普通高等教育经济管理类

本科课程教材

高等数学

（下册）

屈思敏 阳妮／主编

中国财政经济出版社

普通高等教育经济管理类本科课程教材

高等数学

（下　册）

屈思敏　阳　妮　主编

中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册/屈思敏，阳妮主编．—北京：中国财政经济出版社，2005.8

普通高等教育经济管理类本科课程教材

ISBN 7－5005－8502－0

Ⅰ．高…　Ⅱ．①屈…②阳…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 089412 号

中国财政经济出版社 出版

URL：http：// ckfz. cfeph. cn

E－mail：ckfz@ cfeph. cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100036

发行处电话：88190406　财经书店电话：64033436

北京牛山世兴印刷厂印刷　各地新华书店经销

787×960 毫米　16 开　15 印张　252 000 字

2005 年 8 月第 1 版　2005 年 8 月北京第 1 次印刷

印数：1—5 000　定价：27.00 元

ISBN 7－5005－8502－0/O·0043

（图书出现印装问题，本社负责调换）

序

在现代社会，各国经济从社会化到国际化、全球化，是一种必然趋势。在这种趋势下，各种经济活动、各类经济联系及经济现象越来越复杂化。面对这纷繁、多姿的经济现象，如何才能从理论上进行更为透彻的理解和把握；面对这嬗变、多彩的经济问题，如何才能更为科学地予以解释并有效地解决，这是现在和未来的经济管理工作者需要认真面对的重要任务。经济的发展，促进了财经教育的发展；经济发展面临的问题，又丰富了财经教育的内容，促进了财经教育改革的纵深发展。

作为地方性的财经院校，其首要任务就是让学生受到系统、科学、严格的专业技能训练，全面而深入地掌握学科的基本理论、基本方法和学科发展前沿动态，了解本地区经济社会发展特点，为使他们走向社会时能够更快适应环境的变化、有效解决现实经济生活的问题，在职业岗位上实现人生价值而奠定基础。

在我国高等教育大众化快速挺进的过程中，高等财经教育的扩张速度进一步加快，高等财经教育的超常规发展，为高等教育大众化的快速实现作出了突出贡献，但也给自身发展带来了一系列问题，如有的“热门”专业逐步变为“冷门”，有的传统专业日渐失去原有的优势，财经类大学生就业也出现比较难的情况等。广西财经学院作为一所地方财经类普通高校，只有加强学校建设、深化教学改革、突出办学特色，才能在强手如林的办学竞争中异

军突起。基于这种认识，我们用了一年的时间，在考察社会对财经人才需要状况、研究国内外同类院校办学经验上，对本科学生的培养方案、课程设置和学科建设等进行了全方位的改革，作为新方案的一个组成部分就是编撰适用于与培养高级应用型的财经人才相配套的系列教材。为了完成这项艰巨的任务，学院成立了财经系列教材编审委员会，精心组织长期从事财经管理、教学与研究的一线专家、教授来参加系列教材的编撰工作。

重点课程、精品课程的建设已成为教育改革所特别关注的突破口。系列教材主要是选择了经济管理类核心课程，而这些核心课程也大多是重点课程和精品课程。同时，考虑到系统性和完整性，这套丛书还包括了一部分经济管理类的基础课程，我们希望给学习者提供一套相对完整的财经类教材。在课程的内容上，我们注重了科学性和前瞻性，结合了当前经济改革的新问题，在编写上，尽可能以通俗易懂的语言深入浅出地介绍深奥的专业知识。

我们力求在以下四个方面表现自己在教材建设的特色：

1. 适应应用性的学习：本系列教材结合地方财经院校教学特点，紧紧围绕培养高级应用人才目标，强调以应用性学习为主，着重从学生的实际动手能力方面进行知识的介绍和技能训练，学生通过学习可以很快地掌握知识要领，提高实际应用的能力，从而突出了应用性学习的特点。

2. 反映研究性的教学：教师是知识的直接传导者，在长期从事教学过程中，积累了丰富的教学经验和优秀的本学科研究成果，这些经验和成果极大地优化了教学过程，是提高教学质量的重要保证。本系列教材中紧扣教学特点适度融入了教师优秀的、得到公认的研究成果，从而突出了研究性教学的特点。

