\{0\}$ (B) $\{0, 1\}$ (C) $\{0, 1, 4\}$ (D) $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

答案: C.

10. ('96, 文) 全集 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 集合 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{3, 5\}$, 则 $(\quad)$.

(A) $I = A \cup \overline{B}$ (B) $I = \overline{A} \cup B$

(C) $I = A \cup B$ (D) $I = \overline{A} \cup \overline{B}$

答案: A.

11. ('96) 已知全集 $I = N$, 集合 $A = \{x | x = 2n, n \in N\}$, $B = \{x | x = 4n, n \in N\}$, 则 $(\quad)$.

(A) $I = A \cup B$ (B) $I = \overline{A} \cup B$

(C) $I = A \cup \overline{B}$ (D) $I = \overline{A} \cup \overline{B}$

答案: C.

12. ('95, 文) 已知全集 $I = \{0, -1, -2, -3, -4\}$, 集合 $M = \{0, -1, -2\}$, $N = \{0, -3, -4\}$, 则 $\overline{M} \cap N = (\quad)$.

(A) $\{0\}$ (B) $\{-3, -4\}$

(C) $\{-1, -2\}$ (D) $\emptyset$

答案: B.

13. ('97, 上海) 设全集是实数集 R , $M = \{x | x \leq 1 + \sqrt{2}, x \in R\}$, $N = \{1, 2, 3, 4\}$, 则 $\overline{M} \cap N = (\quad)$.

(A) $\{4\}$ (B) $\{3, 4\}$ (C) $\{2, 3, 4\}$ (D) $\{1, 2, 3, 4\}$

答案: B.

【说明】已知集合 A, B , 对 A, B 进行交、并、补运算, 一般可用列举法或文图给出, 并注意到 $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

14. ('93) 已知集合 $E = \{\theta | \cos \theta < \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$,

$F = \{\theta \mid \lg \theta < \sin \theta\}$, 那么 $E \cap F$ 为区间().

- (A) $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ (B) $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$
 (C) $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$ (D) $(\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi)$

【分析】本题的解法很多,应当指出利用单位圆解简单的三角不等式是很方便的,也可利用图象来解.

$$\begin{cases} \cos \theta < \sin \theta, \\ 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

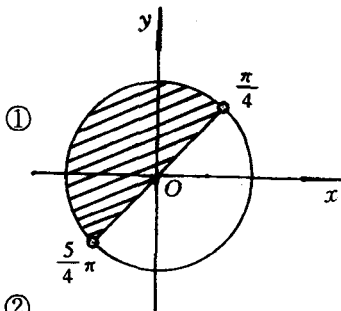
$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{5}{4}\pi.$$

$$\lg \theta < \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow \lg \theta (1 - \cos \theta) < 0$$

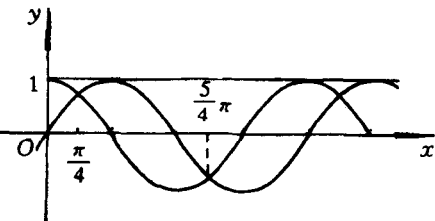
$$\Leftrightarrow \lg \theta < 0$$

$$\Leftrightarrow k\pi - \frac{\pi}{2} < \theta < k\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad \textcircled{2}$$



由①、②, $E \cap F = (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

本题也可先确定 F (F 是第二、四象限的角), 再根据 E 的条件排除得解.



答案:A.

15. ('86, 广东, 文) 若 $A = \{x \mid |x - 1| < 2\}$, $B = \{x \mid \frac{x-2}{x} > 0\}$, 则 $A \cap B$ 等于().

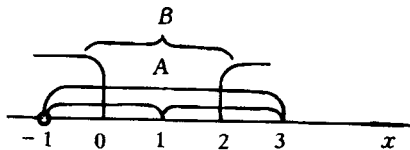
- (A) $\{x \mid -1 < x < 3\}$ (B) $\{x \mid 2 < x < 3\}$

(C) $\{x | -1 < x < 0\}$ (D) $\{x | -1 < x < 0 \text{ 或 } 2 < x < 3\}$

【分析】因为 $A = \{x | |x-1| < 2\} = \{x | -1 < x < 3\}$,

$$B = \{x | \frac{x-2}{x} > 0\} = \{x | x < 0 \text{ 或 } x > 2\},$$

所以, $A \cap B = \{x | -1 < x < 0 \text{ 或 } 2 < x < 3\}$.



用数轴来解更为简捷。(如图)

答案:D.

16. ('97) 设集合 $M = \{x | 0 \leq x < 2\}$, 集合 $N = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\}$, 集合 $M \cap N = (\quad)$.

(A) $\{x | 0 \leq x \leq 1\}$ (B) $\{x | 0 \leq x < 2\}$

(C) $\{x | 0 \leq x < 1\}$ (D) $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$

【分析】 $N = \{x | (x-3)(x+1) < 0\} = \{x | -1 < x < 3\}$, 所以 $M \cap N = \{x | 0 \leq x < 2\}$.

