

职工中等专业学校试用教材学习指导书

高等数学



AODENGSHUXUE

XUEXI ZHIDAO SHU

上海科学技术文献出版社

职工中等专业学校试用教材学习指导书

高等数学

职工中等专业学校教材编写组 编

上海科学技术文献出版社

职工中等专业学校试用教材学习指导书

高 等 数 学

职工中等专业学校教材编写组 编

*

上海科学技术文献出版社出版发行

(上海市武康路2号)

新华书店经销 昆山亭林印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 3.75 字数 90,000

1988年1月第1版 1988年1月第1次印刷

印数: 1—9,200

ISBN 7-80513-098-X/G·08

定价: 0.95

◀科技新书目▶148-275

前 言

这本学习指导,是为了帮助职工中等专业学校的学员学好《高等数学》这一课程而编写的。它的内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程和无穷级数等。

我们在编写本书时,力求讲述详细而又重点突出,侧重于提高解题能力。各章均由以下4个部分组成:

(1) 学习要求 根据职工中等专业学校数学教学大纲对本课程提出的要求,明确学习各部分内容应掌握的程度和重点。

(2) 学习指导 阐述基本概念、定义、性质、定理等,着重讲解比较难以理解的概念和比较难以掌握的运算。

(3) 例题分析 这一部分选配了相当数量的典型例题。通过对这些例题的分析,帮助学员理解有关数学概念,掌握基本运算方法。不少例题在讲解前,作了必要的分析,以搞清楚解题思路和解题技巧。有些题一题多解,从比较中提高解题能力。

(4) 自我检查题 这是根据学习要求,为检查学习情况而设置的。

本书由金宝钰同志编写第一~六章、宣俊谟同志编写第七章,宣俊谟、茅人文同志审稿。

限于编者水平,书中的缺点和错误,恳请读者指出。

编 者

1987.5.

目 录

第一章 函数与极限	1
一、学习要求	1
二、学习指导	2
三、例题分析	11
四、自我检查题	15
第二章 导数与微分	17
一、学习要求	17
二、学习指导	17
三、例题分析	22
四、自我检查题	29
第三章 导数的应用	31
一、学习要求	31
二、学习指导	31
三、例题分析	36
四、自我检查题	42
第四章 不定积分	44
一、学习要求	44
二、学习指导	44
三、例题分析	49
四、自我检查题	57
第五章 定积分	59
一、学习要求	59
二、学习指导	59
三、例题分析	66

四、自我检查题	73
第六章 微分方程	75
一、学习要求	75
二、学习指导	75
三、例题分析	79
四、自我检查题	89
第七章 无穷级数	91
一、学习要求	91
二、学习指导	91
三、例题分析	103
四、自我检查题	114

第一章 函数与极限

一、学习要求

1. 掌握函数概念, 会求函数的定义域。
2. 了解函数的几种特性, 会判断函数的奇偶性, 掌握其图形特点。知道常见有界函数及周期函数。
3. 熟练掌握 5 种基本初等函数的表达式、定义域、值域、图形及其主要性质。
4. 理解复合函数和初等函数的概念, 会将它们分解成基本初等函数。
5. 理解数列极限的概念, 会根据定义证明简单的数列极限。
6. 理解函数极限($x \rightarrow \infty$ 及 $x \rightarrow x_0$) 的概念, 知道 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 。
7. 掌握无穷小量及无穷大量的概念, 它们的运算法则及相互关系, 了解“无穷小分析”的思想方法。
8. 熟练掌握极限的四则运算法则, 熟记两个重要极限, 会求分段函数在分段点处的极限。
9. 理解函数连续的概念, 能判断分段函数在分段点处的连续性。
10. 了解连续函数四则运算法则, 牢记一切初等函数在其定义域内连续。

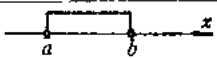
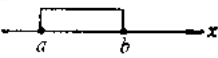
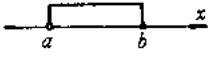
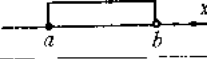
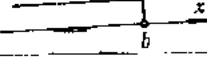
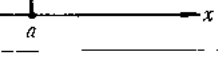
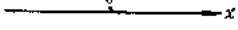
11. 了解闭区间上连续函数的性质定理的条件和结论。

二、学习指导

1. 区间的理解与应用

微积分学中的变量在实数范围内取值,常用“区间”来表示;也可用不等式或数轴上的线段来表示,如表 1-1。

表 1-1

名 称	区间表示	不等式表示	数 轴 表 示
开 区 间	(a, b)	$a < x < b$	
闭 区 间	$[a, b]$	$a \leq x \leq b$	
半开区间	$(a, b]$	$a < x \leq b$	
	$[a, b)$	$a \leq x < b$	
无穷区间	$(-\infty, b)$	$x < b$	
	$[a, +\infty)$	$x \geq a$	
	$(-\infty, +\infty)$	$-\infty < x < +\infty$	