3. 融会创新性的研究：创新是科学的研究方法的特性，本系列教材在知识体系介绍和研究中始终贯穿科学的态度和创新观点，

做到既保持传统的、优秀的知识和方法体系，又以创新的角度去发展和开拓，突出了创新性研究的特点。

4. 体现时代性的知识：新时代下的新知识体系的构成是一门学科的重要组成部分，知识结构推陈出新是学科发展的一个标志。本系列教材结合当前财经发展中的新形势、新问题和新知识，将新知识内容融入教材当中，突出了新时代新知识的特点。

这套系列教材定位于高等财经教育应用型本科的教学。主要作为普通高等财经院校相关课程的选用教材，亦可以作为各层次教育和企业培训教材，也适合广大财经从业人员作为学习参考用书。本套教材还配有辅导用书，以便于教师教学和学生学习参考。

本系列教材在编写过程中得到有关专家和企业的支持和帮助，在此一并表示感谢。由于编写时间仓促，加上编写水平所限，书中有不足之处在所难免，恳请广大读者提出宝贵的意见和建议，以日臻完善。

经济管理类系列教材编委会

2005 年 6 月

前言

高等数学是本科财经院校经济管理类各专业必修的一门重要的基础课程。它对培养和提高学生的思维素质、创新能力、科学精神、治学态度以及用数学解决实际问题的能力都有着非常重要的作用。

本书以满足本科财经类院校经济管理专业的数学教学需要为目标。在教学水平、科学水平、思想水平上符合人才培养目标及本课程教学基本要求；符合认知规律，便于学习和教学。在编写过程中，我们参阅了大量有关教材，充分吸收他人之优点，精选了经济、管理类各专业学生必须掌握的高等数学知识。在章节内容的编排和例题选择上，注意体现高等数学在经济问题中的应用。另外，引进了数学实验课程教学内容，结合本教材内容，介绍计算机软件的使用，通过演示与实验，培养学生利用计算机求解数学问题的能力。

《高等数学》教材分上下两册。上册包括函数的极限与连续、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用等；下册包括多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、常微分方程等内容。

《高等数学》下册教材由屈思敏、阳妮担任主编，莫文娟、林承初、李成群、李静、梁树春、邬桂芬、马铭清、黄玲花、林李、黄勤参编。具体章节撰写人分别为：莫文娟、邬桂芬（第八章的

第一、二、三、四、五节）；林承初、梁树春（第九章）；李成群、阳妮、林李（第十章）；李静、黄玲花、马铭清（第十一章的第一、二、七节，第十二章）；屈思敏、黄勤（第八章的第六节，第十一章的第三、四、五、六节）。全书由屈思敏、阳妮统编，修改，定稿。

本教材得到了戴牧民教授、陈克东教授、邓培民教授的认真审阅和具体指导，在此表示诚挚的感谢。

由于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

编者

2005 年 6 月

经济管理类系列教材编委会

目录

第八章
多元函数微分学

多元函数微分学是一元函数微分学的推广，本章以二元函数为主，介绍多元函数的概念、二元函数的极限与连续；偏导数与全微分的概念和计算，主要包括复合函数和隐函数的求导法。在偏导数的应用中，包括多元函数的极值，最大值和最小值问题，条件极值与拉格朗日乘数法，以及需求对价格的偏弹性等。

第一节　空间解析几何简介

一、空间直角坐标系的概念

在空间中取一定点 O，过 O 点作三条互相垂直的直线 Ox，Oy，Oz，都以 O 为原点，取相同的单位长度，并按右手系规定其正方向（即将拇指、食指和中指叉开排列，拇指向上为 Oz 轴的正方向，食指和中指的指向各为 Ox 和 Oy 轴的正方向），这样三条直线就分别称为 x 轴（横轴），y 轴（纵轴）和 z 轴（竖轴），统称为坐标轴。通常把 x 轴和 y 轴放在水平面上，z 轴则是铅垂线。由这三条坐标轴组成了空间直角坐标系。

