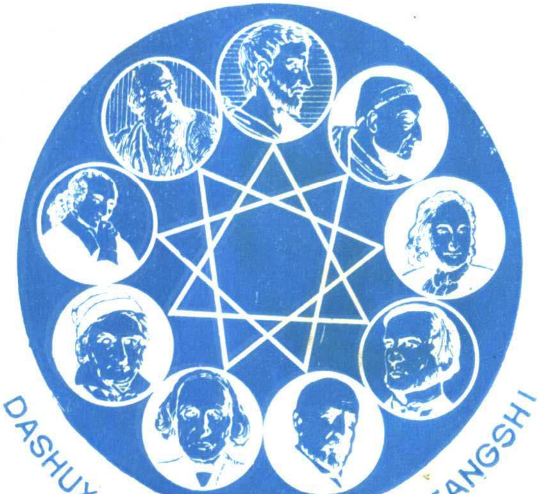
中学数学自学与研究丛书

ZHONGXUE SHUXUE ZIXUE YU YANJIU CONGSHU

大数学家的思维方式

王 前 编译



辽宁教育出版社

大数学家的思维方式

王　前　编译

辽 宁 教 育 出 版 社
一九八六年・沈阳

[illegible]数学家的思维方式

王 前 编译

辽宁教育出版社出版　辽宁省新华书店发行
（沈阳市[illegible]2号）　朝阳新华印刷厂印刷

字数：96,000　开本：787×1092 $^{1}/_{32}$　印张：1 $^{1}/_{2}$
印数：1—2,200
1986年11月第1版　1986年11月第1次印刷

责任编辑：谭　坚　责任校对：李晓晶
封面设计：赵多良

统一书号：7371·288　定价：0.70 元

出版说明

为了满足中学师生和广大自学者的需要，我们根据教育部中学教学大纲的精神，组织编写了这套《中学数学自学与研究丛书》。

这套丛书的内容大致包括：初等数学知识的综合性研究；中学数学教学的经验总结；数学史、数学逻辑和数学方法论的介绍；还有数学教学中的一些补充性的专题等。

这套丛书的编辑出版，是对中学数学知识进行系统的归纳和研究的一种尝试。我们热切希望数学界和教育界人士，以及广大读者不吝赐教，并为我们提供新的选题，使这套丛书进一步充实和完善。

编译者序

每个学习数学的人，都希望自己能敏捷而又巧妙地解决各种数学问题。然而，数学教科书却没有告诉我们如何做到这一点。教科书上记载的都是经过严格逻辑整理的数学成果，以及为理解这些成果所必需的例题、习题和答案。至于解决数学问题，获得数学成果的思想方法，一般是不讲的。于是，学校里的学生只好靠教师的经验性指导，自学者只好靠自己的苦心摸索，才能逐渐获得分析和解决数学问题的能力。这意味着我们实际上是在不自觉地重复前人获得数学成果的思想历程，因而必然重演前人思想方法上的经验教训。

如此说来，要是能了解到一些前人的数学思想方法，特别是一些大数学家的思想方法，岂不是可以使我们少走弯路，更快更好地具备解决数学问题的能力吗？这确实是一个好主意。然而，专门介绍大数学家的思想方法的书籍，至今还不多见。所以，当我们见到H·梅什科夫斯基（Herbert Meschkowski）教授所著的《大数学家的思维方式》一书时，就越发感到该书的难能可贵。

H·梅什科夫斯基教授是在柏林自由大学任教的著名数学家，主要从事数学基础方面的研究工作。他的这本书是

1961年写的，1964年又译成英文出版。由于他的工作性质影响，原书中有一些涉及现代数学哲学的内容，与一般读者关系不大。书中有些事例也是我国读者较生疏的。但这本书的绝大部分内容，对于培养读者分析和解决数学问题的能力，加深对所学知识的进一步理解，是极有益处的。因此，需要对这本书进行编译，以便使它更好地发挥作用。现在这本经过编译后的书，保留了原书书名、基本结构和主要事例，增添了介绍伽罗华和希尔伯特思维方式的两个章节，并对原书的某些内容及叙述方式作了一定改动。希望经过如此处理之后，能够比较适合大多数读者的实际情况，为读者们培养和提高数学思维能力，更好地学习和应用数学，起到一点参考作用。

