浙江大学出版社

JUBU TUKONGJIAN YU GUANGYI HANSHULUN

局部凸空间与广义函数论

葛显良 编

局部凸空间与广义函数论

葛显良 编

浙江大学出版社

（浙）新登字10号

内 容 简 介

本书用局部凸空间理论和归纳限拓扑严格定义讨论了广义函数。内容包括：拓扑线性空间、局部凸空间、广义函数、卷积、Fourier变换、索波列夫定理和空间、Paley-Wiener-Schwartz定理、对微分方程的应用（包括基本解存在定理、解的正则性定理）等。局部凸空间是拓扑线性空间中最重要的一类，书中对归纳限局部凸空间作了较深入的讨论。

本书可作为高等学校数理专业高年级学生、研究生的教材，也可作为对广义函数有兴趣的有关专业的研究生、科研、工程技术人员的参考书。

局部凸空间与广义函数论

葛显良 编

责任编辑 朱谨准

浙江大学出版社出版

上虞科技外文印刷厂印装

浙江省新华书店发行

850×1168 1/32 4.9375 印张 124千字

1992年5月第1版 1992年5月第1次印刷

印数 0001—1500

ISBN 7-308-00963-7/O·115 定价：1.80 元

基本符号

$\forall$ 全称量词，对所有的

$\exists$ 存在量词，存在某一个

$\Longrightarrow$ 蕴涵

$\Longleftrightarrow$ 等价、当且仅当

$\boldsymbol{R}$ 实数域

$\boldsymbol{C}$ 复数域

$\boldsymbol{R}^d$ d 维实欧氏空间

$\boldsymbol{C}^d$ d 维复欧氏空间

$\mathscr{N}$ 自然数集

$\boldsymbol{N}$ 非负整数集

$\boldsymbol{N}^d$ d 重非负整数集

$\mathrm{Im}z$ z 的实部

$\mathrm{Re}z$ z 的虚部

$\bar{z}$ z的共轭复数

ϕ 空集

$\in$ 属于

$\subset$ 包含于

$\cup$ 集合的并

$\cap$ 集合的交

$\setminus$ 集合的差

$\overline{A}$ A 的闭包

$\mathring{A}$ A 的内部

目　录

第一章 局部凸空间

第一节 拓扑空间简介

§1.1 **定义** 如非空集合 X 上给定了一个子集类 τ，满足以下三条件：

① 空集 $\phi\in\tau$，$X\in\tau$；

② τ 中任意多个集的并集属于 τ；

③ τ 中任意两个集的交集属于 τ，

则称 τ 是 X 的一个**拓扑**，(X,τ) 称为**拓扑空间**。τ 中的集合称为**开集**。以上三条件称为开集公理。

X 上如有两个拓扑 τ_1,τ_2，如 $\tau_1\subset\tau_2$，称 τ_1 比 τ_2 弱（小、粗），或 τ_2 比 τ_1 强（大、细）。

§1.2 **定义** 拓扑空间 X 中的子集 F 称为**闭集**，如果其补集 $X\setminus F$ 是开集。由开集公理，得出以下三性质，称为闭集公理：

① ϕ 和 X 都是闭集；

② 任意多个闭集的交集是闭集；

③ 任意两个闭集的并集是闭集。

§1.3 **定义** 拓扑空间 X 中任一子集 A 的**闭包**是指集合 $\overline{A}=\cap\{B\subset X: A\subset B, B$ 是 X 中闭集$\}$，它是包含 A 的最小闭集。

