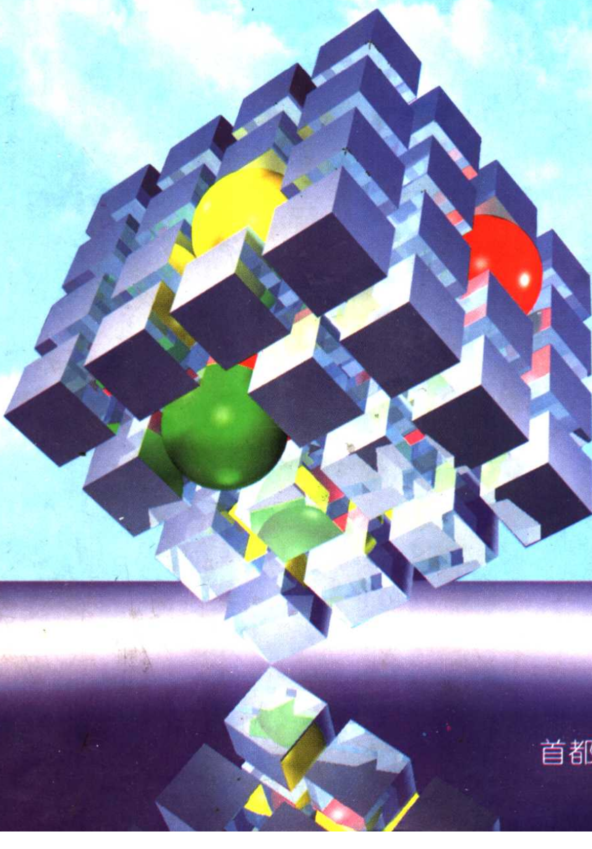
中学数学方法与解题能力培养


# 初中几何44讲

（修订版）


贾士代　主编


首都师范大学出版社

初中几何44讲

责任编辑／丁连义　封面设计／郑　珐

中学数学方法与解题能力培养

初中几何44讲

初中代数41讲

立体几何34讲

高中代数51讲

平面解析几何44讲

ISBN 7-81039-030-9

9 787810 390309 >

ISBN 7-81039-030-9/G·21

定价：11.00　元

中学数学方法与解题能力培养

# 初中几何44讲

（修订版）

贾士代　主编

首都师范大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

初中几何44讲:中学数学方法与解题能力培养/贾士代主编
—北京:首都师范大学出版社,(2000.6修订)
ISBN7—81039—030—9

Ⅰ.初… Ⅱ.贾 Ⅲ.几何课—初中—教学参考资料
Ⅳ.G633.633

中国版本图书馆CIP数据核字(1995)第04349号

CHUZHONG JIHE 44 JIANG

**初中几何44讲**

(修订版)

**首都师范大学出版社**

(北京西三环北路105号 邮政编码100037)
北京首师大印刷厂印刷 全国新华书店经销
2000年6月第2版 2000年6月第1次印刷
开本850×1168 1/32 印张10
字数252千 印数00,001~10,500册
定价11.00元

# 再版前言

贾士代教授主编的《中学教学方法与解题能力培养》丛书（一套五种）自 1993 年出版以来，在全国各地中学师生中产生了很大的反响，深受广大读者厚爱，收到了良好的社会效益.

这六年来，中学数学的教学内容已有一定变动，许多读者纷纷来信，建议该丛书修订再版. 为了满足广大读者的需要，我们对原丛书进行了认真修订. 修改时，初中部分我们按照全国九年义务教育数学教材，高中部分依据 1998 年教育部发布的《关于调整现行普通高中数学、物理学科教学内容和教学要求的意见》.

修订后的丛书有下列三个显著特点：

**（一）培养素质　突出“三法”**

为了应付高考和中考，学生们在学习中不得不做大量的习题集、练习册. 面对茫茫题海，许多学生苦恼，不少教师忧虑. 怎样从根本上提高学生的解题能力，使学生早日摆脱题海的束缚，怎样更好地进行素质教育，成了人们议论的焦点.

