

郝雨淋 主编

代数 高中

智能 训练



高中代数智能训练

郝雨淋 段真引 翟工拓 许炽雄
刘金玲 田庆双 杜英秋 陈东军 编

农村读物出版社

1988年·北京

高中代数智能训练

主编 郝雨淋

责任编辑 王炜琨

农村读物出版社 出版
北京市门头沟胶印厂印刷
新华书店北京发行所 发行

787×1092毫米1/32 13.4·印张 300千字
1988年9月第1版 1988年9月北京第1次印刷
印数:1—20000 定价:3.40元
ISBN 7—5048—0523—8 G·175

目 录

第一章 幂函数、指数函数和对数函数	1
甲组题	1
一、集合与对应	1
二、幂函数、指数函数和对数函数	14
乙组题	34
提示或答案	47
第二章 数列与数学归纳法	114
甲组题	114
一、数列	114
二、数学归纳法	134
乙组题	139
提示或答案	151
第三章 不等式	229
甲组题	229
乙组题	245
提示或答案	259
第四章 复数	323
甲组题	323
乙组题	336
提示或答案	340

第五章 排列与组合, 二项式定理	373
甲组题	373
一、排列与组合	373
二、二项式定理	383
乙组题	388
提示或答案	396

第一章 幂函数、指数函数和对数函数

甲组题

一、集合与对应

1. 选择题:

(1) 下面四个命题中, 正确的是 ()

(A) 小于 90° 的角是锐角集合中的元素;

(B) $\sin \alpha$ ($\alpha \in R$) 是无理数集合中的元素;

(C) 正方形是菱形集合中的元素;

(D) 方程是线性方程集合中的元素.

(2) 集合 $A = \{ (x, y) \mid y = |x| \}$, 集合 $B = \{ (x, y) \mid x \in R, y > 0 \}$, 它们之间的关系式是 ()

(A) $A \subset B$; (B) $A \subseteq B$; (C) $B \subset A$; (D) A 与 B 之间没有包含与被包含的关系.

(3) 一个集合有 a 、 b 、 c 、 d 四个元素, 这个集合的子集个数共有 ()

(A) 8 个; (B) 10 个; (C) 12 个; (D) 16 个.

(4) 集合 $M = \{ x \mid 2^x = 4, x \in R \}$, $N = \{ x \mid$

$\log_2 x^2 = 2, x \in R \}$, 则 $M \cup N$ 等于 ()

(A) $\{2\}$; (B) $\{2, -2\}$; (C) $\{2, 0\}$;

(D) ϕ .

(5) 已知集合 $A = \{x \mid 3x^2 + x - 4 \geq 0\}$, $B = \{x \mid x^2 \leq 1\}$, 全集为 R , 则 $A \cap \overline{B} = (\quad)$

(A) $\{x \mid x \leq -\frac{4}{3} \text{ 或 } x > 1\}$; (B) $\{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x > 1\}$;

(C) $\{x \mid x \leq -\frac{4}{3} \text{ 或 } x > 1\}$; (D) $\{x \mid x = 1\}$.

(6) 设有非空集合 M, N , 且 $M \subset N$, I 为全集, 则下列集合中为空集的是 $(\quad)$

(A) $M \cap N$; (B) $\overline{M} \cap N$; (C) $\overline{M} \cap \overline{N}$;

(D) $M \cap \overline{N}$.

(7) 图 1-1 中 I 为全集, 把阴影部分用集合 A, B 表示为 $(\quad)$

(A) $A \cap \overline{B}$; (B) $\overline{A} \cup B$; (C) $\overline{A} \cap B$; (D) $\overline{A} \cap \overline{B}$.

(8) 已知 f 是从集合 A 到集合 B 的一个对应, “ f 不是一一映射” 是 “ f 不是映射” 的 $(\quad)$

(A) 充分条件; (B) 必要条件;

(C) 充要条件; (D) 既非充分又非必要条件.

(9) 对应关系 $f: x \rightarrow y = \log_2 x$ 使集合 M 的元素 x 对应于集合 N 的元素 y . 下列哪种是集合 M 到集合 N 上的映射?

$(\quad)$

(A) $M = R^+, N = R^+$;

(B) $M = R^+, N = \{\text{非负实数}\}$;

(C) $M = \{\text{非负实数}\}, N = R$; (D) $M = R^-, N = R$.