说明: (1) 区间包含端点时,用方括号表示;不包含端点时,用圆括号表示。

(2) $-\infty$ 与 $+\infty$ 是符号,并不是指某一特定的数,一律用圆括号表示。

(3) 注意区间两端点次序,区间(1, 2)不能表示为(2, 1)的形式。

(4) 所谓 a 的 δ 邻域, 就是以 a 为中心, 长度为 2δ 的一个开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 。

(5) 牢记绝对值不等式的等价不等式:

$$|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k;$$

$$|x| > k \Leftrightarrow x > k \text{ 或 } x < -k。$$

2. 函数的概念

函数是微积分的研究对象, 因而是最重要的基本概念之一。在实际问题中, 几个变量在同一变化过程中, 有着确定的依赖关系, 这就是函数概念的实质。对应法则和定义域是函数概念中的两个要素。

函数关系可用多种方式表示, 最常用的有3种, 即公式法、表格法和图象法。函数的这3种表示法各有优缺点, 在解决实际问题时, 应根据问题的特点选用适当的表示法或者结合使用。

在函数的公式法中, 对分段函数的理解尤其要注意。它是在自变量的不同取值范围内用不同的公式来表示一个函数。

例如函数

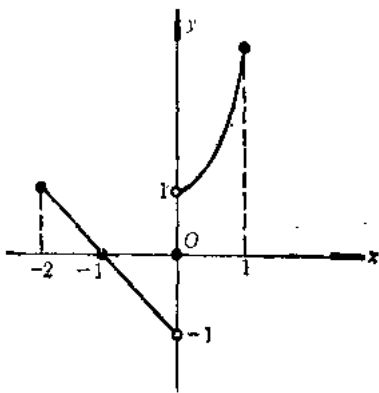


图 1-1

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1), & -2 \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ e^x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

它是用 3 个数学式子分段表示一个函数，图象如图 1-1 所示，定义域为 $[-2, 1)$ 。在求函数值时，应特别注意自变量的取值范围。如取 $x = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ 时，有

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = -\frac{1}{2}$$

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}}$$

3. 函数定义域的确定

函数的定义域是函数的“立足之本”。只有在自变量的允许变化范围内研究函数才有意义。因此，确定函数的定义域是极为重要的。为不致于产生疏漏，一般来说，应从下列几个方面来考虑：

(1) 在应用问题中，应根据实际的需要与可能来确定。

例如，半径为 r 的圆面积 A ，可由公式

$$A = \pi r^2$$

确定。在这里，半径 r 当然必须大于零。

(2) 在解析式中，应考虑下面 5 点：

1° 分式：分母不能为零；

2° 偶次根式：被开方式必须大于或等于零；

3° 对数式：真数必须大于零；

4° 三角函数式：

$$(i) y = \tan \alpha, \quad \alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in J$$

$$(ii) y = \cot \alpha, \quad \alpha \neq k\pi, \quad k \in J$$

5°反三角函数式,

$$\left. \begin{array}{l} y = \arcsin x \\ y = \arccos x \end{array} \right\} |x| \leq 1$$

(3) 在求分段函数的定义域时,把几个表示式的定义域合并在一起,就是该分段函数的定义域。

4. 关于函数的奇偶性与有界性

(1) 奇偶性:在掌握函数奇偶性定义的基础上,要掌握判别函数 $f(x)$ 奇偶性的运算模式:

$$f(-x) \xrightarrow[\text{运算}]{\text{化简}} \begin{cases} = f(x) \\ = -f(x) \\ \neq f(x) \text{ 或 } -f(x) \end{cases}$$

偶函数
则 $f(x)$ 是 奇函数
非奇非偶函数

同时掌握下列结论,能简化某些函数奇偶性的讨论:

1°两个偶函数的和(或差)是偶函数;两个奇函数的和(或差)是奇函数;偶函数与奇函数的和(或差)是非奇非偶函数。

2°两个偶函数的乘积(或商)是偶函数;两个奇函数的乘积(或商)是偶函数;偶函数与奇函数的乘积(或商)是奇函数。

3°设 $f(x)$ 是定义在对称区间 $(-l, l)$ 内的函数,则 $f(x) + f(-x)$ 是偶函数,而 $f(x) - f(-x)$ 是奇函数。

如果能对常见的奇函数和偶函数作一些归纳,包括它们各自的图象特征,更能加深对函数奇偶性的理解。

(2) 有界性:着重掌握下列几种有界函数的类型是极为有用的。

1°三角函数类: $y = \sin[f(x)]$ 及 $y = \cos[f(x)]$ 在定义域内均有 $|y| \leq 1$ 。

2°反三角函数类: $y = \arcsin[f(x)]$ 在定义域内有 $|y| \leq \frac{\pi}{2}$ 。

$y = \arccos[f(x)]$ 在定义域内有: $0 \leq y \leq \pi$;