显然，如 $A\subset B$，则 $\overline{A}\subset\overline{B}$。

闭包有以下性质（①—④ 称为闭包公理）：

① $A\subset\overline{A}$；

② $\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$；

③ $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$；

④ $\bar{\phi} = \phi$；

⑤ A 是 X 中闭集当且仅当 $A = \bar{A}$。

如 $\bar{A} = X$，则称 A 是 X 的**稠集**或 A 在 X 中**稠**。

§1.4　**定义**　如 X 是拓扑空间，$A \subset X$，A 的**内部**是指集合

$\mathring{A} = \mathrm{int}\, A = \cup\{B \subset X: B \subset A, B$ 是开集$\}$。

它是包含在 A 中的最大开集。

$\mathring{A}$ 中的点称为 A 的**内点**。

易证：$X \setminus \mathring{A} = \overline{X \setminus A}$，

$X \setminus \bar{A} = (X \setminus A)^{\circ}$。

如 $A \subset B$，则 $\mathring{A} \subset \mathring{B}$。

内部有以下性质：

① $\mathring{A} \subset A$；

② $(\mathring{A})^{\circ} = \mathring{A}$；

③ $(A \cap B)^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$；

④ $\mathring{X} = X$；

⑤ A 是开集当且仅当 $\mathring{A} = A$。

§1.5　**定义**　如 X 是拓扑空间，$x \in X$，X 的子集 U 称为 x 的**邻域**，如果存在开集 G 满足 $x \in G \subset U$。

x 点的邻域的全体组成的集类称为 x 的**邻域系**，记作 $\mathscr{N}_x$。

$\mathscr{N}_x$ 的子类 $\mathscr{B}_x$ 称为 x 的**邻域基**，如果 $\forall U \in \mathscr{N}_x$，$\exists V \in \mathscr{B}_x$，使 $V \subset U$。$\mathscr{B}_x$ 中元素称为基本邻域。$\mathscr{N}_x$ 可由 $\mathscr{B}_x$ 确定：

$\mathscr{N}_x = \{U \subset X: \exists V \in \mathscr{B}_x$，使 $V \subset U\}$。

§1.6　**定理**　设 X 是拓扑空间，$\forall x \in X$，$\mathscr{B}_x$ 是 x 的邻域基，则有以下性质：

① 如 $V \in \mathscr{B}_x$，则 $x \in V$；

② 如 $V_1, V_2 \in \mathscr{B}_x$，则存在 $V_3 \in \mathscr{B}_x$，使 $V_3 \subset V_1 \cap V_2$；

③ 如 $V \in \mathscr{B}_x$，则存在 $V_0 \in \mathscr{B}_x$，使得对任意的 $y \in V_0$，存在 $W \in \mathscr{B}_y$ 且 $W \subset V$；

（以上三条称为邻域基公理）

此外，还有

④ G 是 X 中开集当且仅当：$\forall x \in G$，$\exists V \in \mathscr{B}_x$ 使 $V \subset G$。

反之，在集合 X 中，如果对每一个 $x \in X$，给定了 X 的子集类 $\mathscr{B}_x$ 满足上面的 ①、②、③，则用 ④ 定义开集，这样定义出来的开集类 τ 满足开集公理，使 (X, τ) 成为拓扑空间，而按此拓扑 τ，对每一 $x \in X$，$\mathscr{B}_x$ 是 x 点的邻域基。

§1.7　**定理**　设 X 是拓扑空间，$\forall x \in X$，邻域基 $\mathscr{B}_x$ 已给定，则

① G 是 X 中开集 $\Longleftrightarrow \forall x \in G, \exists V \in \mathscr{B}_x$ 使 $V \subset G$。

② F 是 X 中闭集 $\Longleftrightarrow \forall x \notin F, \exists V \in \mathscr{B}_x$ 使 $V \cap F = \phi$。

③ $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \forall V \in \mathscr{B}_x$，$A \cap V \neq \phi$。

④ $x \in \mathring{A} \Longleftrightarrow \exists V \in \mathscr{B}_x$，$V \subset A$。

§1.8　**定义**　如 (X, τ) 是拓扑空间而 $A \subset X$，则集类 $\tau_A = \{G \cap A : G \in \tau\}$ 是 A 上拓扑，称为 τ 关于 A 的**相对拓扑**，或称为 X 在 A 上导出的**子拓扑**，(A, τ_A) 称为 (X, τ) 的**子拓扑空间**。

§1.9　**定义**　设 X, Y 是两个拓扑空间，映射 $f: X \mapsto Y$，$x \in X$，f 称为在 x 点是**连续**的，如果对 $f(x)$ 在 Y 中的任意邻域 V，存在 x 在 X 中的邻域 U，使 $f(U) \subset V$。f 称为在 X 上是连续的，如果 f 在 X 的每一点上是连续的。