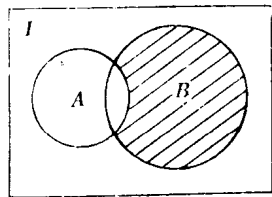


图 1-1

(10) 在下列各式中, 正确的有 ()

① $2 \subset \{x \mid x \leq 10\}$; ② $2 \in \{x \mid x \leq 10\}$; ③ $\{2\} \subset \{x \mid x \leq 10\}$; ④ $\phi \in \{x \mid x \leq 10\}$; ⑤ $\phi \subset \{x \mid x \leq 10\}$; ⑥ $\phi \subset \{x \mid x = 10\}$.

(A) 1个; (B) 2个; (C) 3个; (D) 4个.

(11) 若 $A = \{x \mid x^2 - 12 = 0\}$, $a = 2^{\log_2 11}$, 则下列关系正确的是 ()

(A) $a \subset A$; (B) $a \in A$; (C) $\{a\} \subset A$;

(D) $\{a\} \in A$.

(12) 设 $n \in N$, $P = \{x \mid x = n\}$, $Q = \{x \mid x = \frac{n}{2}\}$, $R = \{x \mid x = n - \frac{1}{2}\}$, 那么下面正确的是 ()

(A) $Q \subset P$; (B) $Q \subset R$; (C) $Q = P \cup R$;

(D) $Q = P \cap R$.

(13) α 表示直线倾斜角的集合; β 表示两异面直线所成角的集合; γ 表示复数幅角主值的集合; θ 表示直线与平面所成角的集合, 则它们的关系式为 ()

(A) $\alpha \subset \beta \subset \gamma \subset \theta$; (B) $\beta \subset \theta \subset \alpha \subset \gamma$;

(C) $\beta \subset \theta \subset \gamma \subset \alpha$; (D) $\beta \subset \alpha \subset \theta \subset \gamma$.

(14) 方程 $16\sqrt{(0.25)^{5-\frac{x}{4}}} = 2^{x+1}$ 的解集为 ()

(A) $\{0, 24\}$; (B) $\{0\}$; (C) $\{24\}$; (D) ϕ .

(15) 下面给定的四对名词中, 是函数和反函数关系的是 ()

(A) 集合与映射; (B) 映射与逆映射;

(C) 定义域与值域; (D) 排列与组合.

(16) 集合 x 与集合 y 能建立一一映射的是 ()

(A) $x = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $y = \{2, 4, 6, 8\}$;

(B) $x = \{\text{有理数}\}$, $y = \{\text{数轴上的点}\}$;

(C) $x = \{\text{三角形}\}$, $y = \{\text{圆}\}$;

(D) $x = \{\text{平面内的点}\}$, $y = \{\text{有序实数对}(a, b)\}$.

(17) 设 a, b, c 是非零实数, 则 $M = \frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|}$

$+ \frac{c}{|c|} + \frac{abc}{|abc|}$ 的值所组成的集合为 ()

(A) $\{4\}$; (B) $\{-4\}$; (C) $\{-4, 0, 4\}$; (D) $\{0\}$.

(18) 已知集合 $M = \{1, 2, (m^2 - 3m - 1) + (m^2 - 5m - 6)i\}$, $N = \{-1, 3\}$, 且 $M \cap N = \{3\}$, 则 m 的值为 ()

(A) -1 或 4 ; (B) -1 或 6 ; (C) -1 ; (D) 4 .

(19) 若按对应关系 $f: x \rightarrow y = x^2$, 使集合 P 的元素 x 对应于集合 Q 的元素 y . 在下列情况中, f 是从 P 到 Q 的一一映射的是 ()

(A) $P = R$, $Q = R$;

(B) $P = R$, $Q = \{\text{非负实数}\}$;

(C) $P = \{\text{非负实数}\}$, $Q = R$;

(D) $P = \{\text{非负实数}\}$, $Q = \{\text{非负实数}\}$.

(20) 设集合 $M = \{(x, y) \mid 4x + y = 6\}$, $N = \{(x, y) \mid 3x + 2y = 7\}$, 则 $M \cap N$ 等于 ()

(A) $(1, 2)$; (B) $\{x = 1\} \cup \{y = 2\}$;

(C) $\{1, 2\}$; (D) $\{(1, 2)\}$.

2. 填空题:

(1) 给定映射 $f: (x, y) \rightarrow (x+y, x-y)$, 在映射 f 下, 象 $(3, 1)$ 的原象是 _____.

(2) 若 $A = \{x \mid f(x) > 0\}$, $B = \{x \mid g(x) > 0\}$,
 $C = \{x \mid f(x) < 0\}$, $D = \{x \mid g(x) < 0\}$,

则不等式 $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ 的解集用集合 A, B, C, D 表示为 _____.