$y = \operatorname{arctg}[f(x)]$ 在定义域内有: $|y| < \frac{\pi}{2}$;

$y = \operatorname{arccotg}[f(x)]$ 在定义域内有: $0 < y < \pi$ 。

综上所述, 不难看出 $\sin[f(x)]$, $\cos[f(x)]$, $y = \arcsin[f(x)]$, $y = \arccos[f(x)]$, $y = \operatorname{arctg}[f(x)]$, $y = \operatorname{arccotg}[f(x)]$ 在各自的定义域内均为有界函数。

5. 极限概念的理解

极限的概念是微积分的又一基本概念。它是研究微分学、积分学和无穷级数的主要工具。极限所考虑的是在自变量的某个变化过程中, 函数的变化趋势。函数取极限的过程应该看作是一个随着自变量的不断变化, 函数值作相应的不断变化的运动过程。例如研究函数

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

当 $x \rightarrow 2$ 时的极限, 无论 x 从 2 的左侧或右侧无限地趋向于

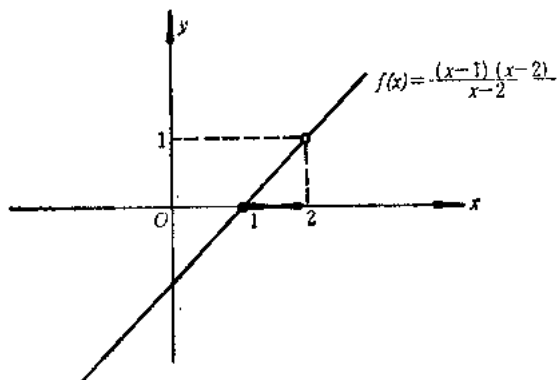


图 1-2

2 时, 函数 $f(x)$ 的值也就无限接近于 1。但 x 不等于 2, 否则 $f(x)$ 将无意义了。事实上, 这种担心是没有必要的。既然取 $x \rightarrow 2$ 时的极限, 就不应该取 $x = 2$, 否则就中止了极限的“运动性”, 也就违背了极限的本意了。

函数的变化趋势, 完全依赖于自变量的变化趋势。

自变量的变化趋势, 一般说来有下列 2 种情形:

- (1) $x \rightarrow x_0$ (x_0 是定值), 包括 $x \rightarrow x_0^{+0}$, $x \rightarrow x_0^{-0}$;
- (2) $x \rightarrow \infty$ ($|x|$ 无限增大), 包括 $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ 。

函数的变化趋势, 有下列几种情形:

- (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ (A 是常量)

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^{-0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^{+0}} f(x) = A.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$

称函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限为 A 。

- (2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^{-0}} f(x) = A$ 又 $\lim_{x \rightarrow x_0^{+0}} f(x) = B$, 且 $A \neq B$ 即左、

右极限存在但不相等, 则此函数的极限不存在。

- (3) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = \infty$

这意味着函数的绝对值无限增大, 因此极限不存在。

- (4) $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x)$ 无确定的值, 例如 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$, 这时函数 $y =$

$\sin \frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 附近作无限次振荡, 这时极限也不存在。

总之, 在自变量的一定变化趋势下, 函数趋向于一个定值, 则此函数的极限存在, 否则函数极限不存在。

6. 函数的左、右极限与函数极限的关系

当函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限及右极限均存在且相等时, 函数在该点处的极限才存在, 且极限值等于左极限及右极限的值. 反之, 所谓函数 $f(x)$ 在 x_0 处的极限存在也就意味着函数在该点处左、右极限均存在且相等. 因此, 左、右极限均存在且相等, 是函数极限存在的充要条件. 在研究分段函数在分段点处的极限时, 上述结论尤为重要.

例如,

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ x-1, & 0 < x < 2 \\ e^{2-x}, & x \geq 2 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处,

$$f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1$$

$$f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = -1$$

$$\therefore f(0-0) \neq f(0+0)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ 不存在.}$$

在 $x=2$ 处,

$$f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 1$$

$$f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2} e^{2-x} = e^0 = 1$$

$$\therefore f(2-0) = f(2+0) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

7. 极限常见类型及解法

为了顺利地求得函数的极限, 首先必须将极限的类型作大致分类, 以便采用相应的解法. 下面就常见类型作一简单的归类.