§1.10　**定理**　f 在 X 上连续，等价于下列条件中的任何一个：

① 对 Y 中任一开集 G，$f^{-1}(G)$ 在 X 中开。

② 对 Y 中任一闭集 F，$f^{-1}(F)$ 在 X 中闭。

③ 对 X 的任一子集 A，$f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$。

§1.11 **定义** 如映射 $f:X\mapsto Y$ 是一一的、映满，f,f^{-1} 都连续，则称 f 是 X 到 Y 上的**同胚映射**，简称同胚，此时称拓扑空间 X 和 Y 是**同胚**的。

§1.12 **定义** 设 X,Y 是两个拓扑空间，$X\times Y$ 表示其乘积集合：

$X\times Y=\{(x,y):x\in X,\ y\in Y\}$，对 $X\times Y$ 中任一点 (x,y)，$\mathscr{U}_x$ 是 x 点的邻域基，$\mathscr{V}_y$ 是 y 点的邻域基，令

$$\mathscr{B}_{(x,y)}=\{U\times V:U\in\mathscr{U}_x,\ V\in\mathscr{V}_y\},$$

则 $\forall(x,y)\in X\times Y$，$\mathscr{B}_{(x,y)}$ 是 $X\times Y$ 上的子集类，满足定理 1.6 的邻域基公理①、②、③，以 $\mathscr{B}_{(x,y)}$ 作为 (x,y) 点的邻域基可定义 $X\times Y$ 上的拓扑，此拓扑由 X,Y 的拓扑唯一确定，与 $\mathscr{U}_x,\mathscr{V}_y$ 的选取无关，称为 $X\times Y$ 上的**乘积拓扑**。这样 $X\times Y$ 成为拓扑空间，称为 X 与 Y 的拓扑乘积空间。

当 $X\times Y$ 取乘积拓扑，则映射 $(x,y)\mapsto x$ 是 $X\times Y\mapsto X$ 连续的，映射 $(x,y)\mapsto y$ 是 $X\times Y\mapsto Y$ 连续的。而且乘积拓扑是使以上两个映射连续的 $X\times Y$ 上的最弱的拓扑。

§1.13 **定义** 设 Γ 是非空集合，在 Γ 上有一关系 $\leqslant$ 满足：

① 对任一 $r\in\Gamma$，$r\leqslant r$；

② 如 $r_1\leqslant r_2$，$r_2\leqslant r_3$，则 $r_1\leqslant r_3$；

③ 如 $r_1,r_2\in\Gamma$，则存在某 $r_3\in\Gamma$，使 $r_1\leqslant r_3$，$r_2\leqslant r_3$；

则称 Γ 是**定向集**，关系 $\leqslant$ 称为 Γ 上的**定向**或**方向**。

§1.14 **定义** 集 X 中的一个**网**是指某定向集 Γ 到 X 中的一个映射 $F:\Gamma\mapsto X$，象点 $F(r)$ 通常表成 x_r，我们通常称“网 $(x_r)_{r\in\Gamma}$”或简称“网 (x_r)”。

§1.15 **定义** 设 $(x_r)_{r\in\Gamma}$ 是拓扑空间 X 中的网，$x\in X$，如果对 x 的任意邻域 U，存在 $r_0\in\Gamma$，使当 $r\geqslant r_0$ 时有 $x_r\in U$，则称网 (x_r) 收敛于 x，记作 $x_r\to x$，或 $\lim x_r=x$。

§1.16 **定理** 设 A 是拓扑空间 X 的子集，则 $x\in\bar{A}$ 当且仅

当存在某一 A 中的网 (x_r)，使 $x_r \to x$。

§1.17 **定理** 设 X,Y 是拓扑空间，映射 $f:X\mapsto Y$，$x\in X$，则 f 在 x 连续的充分必要条件是：

$$x_r\to x \Rightarrow f(x_r)\to f(x)。$$

§1.18 **定义** 拓扑空间 X 称为**Hausdorff 空间或 T_2 空间**，如果对 X 中任意两个不同的点 x,y，存在两个不相交的开集 G_1,G_2，使 $x\in G_1$，$y\in G_2$。