三条轴中任意两条轴确定一个平面，x 轴和 y 轴确定的平面称为 xy 平面。

仿此，有 yz 平面和 zx 平面。

三个平面将空间分为 8 个部分，每个部分称为一个卦限，如图 8－1。

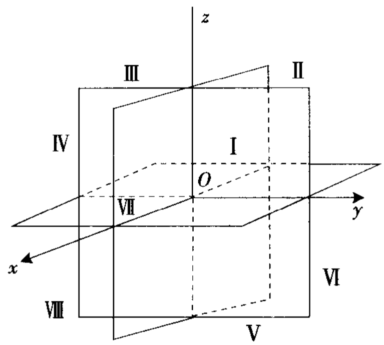

图8-1

空间直角坐标系确定后，对于空间一点 M，过 M 点作三个平面分别垂直于 x 轴，y 轴和 z 轴，且与它们分别交于 P，Q，R 三点（图8-2），设 P，Q，R 三点关于 x 轴、y 轴、z 轴的坐标分别为 x，y，z，则空间一点 M 惟一地确定了由三个数构成的有序数组 (x, y, z)；反之，对任意的有序数组 (x, y, z)，在 x 轴、y 轴、z 轴上分别取 P，Q，R 三点，使它们的坐标分别为 x，y，z，过点 P，Q，R 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，这三个平面相交于一点，则由有序数组 (x, y, z) 惟一地确立了空间的一个点 M，于是空间一点 M 和有序数组 (x, y, z) 建立了一一对应关系。

我们称这三个数构成的有序数组 (x, y, z) 为点 M 的坐标，记为 $M(x, y, z)$，如图8-2。

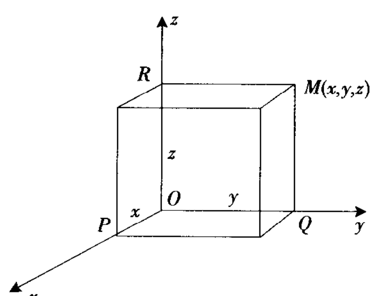

图8-2

例如，坐标轴原点 O 的坐标为 $(0, 0, 0)$，x 轴上任一点的坐标为 $(x, 0, 0)$，y 轴上任一点的坐标为 $(0, y, 0)$，z 轴上任一点的坐标为 $(0, 0, z)$，xy 平面上任一点的坐标为 $(x, y, 0)$，yz 平面上任一点的坐

标为 $(0, y, z)$，zx 平面上任一点的坐标为 $(x, 0, z)$。

二、空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的距离

给定空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，过 M_1，M_2 各作三个平面分别垂直于三条坐标轴。这六个平面构成一个以线段 M_1，M_2 为一条对角线的长方体，图 8－3。

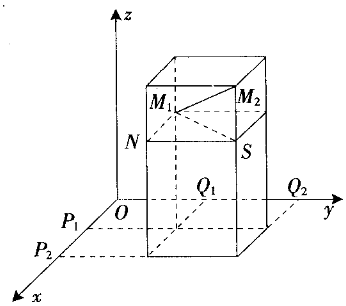

图 8－3

由图 8－3 可知

$$|M_1M_2|^2 = |M_2S|^2 + |M_1S|^2$$
$$= |M_2S|^2 + |M_1S|^2 + |NS|^2$$

过 M_1，M_2 分别作垂直于 x 轴的平面，交 x 轴于点 P_1，P_2，则

$$OP_1 = x_1,\ OP_2 = x_2$$

因此

$$|M_1N| = |x_2 - x_1|,\quad |M_2S| = |z_2 - z_1|$$

同理可得

$$|NS| = |y_2 - y_1|$$

因此

$$|M_1M_2|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

于是，求得点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$ 之间的距离公式为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (8-1-1)$$

如果点 M_1，M_2 均位于 xy 平面上，即 $z_1 = z_2 = 0$，则得 xy 平面上两点 $M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$ 之间的距离公式

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

特别地，点 $M(x, y, z)$ 与原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$|MO| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

例 1 求点 $M(1, 3, 5)$ 与原点及各坐标轴间的距离。

解 与原点的距离 $d_0 = \sqrt{1^2+3^2+5^2} = \sqrt{35}$

与 x 轴的距离 $d_x = \sqrt{3^2+5^2} = \sqrt{34}$

与 y 轴的距离 $d_y = \sqrt{1^2+5^2} = \sqrt{26}$

与 z 轴的距离 $d_z = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$

例 2 求证以 $A(4, 1, 9)$，$B(10, -1, 6)$，$C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形。

证明 $|AB| = \sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2} = 7$

$|AC| = \sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2} = 7$

$|BC| = \sqrt{(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2} = 7\sqrt{2}$

因为 $|AB| = |AC| = 7$，所以三角形 ABC 为等腰三角形。

证毕。

三、曲面与方程

前面，我们已经建立了空间中的一点与一个三元有序数组 (x, y, z) 之间的一一对应关系。与平面解析几何中建立曲线与方程的对应关系一样，也可以建立空间曲面与包含三个变量的方程

$$F(x, y, z) = 0 \tag{8-1-2}$$

之间的对应关系。

定义 1 如果曲面 S 上任意一点的坐标 (x, y, z) 都满足方程 $F(x, y, z) = 0$，而满足方程 $F(x, y, z) = 0$ 的点 (x, y, z) 都在曲面 S 上，那么方程 $F(x, y, z) = 0$ 称为曲面 S 的方程，曲面 S 就称为方程 $F(x, y, z) = 0$ 的图形，图 8-4。