(1) 求 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, 其中 $f(x)$, $g(x)$ 是多项式.

1°若: $g(x_0) \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$;

2°若: $g(x_0) = 0$ 而 $f(x_0) \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$;

3°若: $g(x_0) = 0$, 而 $f(x_0) = 0$, 因 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 属有理分式。则分子、分母分解因式, 约去公因子 $(x - x_0)$ 后再求极限。

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ (或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$), 其中 $f(x)$, $g(x)$ 是多项式。分子、分母同除分母的最高次。

若: $f(x)$ 的最高次为 p 次, $g(x)$ 的最高次为 q 次。

$$\text{则: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & p < q \\ \frac{a_0}{b_0} \text{ (最高次系数之比)} & p = q \\ \infty & p > q \end{cases}$$

(3) 利用无穷小量与有界函数的乘积仍是无穷小量。

(4) 无限项之和的极限, 应该先求和再求极限。

(5) 利用三角恒等变换先将三角函数式化简后再求极限。

(6) 利用两个重要极限。

无穷小量是极限为零的变量, 特别要注意自变量的变化过程。

$$\text{例 } f(x) = \frac{x+1}{x(x-1)}.$$

当 $x \rightarrow -1$; 或 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x)$ 都是一个无穷小量。

当 $x \rightarrow 0$ 或 $x \rightarrow 1$ 时, $f(x)$ 都是一个无穷大量了。

在自变量的其他变化过程中, $f(x)$ 就既不是一个无穷小量也不是一个无穷大量了。

由此可知, 为了说明一个变量是否为一个无穷小量或无穷大量, 首先必须明确自变量的变化过程。

8. 函数连续性的讨论

函数的连续性概念是微积分的又一重要概念。它反映了事物连续变化的现象。为了掌握连续性这个函数的重要性质,必须对函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的两个等价的定义都有所了解:

(1) 当自变量的增量 $\Delta x = x - x_0 \rightarrow 0$ 时, 函数的相应增量 $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \rightarrow 0$,

即
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

(2) 函数 $f(x)$ 在 x_0 处的极限值等于它的函数值。

即
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

由定义可知, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续必须满足下列 3 条:

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义, 即 $f(x_0)$ 存在。

(2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在。

(3) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限值等于它的函数值 $f(x_0)$ 即,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

这 3 个条件必须同时具备, 缺任何一条, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处就不连续, 或称函数在点 x_0 处间断。

当函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点都连续时, 则称 $f(x)$ 是区间 (a, b) 内的连续函数。这时, 它的图形在 (a, b) 间就是一条连续不断的曲线。

一切初等函数在其定义域内都是连续的。这个结论极为重要, 它既免除了对大量初等函数连续性的逐一讨论, 为进一步研究初等函数提供了方便, 也给我们提供了求初等函数在有定义点处极限的一个简捷的方法: 只须求出相应的函数值即可。就是当初等函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义时, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 。

对于分段函数连续性的判断就较为复杂了。一般来说，应分以下 3 个步骤：

(1) 列出分段函数的所有自变量的分段点，因为分段点是函数可能的间断点；

(2) 对各个分段点分别求出左极限、右极限及函数值；

(3) 根据函数连续的定义，判断各分段点的连续与否。

9. 在闭区间上连续函数的性质

在闭区间 $[a, b]$ 上连续函数 $f(x)$ 的两个重要性质及推论，在微积分中经常用作各种论断的根据。值得注意的是，这两个性质及其推论都要求 $f(x)$ 在闭区间上连续。闭区间与连续这两者缺一不可。

例如， $f(x) = x$ 在 $(0, 1)$ 内连续，但在开区间 $(0, 1)$ 内没有最大值，也没有最小值。

又如， $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $[-1, 1]$ 上没有最大值和最小值，因为 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $[-1, 1]$ 上的 $x=0$ 处不连续。由于同样的理由， $f(x) = \frac{1}{x}$ 虽然有 $f(-1) = -1$ ， $f(1) = 1$ ，但在 $(-1, 1)$ 内找不到一点 ξ ，使得 $f(\xi)$ 等于介于 -1 和 1 之间的数零。

三、例题分析

例 1 在下列各组函数中， $f(x)$ 与 $\phi(x)$ 是否表示同一函数？说明其理由。

(1) $f(x) = \frac{x}{x}$, $\phi(x) = 1$; (2) $f(x) = \lg x^2$, $\phi(x) = 2\lg x$;

(3) $f(x) = x$, $\phi(x) = (\sqrt{x})^2$;

(4) $f(x) = x$, $\phi(x) = \sqrt{x^2}$.