§1.19 **定义** 拓扑空间 X 称为**正则空间**，如果对 X 中任意闭集 A 和任意的点 $x\notin A$，存在两个不相交的开集 G_1,G_2，使 $x\in G_1$，$A\subset G_2$。

对拓扑空间 X，以下三者是等价的：

① X 是正则的。

② 如 U 在 X 中开，$x\in U$，则存在开集 V 使 $x\in V\subset\overline{V}\subset U$。

③ 对 X 中任意点 x，有由闭集构成的邻域基。

§1.20 **定义** 设 E 是拓扑空间 X 的子集，如有 X 的子集族 $\mathscr{A}=\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$，使 $\bigcup\limits_{\alpha\in A} G_\alpha\supset E$，则称它是 E 的**覆盖**。如果 $\mathscr{A}'\subset\mathscr{A}$，$\mathscr{A}'$ 也是 E 的覆盖，则称 $\mathscr{A}'$ 是 $\mathscr{A}$ 的**子覆盖**。如果覆盖 $\mathscr{A}$ 全由开集 G_α 组成，则称 $\mathscr{A}$ 为**开覆盖**。如果覆盖 $\mathscr{A}$ 由有限多个集合组成，则称 $\mathscr{A}$ 为**有限覆盖**。

E 称为**紧集**，如果 E 的任一开覆盖有有限子覆盖。如果 X 本身是紧集，则称 X 为**紧空间**。E 是 X 中的紧集，等价于 E 作为 X 的子拓扑空间是紧空间。

如 X,Y 是拓扑空间，$f:X\mapsto Y$ 连续，如 E 是 X 中的紧集，则 $f(E)$ 是 Y 中的紧集。

§1.21 **定义** 拓扑空间 X 中子集 E 称为**列紧集**，如果 E 中任一序列有收敛子序列。

E 称为**自列紧集**，如果 E 中任一序列有收敛子序列，收敛于 E 中的点。

§1.22 **定义** 设 X 是非空集合，d 是 $X\times X\mapsto \boldsymbol{R}$（实数域）中的映射，满足：对任意的 $x,y,z\in X$，

① $d(x,y)\geqslant 0$；

② $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

③ $d(x,y)=d(y,x)$；

④ $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$（三角形不等式），

则称 d 是 X 上**距离**，(X,d) 称为**距离空间**。

对 $x_0\in X$，$r>0$，$B(x_0,r)=\{x\in X:d(x,x_0)<r\}$ 称为以 x_0 为球心，r 为半径的**开球**。

$\bar{B}(x_0,r)=\{x\in X:d(x,x_0)\leqslant r\}$ 称为以 x_0 为球心，r 为半径的**闭球**。

距离空间 X 的子集 G 称为开集，如果 $\forall x\in G$，$\exists r=r_x>0$，使 $B(x,r)\subset G$，由此定义的开集全体组成的集类 τ_d 满足开集公理。这样由距离 d 定义了拓扑 τ_d。如果 (X,τ) 是拓扑空间，d 是 X 上的距离，且 $\tau_d=\tau$，则称距离 d 与拓扑 τ **相容**。如果 X 上的拓扑 τ 与某一距离 d 相容，则称 (X,τ) **可距离化**，或可赋距。

在距离空间中，紧集与自列紧集是相同的。

§1.23 **距离空间的完备性**

按拓扑空间中收敛网的定义，距离空间 (X,d) 中网 $(x_r)_{r\in\Gamma}$ 收敛于 x 的充分必要条件是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists r_0\in\Gamma$，使得当 $r\geqslant r_0$ 时有 $d(x_r,x)<\varepsilon$。

距离空间中的结构比拓扑空间多，具有一些拓扑空间中没有的性质（在拓扑学中，距离空间是一种一致空间）。

距离空间 (X,d) 中网 $(x_r)_{r\in\Gamma}$ 称为 **Cauchy 网**，如果 $\forall\varepsilon>0$，$\exists r_0\in\Gamma$，使得当 $r_1\geqslant r_0$，$r_2\geqslant r_0$ 时，$d(X_{r_1},X_{r_2})<\varepsilon$。