(3) 若 $A = \{1, 2, x\}$, $B = \{2, 5\}$, 且 $A \cap B = B$, 则 $x =$ _____.

(4) 已知集合 $A = \{0, 1, \frac{\pi}{2}, 2\pi\}$, $B = \{\sin a \mid a \in A\}$.

若用列举法表示集合 B , 则 $B =$ _____.

(5) 设集合 $A = \{a \mid 2^a = 3\}$, $B = \{b \mid \lg \frac{1}{2} b^2 = 1\}$, 用列举法表示 $A \cup B$ 应是 _____.

(6) 已知 $M = \{x, y \mid y \geq x^2\}$, $N = \{(x, y) \mid x^2 + (y-a)^2 \leq 1\}$, 那么使 $M \cap N = N$ 成立的充要条件是 _____.

3. 判断下列各题中给定的元素是否属于集合 A, B, C :

(1) 元素: 1, 3, 4, 12.

集合: $A = \{\text{被 } 2 \text{ 整除的自然数}\}$,

$B = \{\text{被 } 4 \text{ 整除的自然数}\}$,

$C = \{\text{被 } 3 \text{ 整除的自然数}\}$;

(2) 元素: 与圆心 O 的距离为 3 的一点 P .

集合: $A = \{\text{与圆心 } O \text{ 的距离大于 } 2 \text{ 的点}\}$.

$B = \{\text{与圆心 } O \text{ 的距离小于 } 2 \text{ 的点}\},$

$C = \{\text{与圆心 } O \text{ 的距离等于 } 2 \text{ 的点}\};$

(3) 元素: 边长是 1 的正方形 Q .

集合: $A = \{\text{多边形}\},$

$B = \{\text{平行四边形}\},$

$C = \{\text{四面体}\};$

(4) 元素: $f(x) = x^2 + 2x + 3.$

集合: $A = \{\text{单项式}\},$

$B = \{\text{多项式}\},$

$C = \{\text{代数式}\};$

(5) 元素: 坐标平面上的点 $P_1(1, 2), P_2(0, 3).$

集合: $A = \{(x, y) : 2x^2 - y = 0\},$

$B = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 5\},$

$C = \{(x, y) : x^3 + y^2 = 9\}.$

4. 用适当的方法表示下列各集合, 并指出哪些是有限集合?

哪些是无限集合?

(1) 所有被 3 整除的数;

(2) 方程 $x^2 - x - 12 = 0$ 的解;

(3) 闭区间 $[-1, 1]$ 中的全体实数;

(4) 坐标平面上, 中心在原点, 长轴是 8, 短轴是 6 的椭圆上所有的点.

5. 把下列各集合用另一种方法表示:

(1) $\{\text{我国古代四大发明}\};$

(2) $\{1, 2, 3, 4, 5\};$

(3) $\{x : x - 1 > 3\};$

(4) 小于 20 的素数).

6. 判断下列各组中的两个集合, 哪一个是另一个的子集? 是

真子集还是相等的集合？分别用符号“ $\subset$ ”、“ $\supset$ ”或“ $=$ ”表示：

- (1) $A = \{\text{正整数}\}$ 和 $B = \{\text{非负整数}\}$ ；
- (2) $A = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$ 和 $B = \{2, 3\}$ ；
- (3) $A = \{\text{椭圆}\}$ 和 $B = \{\text{圆}\}$ ；
- (4) $A = \{12\text{的质因数}\}$ 和 $B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ ；
- (5) $A = \{\text{坐标平面上，以原点为中心，以 } r \ (r \geq 0) \text{ 为半径的圆上的点}\}$ 和 $B = \{\text{坐标适合于方程 } x^2 + y^2 = r^2 \text{ 的点}\}$ ；
- (6) $A = \{0\}$ 和 $B = \phi$ 。

7. 在下列各题中的__处填上适当的符号 ($\in$, $\notin$, $=$, $\subset$, $\supset$)：

- (1) ϕ __ $\{a\}$ ；
- (2) a __ $\{a\}$ ；
- (3) $\{a\}$ __ $\{a\}$ ；
- (4) $\{a\}$ __ $\{a, b\}$ ；
- (5) a __ $\{b, c, d\}$ 。