我们认为，在素质教育中，要想真正提高学生的数学能力，就必须注重发展学生的思维，必须对学生进行以“数学三法”为主要内容的数学方法教育. 所谓“数学三法”，就是思维方法、学科方法和类型题解证法. 思维方法是处理数学问题的一般方法，如分析法、综合法和数形结合法等. 学科方法是每门学科的思想方法，例如，立体几何中有辅助图形法与割补法、转化为平面几何法和体积法等. 类型题解证法是数学各学科中每一种类型题的各种解法，是思维方法与学科方法、数学知识在不同类型题中的灵活应用. 解题时，思维方法是解题的先导，学科方法与类型题解证法则是解题的具体实施. 我们平常所说的解题方法与技巧，往往是在正确的思维

方法引导下，灵活运用学科方法、类型题解证法与数学知识的结果．因此，"数学三法"是解数学题的思路、方法与技巧的源泉，是数学的"宗"．只有使学生真正掌握了数学的"宗"，才能达到以不变应万变的目的．

本丛书修订后的每一册都是按照思维方法、学科方法与类型题解证法这三章精心编写的，力求做到层次分明、条理清晰、难易适度．

**（二）方法全面　题型新颖**

本丛书从几千种书刊中汲取了丰富的营养，把各家之精髓熔为一炉，汇集了中学数学的各种思维方法与解题技巧．因此，本丛书中的方法具有全面性、系统性、普遍性和灵活性．

另外，在编写过程中，我们特别注意题型的新颖性和典型性．除从各类书刊中精选有代表性的题目外，我们的重点是从 1994 年以来全国各地各类考试中精选数学题，因为这些题目最为活跃、最富有生命力．

**（三）巧解妙证　趣味横生**

数学问题的巧妙解法，往往简捷得使人惊叹，巧妙得令人叫绝．巧妙解法能激发学生的学习兴趣，有利于培养创造思维能力．因此，本丛书在指导学生掌握解数学题的通法外，还常常向学生展示问题的巧妙解法，使读者得到无穷的乐趣和美的享受．

本书是该丛书的一种．第一、二章分别讲解立体几何的思维方法和学科方法，可作为高中生全面复习立体几何时使用；第三章是按教材顺序全面讲述各种类型题及其解法，可作为初学者同步学习之用．

本书由贾士代先生主编，参加编写工作的有贾士代、张子莲、贾玲娟、贾迎乐、曹全友、马十成、詹红庆、张伟奇、李济克、李光显等老师．

书中有不足和错误之处，恳请广大读者指正．

编者

# 目　　录

# 第一章　思维方法

## §1.1　综合法与分析法

证明一个数学命题，就是寻找“条件”(已知)与“结论”(未知)之间的逻辑关系.证明的方法通常分成直接证法(即从正面思考的方法)和间接证法(即从反面思考的方法)两大类.直接证法有综合法、分析法和分析综合法，间接证法有反证法和同一法等.这一节主要讲解综合法、分析法和分析综合法，下二节分别讲述反证法和同一法.

### (一)综合法

所谓综合法就是从“已知条件”出发，运用已学过的公理、定义和定理进行一步步的推理，一直到推出“结论”为止.因此，综合法是从“已知”到“可知”，逐步推向“未知”的思维过程.

**例 1**　已知：如图 1-1，$P$ 是正方形 $ABCD$ 的边 $BC$ 上一点，且 $PC=\frac{1}{4}BC$，$Q$ 是 $CD$ 的中点.求证：$\frac{AQ}{QP}=\frac{DQ}{CP}$.(1994 年天津市中考试题)

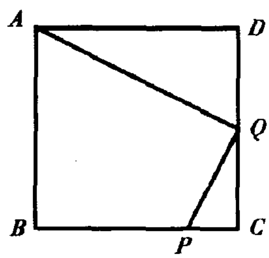



图 1-1

**【证明】**　$\because$　$PC=\frac{1}{4}BC=\frac{1}{4}DC$，

$CQ=\frac{1}{2}DC$，

$DQ=\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}AD$，

$\therefore$　$\frac{PC}{CQ}=\frac{1}{2}$，$\frac{DQ}{AD}=\frac{1}{2}$，

从而 $\dfrac{PC}{CQ}=\dfrac{DQ}{AD}$，

∴ $Rt\triangle PCQ\backsim Rt\triangle QDA$，

∴ $\dfrac{PC}{PQ}=\dfrac{DQ}{AQ}$.

即 $\dfrac{AQ}{PQ}=\dfrac{DQ}{CP}$.