距离空间 (X,d) 称为**完备**的，如果其中的 Cauchy 网都收敛。距离空间为完备的充分必要条件是其中的 Cauchy 序列都收敛。

§1.24 **定义** 拓扑空间中的子集称为**疏集**，如果它的闭包无内点。一个集合如果能表示成可数多个疏集的并，则称它是**第一纲集**，否则称为**第二纲集**。

Baire 纲定理 完备距离空间是第二纲集。

第二节 拓扑线性空间简介

§2.1 线性空间中的一些记号和术语

设 $\boldsymbol{R}$ 表示实数域，$\boldsymbol{C}$ 表示复数域，$\boldsymbol{K}$ 表示 $\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$。设 X 是 $\boldsymbol{K}$ 上的线性空间。如 $A\subset X, B\subset X, x\in X$ $F\subset\boldsymbol{K}, \lambda\in\boldsymbol{K}, \varepsilon>0$，用以下的记号：

$$x+A=\{x+a : a\in A\}$$

$$x-A=\{x-a : a\in A\}$$

$$A+B=\{a+b : a\in A, b\in B\}$$

$$\lambda A=\{\lambda a : a\in A\}$$

$$-A=-1\cdot A$$

$$FA=\{\lambda a : \lambda\in F, a\in A\}$$

$$Fx=\{\lambda x : \lambda\in F\}$$

$$\boldsymbol{K}(\varepsilon)=\{\lambda\in\boldsymbol{K} : |\lambda|<\varepsilon\}$$

$$\overline{\boldsymbol{K}}(\varepsilon)=\{\lambda\in\boldsymbol{K} : |\lambda|\leqslant\varepsilon\}$$

线性空间 X 的子集 A 称为均衡的，如 $\overline{\boldsymbol{K}}(1)A\subset A$。

设 A, B 是线性空间 X 中的非空子集，如果有 $\varepsilon>0$，使 $\boldsymbol{K}(\varepsilon)B\subset A$，则称 A 吸收 B。如果 A 吸收任何单元集，即如 $\forall x\in X$，$\exists\varepsilon>0$，使 $\boldsymbol{K}(\varepsilon)x\subset A$，则称 A 是吸收集。

§2.2 **定义** 设 $\boldsymbol{K}$ 上线性空间 X 上给定了拓扑 τ，满足以下条件：

① 加法映射 $(x,y)\mapsto x+y$ 是 $X\times X\mapsto X$ 的连续映射，即对 $x+y$ 的任意邻域 V，存在 x 的邻域 V_1 和 y 的邻域 V_2，使 V_1+

$V_2 \subset V$；

② 数乘映射 $(\lambda,x)\mapsto\lambda x$ 是 $\boldsymbol{K}\times X\mapsto X$ 的连续映射（其中 $\boldsymbol{K}$ 是按 $\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$ 的拓扑），即对 λx 的任一邻域 V，存在 $\varepsilon>0$ 和 x 的某一邻域 W 使得 $(\lambda+\boldsymbol{K}(\varepsilon))W\subset V$，

则称此拓扑为 X 上的**向量拓扑**，(X,τ) 称为**拓扑线性空间**。

设 X 是拓扑线性空间，对应于每一固定的 $a\in X$，平移算子 $T_a：X\mapsto X$ 由表达式

$$T_a(x)=a+x,\ x\in X$$

定义。

对每一固定的数 λ，数乘算子 $M_\lambda：X\mapsto X$ 由表达式

$$M_\lambda(x)=\lambda x,\ x\in X$$

定义。

§2.3 **定理** 设 X 是拓扑线性空间，$\forall a\in X$，$\forall\lambda\in\boldsymbol{K}\setminus\{0\}$，$T_a$ 和 M_λ 是 $X\mapsto X$ 上的同胚。

由此，向量拓扑 τ 是平移不变的，即 G 是开集当且仅当 $a+G$ 是开集。因此 τ 完全由零点的邻域基所确定。零点的邻域基简称为**局部基**。

§2.4 **定理** 在拓扑线性空间 X 中，① 0 点的任一邻域 U 包含 0 点的一个均衡邻域 V，因而可由均衡邻域构成局部基。② 如 $A\subset X$，$\mathscr{U}$ 为 X 的局部基，则 $\bar{A}=\bigcap\limits_{U\in\mathscr{U}}(A+U)$。③ 零点的任一邻域 U 包含零点的一个闭邻域 W，因而可由闭邻域构成局部基，从而拓扑线性空间是正则的。