由于编译者水平有限，这本书中可能有一些缺点错误，希望得到有关专家和读者们的批评指正。

一九八六年二月

目　　录

毕达哥拉斯学派

The Pythagoreans
（公元前585～400年）

毕达哥拉斯是古希腊著名的数学家。他的生平很少为人所知。据说他生于靠近小亚细亚海岸的萨摩岛（Samos）。曾经向古希腊大哲学家泰勒斯（Thales，约公元前640～546年）学习过。后来游历了埃及和巴比伦，学习了那里的一些数学知识。大约在公元前530年，他到达意大利南部的克洛吞（Crotona），建立了自己的学派。毕达哥拉斯学派是一个讨论宗教、科学和哲学问题的帮会，由领导人向门徒传授知识，而门徒的研究成果则由领导人加以总结，算作学派集体的东西。由于毕达哥拉斯学派的学者没有留下自己的书面著作，而别人又是把这个学派的成果集体加以介绍的，所以后人很难分清楚哪些成果属于毕达哥拉斯本人，哪些成果属于其门

徒。我们也只好把毕达哥拉斯学派作为一个集体，来评价其思想方式。

毕达哥拉斯学派有两项重要数学成果，一项是发现了毕达哥拉斯数，另一项是发现了黄金分割作图法。从这两项成果中，可以了解到毕达哥拉斯学派的思想特点和经验教训，下面分别予以说明。

一、毕达哥拉斯数的发现

很多读者在中学平面几何课程中都学过勾股定理。这条定理在我国又称为“商高定理”，而在西方一般称为“毕达哥拉斯定理”，因为西方历史文献中记载的这条定理最早是由毕达哥拉斯学派提出来的。

所谓“毕达哥拉斯数”，是指能够满足毕达哥拉斯定理的一组整数。比如，古埃及的数学家已经知道，三边长度比例为3：4：5的三角形是直角三角形，而 $3^2+4^2=5^2$，所以3,4,5就是一组毕达哥拉斯数。另外，古巴比伦的数学家还知道，$5^2+12^2=13^2$，所以 5、12、13 也是一组毕达哥拉斯数。不过，这些数学家只知道毕达哥拉斯数的一些特例，而毕达哥拉斯学派却发现了毕达哥拉斯数的一种公式，即m，$\frac{m^2-1}{2}$，$\frac{m^2+1}{2}$（这里m是奇数）。毕达哥拉斯学派是怎样发现这种公式的？原来，这个学派对数字和图形的关系有一种特殊的理解。他们把数字想象成一些点的组合，这些点可以是星座，也可以是石头或诸如此类的其它东西。因此，由

点组合而成的各种图形都有相应的数字。通过分析图形的关系，就能够了解数字的规律。比如，1，3，6，10，……个点都能组合成三角形，因而 1，3，6，10，……就被称为三角形数（见图 1）。1，4，9，16，……个点都能组合成正方形，因而 1，4，9，16，……就被称为正方形数（见图2）。与此类似，还有长方形数、五边形数、六边形数等等。我们特别注意图 2 所示的正方形数。

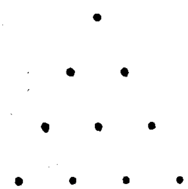


图 1

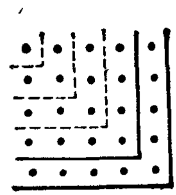


图 2

从图 2 可以看出，由n^2个点组合成的方阵，只有再加上$2n+1$个点，才能构成由$(n+1)^2$个点组合的方阵，即 $n^2+(2n+1)=(n+1)^2$。 （1）

如果令$2n+1=m^2$，那么

$$n=\frac{m^2-1}{2},\quad n+1=\frac{m^2+1}{2} \qquad (2)$$

把（2）式代入（1）式，可得

$$m^2+\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2 \qquad (3)$$

公式（3）正具有毕达哥拉斯定理形式。因此，m，

$\frac{m^2-1}{2}$，$\frac{m^2+1}{2}$就构成一组毕达哥拉斯数。令 $m=3$，5，7，9，……，我们顺次可以得到 3，4，5；5，12，13；7，24，25；9，40，41；……等无限多组毕达哥拉斯数。（当然，这些还不是全部。我们知道，将每组毕达哥拉斯数中各数扩大相同倍数，还会得到新的毕达哥拉斯数。）