**【解说】** 本例中的证法就是综合法，它从已知条件入手，利用相似三角形的判定定理和性质定理，推出要证的结论.

**例 2** 已知：如图 1-2. $AB$ 是$\odot O$ 的直径，$AC$ 与$\odot O$ 相切于点 $A$，$CE/\!/AB$ 交$\odot O$ 于 $D$、$E$ 两点. 求证：$BE^2=CD\cdot AB$.（1997 年北京市中考题）

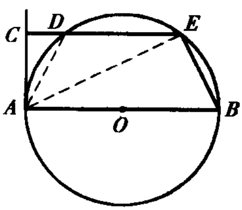



图 1-2

**【证明】** 如图 1-2，连结 $AE$、$AD$，则$\angle AEB=90°$，$\angle CDA=\angle ABE$.

∵ $DE/\!/AB$，

∴ $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BE}$，

∴ $DA=EB$.

∵ $AC$ 是$\odot O$ 的切线，$AB$ 是$\odot O$ 的直径，

∴ $CA\perp AB$.

又 $CE/\!/AB$，

∴ $DC\perp CA$.

从而 $\angle ACD=\angle AEB=90°$.

∴ $\triangle ACD\backsim\triangle AEB$，

∴ $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{CD}{BE}$，

即 $AD\cdot BE=AB\cdot CD$，

故 $BE^2=CD\cdot AB$.

**【解说】** 本例中，由已知条件出发，推出可知“$AD=BE$、$\angle AEB=90°$、$\angle CDA=\angle B$ 和$\angle DCA=90°$”，这些都是已知图形

的性质，它们是顺利使用综合法的关键. 因此，用综合法证几何题时，要注意充分挖掘图形的性质.

### （二）分析法

所谓分析法就是从命题的结论入手，运用已学过的公理、定义和定理，一步步地寻找使这个结论成立的条件，一直追溯到这个结论成立的条件就是已知条件为止 . 因此，分析法是从"未知"追溯"已知"的思维过程，它与综合法的思维方向恰好相反.

**例 3** 已知圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线交于点 $P$，且 $AB=BC$. 求证：$AB\cdot CD=PC\cdot BD$.

**【分析】** 如图 1-3. 欲证 $AB\cdot CD=PC\cdot BD$，只需证 $\frac{AB}{BD}=\frac{PC}{CD}$. 由于 $AB$、$BD$ 与 $PC$、$CD$ 分别是$\triangle ABD$ 与$\triangle PCD$ 的两边，且$\angle ABD=\angle PCD$，因此只需证 $\triangle ABD\backsim\triangle PCD$. 要证 $\triangle ABD\backsim\triangle PCD$，只需证$\angle BDA=\angle CDP$，即证 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$. 而要证$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$，只需有 $AB=BC$，这正是已知条件.

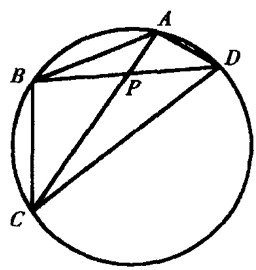


图 1-3

把上述思考过程颠倒过来，就得到本题的综合法证明.

**【证明】** 用综合法证明，略.

**例 4** 已知：如图 1-4，$PA$ 是圆的切线（$A$ 为切点），$PCB$ 是圆的割线. 求证：$\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{PB}{PC}$.

**【分析】** 观察式子$\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{PB}{PC}$，联想相似三角形面积之比等于相似比的平方和等高的两个三角形面积之比等于这高对应的底边之比，得$\frac{PB}{PC}=\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle CAP}}$，因此只需有$\triangle ABP\backsim\triangle CAP$. 但这两个三角形有一个角公用（$\angle BPA=\angle APC$），于是只需有$\angle ABP=$

$\angle CAP$ 或 $\angle PAB=\angle PCA$，而前者正是由已知条件($PA$ 是圆的切线)可得到.

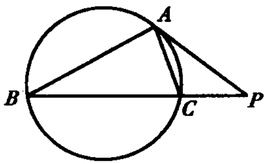


图 1-4

**【证明】** 用综合法证明，略.

**【解说】** 分析法执果索因，利于启发思维，目标明确，思路清晰，容易发现问题的证法. 因此，在证几何题时，往往先用分析法探索其证法，然后用综合法写出其证明过程. 但分析法属于逆向思维，它要求学生对基础知识相当熟悉，有较高的逆向联想能力.

### (三)分析综合法

证几何题的实践告诉我们，不少习题单一地用综合法或分析法去探索其证法，很难成功，思路常常受阻. 因此，需要把分析法与综合法结合起来使用，这就产生了分析综合法. 分析综合法是从命题的两头(题设和结论)向中间靠拢，使思维更集中，目标更明确，容易发现问题的突破口，利于找到问题的简捷证法.