［证］ ① 设 U 是 0 的任一邻域，$0\cdot 0=0$，因数乘是连续的，$\exists\varepsilon>0$，和 X 中 0 的邻域 W，使 $(0+\boldsymbol{K}(\varepsilon))W\subset U$，令 $V=\boldsymbol{K}(\varepsilon)W=\bigcup\limits_{0<|\lambda|<\varepsilon}\lambda W$，则 V 是 0 的邻域，V 均衡，且 $V\subset U$。

② 如 U 是 0 的邻域，则 $-U$ 也是 0 的邻域，所以 $U\cap(-U)$ 也是 0 的邻域，故

$$\mathscr{U}_1=\{U\cap(-U):U\in\mathscr{U}\}$$

也是 X 的局部基，且

$$\bigcap_{U\in\mathscr{U}}(A+U)=\bigcap_{U\in\mathscr{U}_1}(A+U)。$$

由定理 1.7③，$x\in\bar{A}\Longleftrightarrow\forall U\in\mathscr{U}_1,(x+U)\cap A\neq\phi\Longleftrightarrow\forall U\in\mathscr{U}_1$，$x\in A-U=A+U\Longleftrightarrow x\in\bigcap\limits_{U\in\mathscr{U}_1}(A+U)=\bigcap\limits_{U\in\mathscr{U}}(A+U)$。

所以
$$\bar{A}=\bigcap_{U\in\mathscr{U}}(A+U)。$$

③ 设 U 是 0 的任一邻域，存在 0 的邻域 U_1 使 $U_1+U_1\subset U$，所以

$$\bar{U}_1=\bigcap_{V\in\mathscr{U}}(U_1+V)\subset U_1+U_1\subset U。$$

取 $W=\bar{U}_1$，则 W 是 0 的闭邻域，且 $W\subset U$。所以有闭邻域构成的局部基。又因向量拓扑是平移不变的，由此 X 是正则的。

§ 2.5 **定理** 设 $\mathscr{U}$ 是拓扑线性空间 X 的局部基，则满足下列四个条件：

① 对任意的 $U_1,U_2\in\mathscr{U}$，存在 $U_3\in\mathscr{U}$，使 $U_3\subset U_1\cap U_2$；

② 对任意的 $U\in\mathscr{U}$，存在 $V\in\mathscr{U}$，使得 $V+V\subset U$；

③ 对任意的 $U\in\mathscr{U}$，存在 $V\in\mathscr{U}$，使得 $\overline{\mathbf{K}}(1)V\subset U$；

④ $\mathscr{U}$ 中每个 U 是吸收集。

［**证**］ ① 即定理 1.6 中的邻域基公理 ②。

② 由加法的连续性，因 $0+0=0$。

③ 由定理 2.4①，均衡邻域构成局部基。

④ 由 $0\cdot x=0$，数乘是连续的，对任一 $U\in\mathscr{U}$，$\exists\varepsilon>0$ 和 x 的邻域 W，使 $(0+\mathbf{K}(\varepsilon))W\subset U$，而 $x\in W$，所以 $\mathbf{K}(\varepsilon)x\subset U$，因而 U 是吸收集。

§ 2.6 **定理** 设线性空间 X 的子集类 $\mathscr{U}$ 满足定理 2.5 的四个条件，$\forall x\in X$，令 $\mathscr{B}_x=x+\mathscr{U}=\{x+U:U\in\mathscr{U}\}$，则 $\{\mathscr{B}_x: x\in X\}$ 满足定理 1.6 中的邻域基公理 ①、②、③，因此可定义 X 上的拓扑 τ，以 $\mathscr{B}_x$ 作为 x 的邻域基，且 (X,τ) 是拓扑线性空