由此看来，毕达哥拉斯学派之所以能发现毕达哥拉斯数的一种公式，关键是分析了正方形数的图形。这种思想方式给毕达哥拉斯学派带来了好处，也带来了缺陷。

从好处方面看，毕达哥拉斯学派把数字和图形联系起来考虑问题，无疑使人们对数的规律的认识大大直观化了。抽象的数的规律很难发现，但相应的图形关系却是容易看清楚的。借助图形的分析，可以又多又快地发现数的规律。实际上，毕达哥拉斯学派在数论方面的很多发现，如三角形数、正方形数的一般公式、三角形数和正方形数的关系等等，都是借助图形分析发现的。可以说，在毕达哥拉斯学派那里，已经有了把代数和几何结合起来的思想萌芽。当然，这种思想萌芽与后来的解析几何相比，是极简单粗糙的。但是它毕竟有一定合理之处。

从缺陷方面看，毕达哥拉斯学派对数字和图形关系的理解，使他们得出一些错误结论。比如，他们认为数字既然是一些点的组合，而点是不可再分的，所以只有能表示成整数和整数之比的数是合理的（即有理数），可以研究。而不能表示为整数之比的数是不合理的（即无理数），不能加以研究。因此，他们禁止研究象$\sqrt{2}$之类的数。据说，毕达哥拉斯的一个门徒希帕萨斯(Hippasus)由于发现了无理数，就被

别的门徒扔到海里。这种态度显然是不利于数学发展的。另外，毕达哥拉斯学派认为，既然由点组合而成的各种图形都有相应的数字，那么世界上一切事物的本质就都是数。简言之，“万物皆数”。这种推论显然是没根据的。没根据的推论还在一些具体问题上表现出来。比如，毕达哥拉斯学派认为：奇数个点相加构成的正方形种类是有限的（见图 2），即 $1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$，这里组成边长为 n 的正方形只有唯一的一种方式。但是，由偶数个点相加构成的长方形种类是无限的（见图 3），即 $2+4+6+\cdots\cdots+2n=n(n+1)$。这里组成长为 $n+1$ 而宽为 n 的长方形可以有各种不同的方式，因此，奇数对应于有限，而偶数对应于无限。毕达哥拉斯学派的这种观点，今天看来是近乎可笑的。然而，我们不能简单讥笑毕达哥拉斯学派的上述思想缺陷。因为在根据不足的情况下进行推论的事情，今天也时有发生。况且在毕达哥拉斯学派生活的年代，在当时数学和自然科学知识都很贫乏的情况下，还难以认识到没根据的推论会有多大危险。

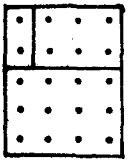


图 3

二、黄金分割的发现

所谓“黄金分割”，指的是这样一个问题：给定一条线段 AB，如何在其上取一点 P，使得 $\frac{AB}{AP}=\frac{AP}{PB}$ 呢？P 点的

确定在美学上有特殊的意义。比如，我们要在一张长为 AB 的桌子上摆一个花瓶，花瓶的位置在 P 点上显得最好看。

毕达哥拉斯学派是在分析正五边形性质时发现黄金分割作图法的。他们发现，正五边形对角线的交点恰好是对角线上的黄金分割点。而这一点所划分出的较大部分，又恰好等于正五边形边长。如果用 d 表示对角线长，s 表示边长，那么就有公式

$$d(d-s)=s^2 \tag{4}$$

公式（4）是需要证明的。毕达哥拉斯学派用一种很巧妙的思想方式，证明了这一点。

首先考虑一系列五边形 $P_1,P_2,\cdots,P_n,\cdots$，它们的边长和对角线长分别为$s_1,s_2,\cdots,s_n,\cdots$和$d_1,d_2,\cdots,d_n,\cdots$，并且有如下关系：

$$d_n=s_{n-1}+d_{n-1},\ s_n=d_{n-1}(s_1=d_1=1) \tag{5}$$

具体说来，就是如下序列

s_n	1	1	2	3	5	8	13	21	…
d_n	1	2	3	5	8	13	21	34	…

让我们观察一下P_1,P_3和P_6的图形（见图4）。

很明显，随着 n 值的增长，这些五边形越来越象正五边形。可以设想，当 n 值趋于无穷大时，这些五边形是会变成正五边形的。于是，这一系列五边形的边长与对角线长的关系，就会转化成正五边形边长与对角线长的关系。从公式