**例 5** 如图 1-5，在 $\triangle ABC$ 中，$D$ 是边 $AB$ 上一点，且 $CD^2=AD\cdot DB$，$AC^2=AD\cdot AB$. 求证：$\triangle ACD\backsim\triangle CBD$.

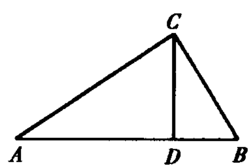


图 1-5

**【分析】** 如图 1-5. 由 $AC^2=AD\cdot AB$，得 $\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{AB}{AC}$，从而在 $\triangle CAD$ 与 $\triangle BAC$ 中，又由 $\angle CAD=\angle BAC$，可得 $\triangle CAD\backsim\triangle BAC$，所以 $\angle ACD=\angle CBD$ 和 $\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{BC}{AB}$……① 因此，欲证 $\triangle ACD\backsim\triangle CBD$，只需证 $\dfrac{CA}{CD}=\dfrac{BC}{BD}$，即证 $CD\cdot BC=CA\cdot BD$. 又由已知

$CD^2=AD \cdot DB$,从而只需证$\frac{CD \cdot BC}{CD^2}=\frac{CA \cdot BD}{AD \cdot BD}$,即证$\frac{BC}{CD}=\frac{CA}{AD}$ ……② 于是由①、②知,只需有$\frac{CD}{AC} \cdot \frac{BC}{CD}=\frac{BC}{AB} \cdot \frac{CA}{AD}$,即 $AC^2=AD \cdot AB$,这正是已知条件.

**【证明】** 用综合法证明,略.

**【解说】** (1)本例的分析,使用的就是分析综合法.它是先从综合法入手,然后再用分析法去追溯条件,这样问题的两头向中间挤,终于找到问题的证法.(2)由本题的结论$\triangle ACD \backsim \triangle CBD$,可得$\angle ACD=\angle B$,$\angle A=\angle BCD$,从而$\angle ACB=\angle A+\angle B$,所以,$\angle ACB=90°$,又可得$\angle ADC=\angle CDB=90°$.于是,由已知可得$AC \perp CB$,$CD \perp AB$.因此,本题是由九年义务教育初中几何第二册第 243 页练习第 2 题的逆向联想而编制的一个有趣命题.

## 习题 1.1

1. 已知:如图 1-6,四边形 $ABCD$ 是矩形,四边形 $ABDE$ 为等腰梯形,$AE /\!/ BD$.求证:$\triangle BED \cong \triangle BCD$.(1996 年河北省中考题)(要求用综合法)

2. 已知:$\triangle ABC$ 的高 $AD$、$BE$ 相交于 $H$,$AD$ 的延长线交外接圆于点 $G$.求证:$D$ 是 $HG$ 的中点.(要求用综合法)

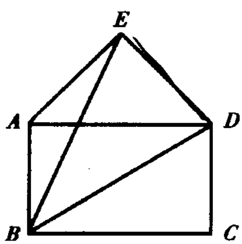


图 1-6

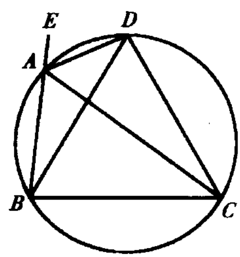


图 1-7

3. 如图 1-7,$AD$ 是$\triangle ABC$ 外角$\angle EAC$ 的平分线,$AD$ 与$\triangle ABC$ 的外接圆交于点 $D$.求证:$DB=DC$.(1998 年吉林省中考题)(要求用分析法)

4. 在$\triangle ABC$中，$BE$是$\angle B$的平分线，过$E$作$EF /\!/ BC$交$AB$于$F$，过$F$作$FG /\!/ AC$交$BC$于$G$. 求证：$BF=GC$.（要求用分析法）

5. 设$\triangle ABC$是锐角三角形，以$BC$为直径作圆，过$A$作此圆的切线，切点为$D$，又在$AB$上取点$E$，使$AE=AD$，过$E$作$EF\perp AB$交$AC$的延长线于$F$. 求证：$AE\cdot AF=AB\cdot AC$.（要求用分析综合法）

6. 已知：$CD$是$\mathrm{Rt}\triangle ABC$的斜边$AB$上的高，$\angle A$的平分线交$CD$于点$E$，$\angle DCB$的平分线交$AB$于点$G$. 求证：$EG /\!/ CB$.（要求用分析综合法）

## 习题 1.1 答案或提示

1. 由四边形$ABDE$是等腰梯形，得$AB=DE$，$\angle BAD=\angle BED$，再由$ABCD$是矩形，得$\angle BAD=\angle BCD=90°$，$AB=CD$. 从而$DE=DC$，$\angle BED=\angle BCD=90°$，又$BD=BD$，所以$\mathrm{Rt}\triangle BED\cong\mathrm{Rt}\triangle BCD$.