间。

［证］ ① 如 $V\in\mathscr{B}_x$，则 $\exists U\in\mathscr{U}$，使 $V=x+U$，因 U 是吸收的，$0\in U$，所以 $x\in V$。

② 如果 $V_1,V_2\in\mathscr{B}_x$，则 $\exists U_1,U_2\in\mathscr{U}$，使 $V_1=x+U_1$，$V_2=x+U_2$，由 §2.5 的条件①，$\exists U_3\in\mathscr{U}$，使 $U_3\subset U_1\cap U_2$，令 $V_3=x+U_3$，则 $V_3\in\mathscr{B}_x$，$V_3\subset V_1\cap V_2$。

③ 如 $V\in\mathscr{B}_x$，则 $\exists U\in\mathscr{U}$，使 $V=x+U$，由 §2.5 的条件②，$\exists U_1\in\mathscr{U}$，使 $U_1+U_1\subset U$，则 $V_0=x+U_1\in\mathscr{B}_x$。$\forall y\in V_0$，$W=y+U_1\in\mathscr{B}_y$，且 $W\subset V_0+U_1=x+U_1+U_1\subset x+U=V$。

所以 $\mathscr{B}_x$ 满足定理 1.6 的邻域基公理①、②、③，可以定义拓扑 τ，以 $\mathscr{B}_x$ 为 x 的邻域基。

以下证明加法的连续性。对 $x+y$ 的任意邻域 U'，$\exists U\in\mathscr{U}$，使 $U'\supset x+y+U$，又 $\exists U_1\in\mathscr{U}$，使 $U_1+U_1\subset U$，则 $x+U_1$，$y+U_1$ 分别是 x,y 的邻域，且

$$\begin{aligned}&(x+U_1)+(y+U_1)\\=&(x+y)+(U_1+U_1)\subset x+y+U\subset U'。\end{aligned}$$

以下证明数乘的连续性：

对 λx 的任一邻域 U'，$\exists U\in\mathscr{U}$，使 $U'\supset\lambda x+U$，由 §2.5 的条件②，$\exists U_1\in\mathscr{U}$，使 $U_1+U_1\subset U$。

由 §2.5 条件④，$\exists\varepsilon_1>0$，使 $\boldsymbol{K}(\varepsilon_1)x\subset U_1$。

取 N 为不超过 $|\lambda|+1$ 的最大整数，即 $N\leqslant|\lambda|+1<N+1$，重复使用 §2.5 的条件②，$\exists U_2\in\mathscr{U}$，使

$$\underbrace{U_2+U_2+\cdots+U_2}_{N\text{ 项}}\subset U_1,$$

令
$$\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,N-|\lambda|\}>0,$$

由 §2.5 条件③，取 $U_3\in\mathscr{U}$，使 $\overline{\boldsymbol{K}}(1)U_3\subset U_2$，取 $W=x+U_3$，则 W 是 x 的邻域，

$$(\lambda+\boldsymbol{K}(\varepsilon))W=(\lambda+\boldsymbol{K}(\varepsilon))(x+U_3)$$

$$=\lambda x+\boldsymbol{K}(\varepsilon)x+(\lambda+\boldsymbol{K}(\varepsilon))U_3$$
$$\subset\lambda x+\boldsymbol{K}(\varepsilon_1)x+(\lambda+\boldsymbol{K}(\varepsilon))U_3$$
$$\subset\lambda x+U_1+(\lambda+\boldsymbol{K}(\varepsilon))U_3。$$

$$\forall\mu\in\lambda+\boldsymbol{K}(\varepsilon),\ |\mu|<|\lambda|+\varepsilon\leqslant|\lambda|+N-|\lambda|=N,$$

所以
$$\lambda+\boldsymbol{K}(\varepsilon)\subset N\boldsymbol{K}(1),$$
$$(\lambda+\boldsymbol{K}(\varepsilon))U_3\subset N\boldsymbol{K}(1)U_3\subset NU_2\subset U_1,$$
因此
$$(\lambda+\boldsymbol{K}(\varepsilon))W\subset\lambda x+U_1+U_1\subset\lambda x+U\subset U'。$$