例如，$x^2+y^2+z^2=1$ 是以原点为球心，半径为 1 的球面方程。

定义 1 的实质就是，方程 (8-1-2) 的解的全体 $\{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0\}$ 组成曲面 S，而且曲面 S 也仅仅是由 (x, y, z) 这样一些点组成。即曲面 S 与方程 $F(x, y, z) = 0$ 是一一对应的关系。

如果方程 $F(x, y, z) = 0$ 对 x, y, z 都是一次的，则它所对应的曲面就是一个平面。

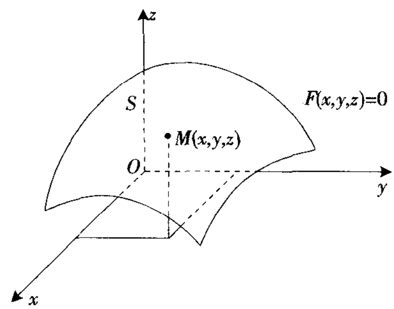

图 8-4

如果 $F(x, y, z)=0$ 是一个关于 x, y, z 的二次方程，则它所对应的曲面叫做二次曲面。

常见的二次曲面有：球面，椭球面，柱面，锥面等。

一般说来，关于曲面与方程，大致有两种类型的问题：一类是已给某种曲面或作为在某种条件限制下动点的轨迹，或作为适合某种几何条件的点的全体，怎样去求曲面的方程；另一类是已给某种方程，如何去作出与此方程所对应的图形。对于第一类题，可以先建立适当的空间直角坐标系，然后记曲面上动点轨迹为 $M(x, y, z)$，再将已给条件转换为关于 x, y, z 的方程即可。对于第二类问题，如果所给的方程形式比较简单或较熟悉，则可直接画出已给方程的图形。

此外，也可用“平面截割法”来对所给的问题进行分析和推断。

如果从曲面 $F(x, y, z)=0$ 中解出 z 来，则可得到形如

$$z=f(x, y)$$

的曲面方程，在以后关于二元函数问题的讨论中可以知道，二元函数 $z=f(x, y)$ 的几何表示通常就是一个空间曲面。

下面通过例子介绍一些简单的曲面（如平面，球面，柱面）的方程[在空间直角坐标系下，读者不难建立曲面 S 与三元方程 $F(x, y, z)=0$ 的对应关系]。

例 3　一动点 $M(x, y, z)$ 与二定点 $M_1(1, 2, 3)$，$M_2(2, -1, 4)$ 的距离相等，求此动点 M 的轨迹方程。

解　依题意有

$$|MM_1|=|MM_2|$$

由两点间距离公式得

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$$

化简后可得 M 点的轨迹方程为

$$2x-6y+2z-7=0$$

它是线段 M_1M_2 的一个垂直平分平面。

一般说来，空间中任意一个平面的方程为三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

其中 A，B，C，D 为常数，且 A，B，C，D 不全为0。

例 4 求三个坐标平面的方程。

解 因为 xy 平面上任意一点的坐标为（x，y，0），即平面 xy 上任意一点的坐标必有 $z=0$，满足 $z=0$ 的点也必在平面上，所以 xy 平面上的方程为$z=0$

同理，yz 平面上的方程为 $x=0$；xz 平面上的方程为 $y=0$。

例 5 求以点 M_0（x_0，y_0，z_0）为球心，R 为半径的球面方程。

解 设球面上任意一点为 M（x，y，z），依题意有

$$|MM_0|=R$$

由空间两点间距离公式，有

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

或

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

此方程即为所求的球面方程，其图形如图 8-5。

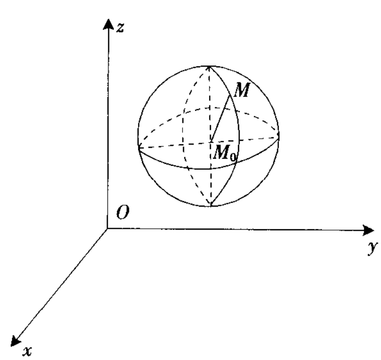

图 8-5

如果球心就是坐标原点，则球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$是球面的上半部；$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$是球面的下半部。