8. (1) 集合 $A = \{0, 1, 2\}$ 的所有子集共有多少个？把它们写出来；

(2) 若集合 B 中含有 n 个元素，它的子集共有多少个？

9. 举出两个集合 A 与 B 的实例，分别使得：(1) $A \subset B$ ；

(2) $A \subseteq B$ ；(3) $A = B$ ；(4) $A \not\subseteq B^*$ ；(5) A 是空集， B 是只有一个元素的集合。

10. 已知两个集合 A 和 B ，求 $A \cap B$ ：

- (1) $A = \{\text{正数}\}$ ， $B = \{\text{非负数}\}$ ；
- (2) $A = \{3\text{的倍数}\}$ ， $B = \{12\text{的约数}\}$ ；

* “ $A \not\subseteq B$ ”表示 B 不包含 A 。

(3) $A = \{\text{直线 } 2x + y = 4 \text{ 上的点}\}$, $B = \{\text{直线 } x - 3y = -5 \text{ 上的点}\}$;

(4) $A = \{x: x + 1 > 0\}$, $B = \{x: x - 1 < 3\}$;

(5) $A = \{\text{有理数}\}$, $B = \{\text{无理数}\}$.

(6) $A = \{\text{平面 } P \text{ 上的点}\}$, $B = \{\text{与平面 } P \text{ 不平行的平面 } Q \text{ 上的点}\}$.

11. 已知两个集合 A 和 B , 求 $A \cup B$:

(1) $A = \{\text{奇数}\}$, $B = \{\text{偶数}\}$;

(2) $A = \{\text{正数}\}$, $B = \{\text{负数}\}$;

(3) $A = \{x: x < -2\}$, $B = \{x: x > 3\}$;

(4) $A = \{\text{三角形}\}$, $B = \{\text{钝角三角形}\}$;

(5) $A = \{\text{整式}\}$, $B = \{\text{分式}\}$.

12. 已知两个集合 A 和 B , 求 A 、 B 的交集和并集.

(1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 5, 6, 8\}$;

(2) $A = \{6 \text{ 的质因数}\}$, $B = \{10 \text{ 的质因数}\}$;

(3) $A = \{x: x > 2\}$, $B = \{x: x < 3\}$;

(4) $A = \{(x, y): 2x + y = 4\}$,

$B = \{(x, y): 3x - 2y = -1\}$;

(5) $A = \{(x^2 - y^2)(2x + y) \text{ 所含的一次因式}\}$,

$B = \{(4x^2 - y^2)(x + y) \text{ 所含的一次因式}\}$.

13. 设 $A = \{\text{偶自然数}\}$, $B = \{\text{奇自然数}\}$, $C = \{0\}$,

$D = \{\text{素数}\}$. 求 (1) $A \cup B$; (2) $A \cup B \cup C$;

(3) $B \cap D$; (4) $A \cap D$; (5) $A \cap B$.

14. 设全集用 I 表示.

(1) 已知 $I = N = \{\text{自然数}\}$, $A = \{\text{偶自然数}\}$, 求 $\bar{A}$;

(2) 已知 $I = R = \{\text{实数}\}$, $A = \{x: x+1 > 0\}$, 求 $\overline{A}$;

(3) 已知 $I = \{\text{有理式}\}$, $A = \{\text{整式}\}$, 求 $\overline{A}$;

(4) 已知 $I = \{\text{圆锥曲线}\}$, $A = \{\text{抛物线}\}$, 求 $\overline{A}$.

15. 设全集 $I = \{x: 2 \leq x \leq 20, x \in \text{整数集 } Z\}$,

$A = \{4 \text{ 的倍数}\}$, $B = \{3 \text{ 的倍数}\}$, $C = \{\text{素数}\}$,

$D = \{\text{偶数}\}$, 求: (1) $\overline{D}$; (2) $A \cup B$; (3) $B \cup C$;

(4) $B \cap C$; (5) $C \cap \overline{D}$; (6) $\overline{A}$; (7) $\overline{D \cap C}$.

16. 分别写出下面两个集合所含的所有元素:

(1) $A = \{x: (x+1 < 6) \cap (x > 3), x \in N\}$;

(2) $B = \{x: (x+2 < 10) \cap (x+1 > 5), x \in N\}$.

17. 下面的韦恩 (Venn) 图中, A 、 B 、 C 表示集合, 用 A 、 B 、 C 之间的关系表示:

(1) 阴影部分 (见图 1-2)

(2) ① 阴影重叠部分 (如图 1-3) ② 阴影部分, ③ 非阴影部分.