答案:B.

17. ('98, 上海) 设全集为 R , $A = \{x | x^2 - 5x - 6 > 0\}$, $B = \{x | |x-5| < a\}$ (a 是常数), 且 $11 \in B$, 则($\quad$).

(A) $\overline{A} \cup B = R$ (B) $A \cup \overline{B} = R$

(C) $\overline{A} \cup \overline{B} = R$ (D) $A \cup B = R$

答案:D.

18. ('91) 设全集为 R , $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $M = \{x | f(x) \neq 0\}$, $N = \{x | g(x) \neq 0\}$, 那么 $\{x | f(x) \cdot g(x) = 0\}$ 等于($\quad$).

(A) $\overline{M} \cap \overline{N}$ (B) $\overline{M} \cup N$ (C) $M \cup \overline{N}$ (D) $\overline{M} \cup \overline{N}$

【分析】因为 $\{x | f(x) \cdot g(x) = 0\} = \{x | f(x) = 0 \text{ 或 } g(x) = 0\}$

$$= 0\} = \{x | f(x) = 0\} \cup \{x | g(x) = 0\} = \overline{M} \cup \overline{N}.$$

答案:D.

19. ('90, 文) 设全集 $I = \{(x, y) | x, y \in R\}$, 集合 $M = \{(x, y) | \frac{y-3}{x-2} = 1\}$, $N = \{(x, y) | y \neq x+1\}$, 那么 $\overline{M} \cap \overline{N}$ 等于().

(A) $\emptyset$ (B) $\{(2, 3)\}$ (C) $(2, 3)$ (D) $\{(x, y) | y = x+1\}$

【分析】因为 $I = \{\text{坐标平面上的点}\}$, $M = \{\text{直线 } y = x+1 \text{ 上的除点 } (2, 3) \text{ 外的点}\}$, $N = \{\text{直线 } y = x+1 \text{ 外的点}\}$, 因此 $\overline{M} = \{\text{直线 } y = x+1 \text{ 外的点以及点 } (2, 3)\}$, $\overline{N} = \{\text{直线 } y = x+1 \text{ 上的点}\}$, 所以 $\overline{M} \cap \overline{N} = \{(2, 3)\}$.

答案:B.

【说明】注意到集合的元素为坐标平面内适合某些条件的点.

20. ('96, 上海) 已知集合 $M = \{(x, y) | x + y = 2\}$, $N = \{(x, y) | x - y = 4\}$, 那么集合 $M \cap N$ 为().

(A) $x = 3, y = -1$ (B) $(3, -1)$
(C) $\{3, 1\}$ (D) $\{(3, -1)\}$

【分析】解方程组 $\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = 4. \end{cases}$

可得 $\begin{cases} x = 3, \\ y = -1. \end{cases}$

或在直角坐标系中画出直线 $x + y = 2$, $x - y = 4$, 确定其交点为 $(3, -1)$, 以集合表示即 $\{(3, -1)\}$.

答案:D.

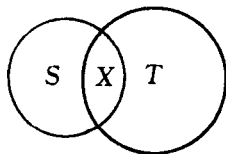
21. ('87) 设 S, T 是两个非空集合, 且 $S \not\subseteq T, T \not\subseteq S$,

令 $X = S \cap T$, 那么 $S \cup X$ 等于().

- (A) X (B) T (C) ϕ (D) S

【分析】本题可利用文图分析.

答案:D.



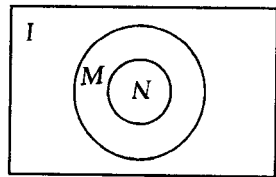
22. ('95) I 为全集, 集合 M , $N \subset I$, 若 $M \cap N = N$, 则().

- (A) $\overline{M} \supseteq \overline{N}$ (B) $M \subseteq \overline{N}$

- (C) $\overline{M} \subseteq \overline{N}$ (D) $M \supseteq \overline{N}$

【分析】利用文图分析.

答案:C.



23. ('94, 上海) 设 I 是全集, 集合 P, Q 满足 $P \subset Q$, 则下面的结论中错误的是().

- (A) $P \cup Q = Q$ (B) $\overline{P} \cup Q = I$

- (C) $P \cap \overline{Q} = \phi$ (D) $\overline{P} \cap \overline{Q} = \overline{P}$

答案:D.

【说明】对没有给出集合中的具体元素, 而只给出了集合之间的关系, 一般用文图解比较简单.

二 映射与函数

(一) 映射

1. ('89, 广东) 设 A 是直角坐标平面上所有的点组成的集合, 如果由 A 到 A 的一一对应, 映射 f 使象集合的元素 $(y-1, x+2)$ 和原象集合的元素 (x, y) 对应, 象点 $(3, -4)$ 的原象是点().

- (A) $(-5, 5)$ (B) $(4, -6)$ (C) $(2, -2)$ (D) $(-6, 4)$