（5）中可以得知

$$d_n(d_n - s_n) - s_n^2 = (-1)^n \qquad (6)$$

这个公式表明，以d_n和$d_n - s_n$为边长的长方形面积，总是略大于或小于以s_n为边长的正方形面积。而且随着n值的增长，两者的差距越来越小。由此可以推断，当n值趋于无穷大时，两者的差距会消失。令d和s分别表示d_n和s_n在n值趋于无穷大时的值，于是立即有

$$d(d-s) = s^2$$

这正好是表示黄金分割关系的公式（4）。

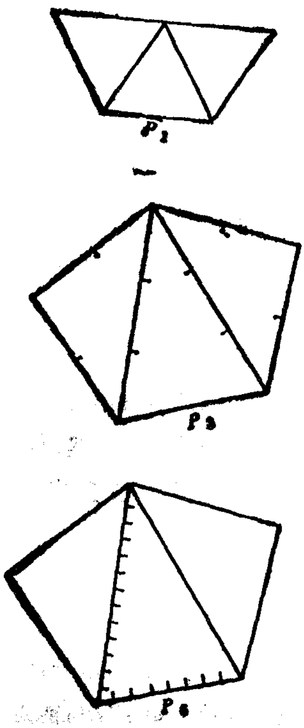


图 4

在今天看来，毕达哥拉斯学派的上述推理方式是很费事的。比如运用今天的极限理论，对公式(6)取极限，我们立即可以得到公式（4）。然而，在毕达哥拉斯学派的那个年代，还没有今天这样的极限理论。又如，根据正五边形的几何性质，能很容易证明公式（4）（欧几里得后来作出了这个证明）。然而，毕达哥拉斯学派却是在发现公式（4）的基础上才找到正五边形作图法的。因此，公式（4）的发现和证明必然要经过曲折迂

回的思路。毕达哥拉斯学派能采取上述推理方式，在当时已经是很巧妙的了。

毕达哥拉斯学派的上述推理方式，基本上是经验归纳方法的产物，但其中也包含了极限理论和数学归纳法的思想萌芽。公式（5）和（6）首先对$n=1$的情况是成立的。然后毕达哥拉斯学派就可以逐次证明公式（5）和（6）对n等于其它自然数的情况也成立，进而证明它们对所有自然数（包括无穷大的情况）都成立。当然，毕达哥拉斯学派的证明并不是严格精确的，其中夹杂一些直观经验和想象的成分。这些成分在发现黄金分割作图法的问题上并未起阻碍作用。恰恰相反，还弥补了毕达哥拉斯学派当时知识的不足。然而，如果把这些成分随便用在其它问题上，那是很可能会出错的。

阿基米德曾经说过，最先讲出一条数学原理的人应该和最先证明这条原理的人一样受到称赞。从毕达哥拉斯学派的上面两项成果中可以看到，获得数学发现往往要比证明数学成果更困难。因此，尽管那些获得数学发现的数学家可能走过弯路，可能带有不少思想毛病，我们也必须尊重其成果，认真研究他们的思想方式，从中挖掘对我们有所启迪的东西。

阿 基 米 德

Archimedes
(公元前287～212年)

阿基米德是古希腊另一位著名的数学家。他生于西西里岛的希腊殖民城市叙拉古（Syracuse），青年时代曾去埃及的亚历山大里亚学习数学，后来回到叙拉古度过其余生。阿基米德兴趣广泛，才智过人，在数学、物理、天文和工程机械等方面都有杰出的成就。我们只评价他在数学方面的思想方式。

阿基米德在数学思想发展中的最重要贡献，是重新建立了数学同科学技术的联系。数学本来是从生产和科学技术的实际问题中产生的。世界各民族所获得的最原始的数学知识，都同原始的科学技术有密不可分的联系。然而，随着数学发展中抽象化程度的增长，出现了一种把数学同科学技术