§2.7 拓扑线性空间中的收敛网、Cauchy 网、完备性

设拓扑线性空间 X 的局部基为 $\mathscr{U}$，按拓扑空间中收敛网的定义 1.15，X 中网 $(x_r)_{r\in\Gamma}$ 收敛于 $x\in X$ 的充分必要条件是：$\forall U\in\mathscr{U}$，$\exists r_0\in\Gamma$，当 $r\geqslant r_0$，$x_r-x\in U$。

由于拓扑线性空间中有加法结构（它是拓扑群，因而也是一致空间），故可定义 Cauchy 网与完备性。

定义 ① 拓扑线性空间 X 中网 $(x_r)_{r\in\Gamma}$ 称为 **Cauchy 网**，如果对 X 中零点的任意邻域 U，存在 $r_0\in\Gamma$，使得当 $r_1\geqslant r_0$，$r_2\geqslant r_0$ 时，有 $x_{r_1}-x_{r_2}\in U$。

② 拓扑线性空间称为**完备**的，如果其中的 Cauchy 网均收敛。

§2.8 **定义** 拓扑线性空间 X 上的距离 d 称为**平移不变的**（简称**不变的**），如对任意的 $x,y,z\in X$，$d(x+z,y+z)=d(x,y)$。如果拓扑线性空间 (X,τ) 上有距离 d 与 τ 相容（由 d 产生的拓扑 $\tau_d=\tau$），则称拓扑线性空间**可距离化**，或称**可赋距**。

§2.9 **定理** 拓扑线性空间 X 可赋距的充分必要条件是，X 是 Hausdorff 空间且有可数的局部基，即有由可数多个邻域组成的局部基。

如拓扑线性空间 (X,τ) 可赋距，则必有一个不变距离 d 与 τ 相容。

如拓扑线性空间 (X,τ) 可赋不变距离 d，则显然按拓扑线性

空间定义的Cauchy网与按距离d定义的Cauchy网是相同的，所以按拓扑线性空间完备与按距离d完备是相同的。

完备的赋不变距离的拓扑线性空间称为**F**空间。

§2.10 **定义** 在拓扑线性空间中，集合B称为有界的，如果它被零点的任一邻域U吸收，即$\exists\varepsilon=\varepsilon_U>0$，使$\boldsymbol{K}(\varepsilon)B\subset U$。

由于均衡邻域构成局部基，B有界的充分必要条件是：对局部基中的任一邻域U，$\exists t>0$，使$B\subset tU$。

由于闭邻域构成局部基，故如B有界，则$\bar{B}$也有界。

以下叙述几个以后要用到的定理，其证明可参看泛函分析的教材，如Rudin的Functional Analysis。

§2.11 **定理**(Banach-Steinhauss) 设X是完备的赋不变距离的拓扑线性空间，Y是拓扑线性空间，$T_n: X\mapsto Y$是连续线性算子，$n=1,2,\cdots$；又设对每一个$x\in X$；$\lim\limits_{n\to\infty}T_n(x)$存在，其极限值记作$T(x)$，则$T$是$X\mapsto Y$的连续线性算子。

§2.12 **定理** 设X是完备的赋不变距离的拓扑线性空间，Y,Z是拓扑线性空间；设$B: X\times Y\mapsto Z$是双线性映射且分别连续，即$\forall x\in X, B(x,\cdot): Y\mapsto Z$连续线性，$\forall y\in Y$，$B(\cdot, y): X\mapsto Z$连续线性。如果$x_n\in X$，$x_n\to x, y_n\in Y, y_n\to y$，则有

$$B(x_n,y_n)\to B(x,y)。$$

§2.13 **闭图象定理** 设X,Y都是完备的赋不变距离的拓扑线性空间，$T: X\mapsto Y$是线性算子，T的图象$G(T)=\{(x,Tx): x\in X\}$在$X\times Y$中闭，则T是连续的。

$G(T)$是闭的等价于：如$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x, \lim\limits_{n\to\infty}Tx_n=y$，则$y=Tx$。

§2.14 **逆算子定理** 设X,Y都是完备的赋不变距离的拓扑线性空间，$T: X\mapsto Y$是一一的、映满的连续线性算子，则$T^{-1}: Y\mapsto X$是连续的。