2. 连结$BG$，则$\angle GBD=\angle DAC$. 在$\triangle AHE$与$\triangle BDH$中，因为$\angle BDH=\angle AEH=90°$，$\angle BHD=\angle AHE$，所以$\angle DBH=\angle DAC$. 从而$\angle GBD=\angle HBD$，又$BD\perp GH$，于是$\triangle BDG\cong\triangle BDH$. 故$DH=DG$.

3. 欲证$DB=DC$，只需证$\angle DBC=\angle DCB$. 但$\angle DBC=\angle DAC$，$\angle DCB=\angle DAE$，因此，只需有$\angle CAD=\angle EAD$，即只需有$AD$是$\angle CAE$的平分线，这正是已知条件.

4. 欲证$BF=GC$，由于$EF=GC$（因为$EF /\!/ CG$且$FG /\!/ EC$），因此只需证$BF=FE$，即证$\angle FBE=\angle FEB$，又$\angle FEB=\angle EBC$，从而只需有$\angle GBE=\angle FBE$，即$BE$是$\angle CBF$的平分线，这正是已知条件.

5. 欲证$AE\cdot AF=AB\cdot AC$，由于$AE=AD$，所以只需证$AD\cdot AF=AB\cdot AC$，即证$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AC}{AF}$. 设$AB$与圆交于$G$，连$GC$，则$CG\perp AB$，又$EF\perp AB$，所以$GC /\!/ EF$，从而$\dfrac{AC}{AF}=\dfrac{AG}{AE}=\dfrac{AG}{AD}$. 于是只需证$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AG}{AD}$，即证$AD^2=AG\cdot AB$. 这可由切割线定理得到.

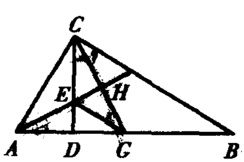



图 1-8

6. 如图 1-8. 欲证$EG /\!/ CB$，即证$\angle EGC=\angle BCG$，由于$\angle BCG=\angle ECG$，因此只需证$\angle ECG=\angle EGC$，即证$EC=EG$.

由于$\angle DCB=\angle CAD$，$GC$、$AE$分别是$\angle DCB$、$\angle CAB$的平分线，所以$\angle DAE=\angle ECH$（$H$是$AE$的延长线于$CG$的交点），于是$\angle CHE=\angle ADE=90°$，即$CH\perp AH$，又$AH$平分$\angle CAG$，所以$CH=HG$，于是$EC=EG$.

## §1.2 反 证 法

反证法证题的思路是：先假设命题的结论不成立，从结论的反面成立入手，利用已知条件和定义、公理、定理进行一系列正确的逻辑推理，得出与已知条件或公理、定理相矛盾的结果，这就说明结论的反面不成立，从而肯定原结论成立. 因为这种证法需要先作一个与待证结论相反的假设，所以把它叫做反证法.

反证法证明命题的一般步骤是：

(1)反设：将结论的反面作为假设；

(2)归谬：由“反说”出发，利用已学过的公理、定理，推出与已知矛盾的结果；

(3)结论：由矛盾断定“反设”错误，从而肯定命题的结论正确.

依据结论的反面情况的多寡，反证法又可分成归谬法和穷举法两种. 若结论的反面只有一种情况，则只需驳倒这种情况就完成了证明，这种反证法叫做归谬法；若结论的反面不只一种情况，则必须列举一切可能的而又彼此互相排斥的情况，然后逐一驳倒，才算完成了证明，这种反证法叫做穷举法.

在初中几何中，反证法宜用于证明否定性命题、唯一性命题、“至少”、“至多”命题和某些逆命题等. 一般地说，凡是直接证法很难证明的命题都可考虑用反证法去探索其证明.

**例1** 如图1-9，已知$E$为直线$l$外一点，求证过$E$点只能有一条直线垂直于$l$. 用反证法证明这个题目的步骤包括：

①这样，在$\triangle EFG$中，$\angle 1+\angle 2+\angle 3>180°$，这与三角形内角和等于180°矛盾；

②假设过$E$点有两条直线$EF$、$EG$分别垂直$l$于$E$、$G$；

③则$\angle 2=90°$，$\angle 3=90°$；