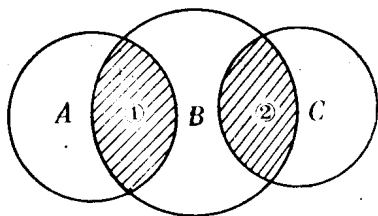


图 1-2

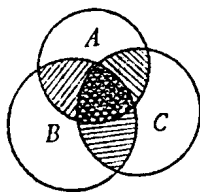


图 1-3

18. 试用韦恩图表明下列各集合之间的关系:

(1) $A = \{\text{三角形}\}$, $B = \{\text{直角三角形}\}$, $C =$

{等腰三角形}， $D = \{\text{等腰直角三角形}\}$ ；

(2) $A = \{\text{四边形}\}$ ， $B = \{\text{平行四边形}\}$ ， $C = \{\text{矩形}\}$ ， $D = \{\text{菱形}\}$ ， $E = \{\text{正方形}\}$ ；

(3) $A = \{\text{复数}\}$ ， $B = \{\text{实数}\}$ ， $C = \{\text{有理数}\}$ ， $D = \{\text{整数}\}$ 。

19. 下列箭头图表示集合 x 到集合 Y 的对应。

试问：

(1) 哪些是一一对一，一对多，多对一，多对多的对应？

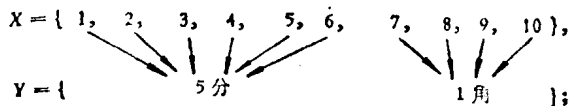
(2) 哪些是单值对应？哪些是多值对应？

(3) 单值对应中哪些是一一对应？

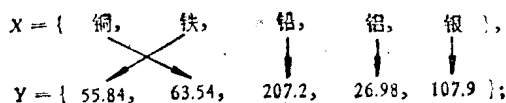
甲。



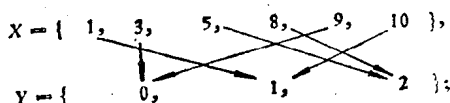
乙. X 是乘坐公共汽车的站数的集合， Y 是票价 的集合。



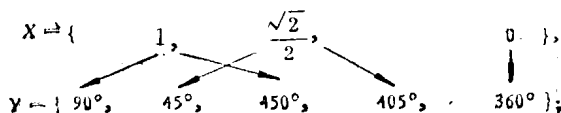
丙. X 是一些金属元素的集合, Y 是原子量的集合.



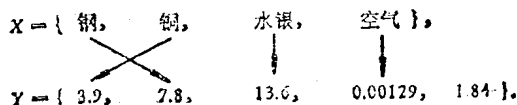
丁. X 是自然数的子集, Y 是被 3 除所得的余数的集合.



戊. X 是一些角度的正弦值的集合, Y 是角度的集合.



己. X 是一些物质的集合, Y 是物质比重的集合 (单位: 克/厘米³).



20. 试建立集合 X 到 Y 之间的某一种一一对应关系:

$$(1) X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$Y = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\};$$

$$(2) X = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\},$$

$$Y = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\};$$

$$(3) X = \{\widehat{\text{圆弧 } AB \text{ 上的点}}\}, Y = \{\text{弦 } AB \text{ 上的点}\};$$

$$(4) X = \{\triangle ABC \text{ 底边 } BC \text{ 上的点}\}, Y = \{\text{与 } \triangle ABC \text{ 底边 } BC \text{ 平行的截线 } B'C' \text{ 上的点}\}.$$

21. 下列各题中两个集合之间能建立一一对应关系吗? 为什么?

$$(1) X = \{1, 2, 3, 4, 5\}, Y = \{1, 3, 5, 7\};$$

$$(2) X = \{1, 2, 3, 4, \dots, k, \dots\},$$

$$Y = \{n+1, n+2, n+3, n+4, \dots, n+k, \dots\};$$

$$(3) X = \{\text{有理数}\}, Y = \{\text{数轴上的点}\};$$

$$(4) X = \{\text{平面上的点}\}, Y = \{\text{有序实数对 } (x, y)\};$$

$$(5) X = \{\text{平面上的曲线}\}, Y = \{\text{方程 } f(x, y) = 0\}.$$

22. 如图 1-4.

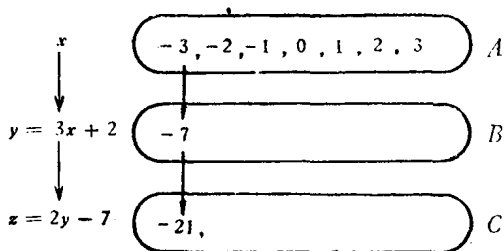


图 1-4