# 随机积分与不等式

▶ 闫理坦　鲁立刚　许志强 编著

科学出版社
www.sciencep.com

# 随机积分与不等式

闫理坦　鲁立刚　许志强　编著



科学出版社
北京

# 内 容 简 介

本书讨论了在随机积分中的一些不等式，着重介绍随机不等式，特别是关联于连续过程的不等式. 本书分为两个部分：第一部分介绍连续鞅、连续积分与随机微分方程；第二部分介绍近年来在连续鞅与随机微积分中发现的不等式，其中一些结果是作者的最新研究成果.

本书可供高等院校数学系高年级本科生、研究生和从事随机分析研究工作的数学工作者阅读.

**图书在版编目（CIP）数据**

随机积分与不等式/闫理坦等编著. —北京：科学出版社，2005

ISBN 7-03-014942-4

Ⅰ.随… Ⅱ.闫… Ⅲ.随机积分-不等式-研究 Ⅳ.O172.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 006981 号

责任编辑：李 锋 范庆奎／责任校对：李奕萱

责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2005年2月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2005年2月第一次印刷 印张：12 1/2

印数：1—1 500 字数：228 000

**定价：38.00 元**

# 前　言

随机微积分起源于 Markov 过程的构造, 是日本学者 K. Itô 在 20 世纪 40 年代创立的. 按照 K. Itô 的说法, 随机分析学就是添加了随机要素的分析学. 正如在他被授予 1987 年 Wolf 数学奖时对他的贡献评价的那样, 他使我们对 Markov 过程样本路径的无穷小发展有了完全的认识, 他的随机分析可以看作随机王国中的牛顿定律, 它提供了支配自然现象的微分方程和隐藏着的概率机制之间的直接翻译过程, 主要成分是对 Brown 运动的函数的微分和积分运算, 由此而产生的理论是近代纯粹与应用概率论的基石. 经过六十多年的发展, 已成为概率论中最活跃、研究领域极其广泛的分支.

作为这个分支研究基础的鞅与随机积分, 近几十年来先后出现了很多这些方面的好书, 如文献 [92], [42], [43], [14], [23], [78], [53] 等著名专著. 然而专门介绍连续过程的随机不等式的书却不多见, 这方面的一些随机不等式往往是散见于一些专著之中的某些章节. 编写本书的目的, 一方面是力图将这些专著中的随机不等式作一个总结和较为浅显的阐述并辅以笔者学习的体会; 另一方面是向初学者提供一个较为浅显的介绍各种类型随机不等式及其证明技巧的入门书, 为有兴趣的初学者提供一个入门的教科书.

本书着重介绍随机不等式, 特别是关联于连续过程的不等式. 本书假定读者具有测度论、随机过程论基础以及离散鞅论等基本知识, 在这个基础上书中的内容基本自封. 本书的读者对象是大学高年级学生、研究生及需要了解这方面知识的科技人员.

本书由两部分共 8 章组成. 第一部分由第 1 章、第 2 章与第 3 章构成, 介绍连续鞅、随机积分与随机微分方程. 这一部分是后一部分的基础, 为阅读第二部分提供必要的准备. 第二部分由后 5 章构成, 是本书重点介绍的内容, 基本涵盖了近些年来在连续鞅与随机微积分中发现的不等式, 一些结果是作者们最新的研究成果. 第 4 章介绍著名的 Burkholder-Davis-Gundy 不等式并将其扩张到被任意非负随机变量停止的鞅. 第 5 章以 Barlow-Yor 不等式为核心介绍关联于鞅局部时的一些不等式. 特别地, 在这一章里我们介绍了在一些专著中很难看到的关于 Brown 局部时 Cauchy 主值的 Burkholder -Davis-Gundy 型不等式. 第 6 章我们讨论在鞅论中起着重要作用的 $BMO$ 及与其相关联的不等式. 第 7 章我们研究重随机积分的一些不等式. 在第 8 章中我们详细介绍了一类一维扩散过程的 $L^p$ 估计, 作为例子我们讨论了 Ornstein-Uhlenbeck 过程、Bessel 过程以及具有漂移的 Brown 运动:

$$X_t = B_t - \mu t, \qquad t \geqslant 0, \mu > 0$$

等的极大值不等式.

由于时间仓促加之作者水平、所涉及的主题及篇幅的限制, 书中难免挂一漏万, 瑕疵也会不少, 恳请翻阅本书的读者多提意见, 不吝赐教.

最后, 作者非常感谢多年来给予我们关心和帮助的人们, 感谢科学出版社的大力支持. 借本书的出版之际作者之一闫理坦向在日本留学期间给予他悉心教导与培养的两位导师 N. Kazamaki 与 K. Kobayashi 教授表示衷心的感谢, 同时也衷心地感谢多年来一直给予他关心和帮助的老师 N. Yoshida 教授.

作　者

2004 年 9 月

# 目　　录

# 第一部分

# 连续鞅与随机积分的准备

原书空白页

# 第 1 章 连 续 鞅

## 1.1 过程与停时

在本书中, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ 分别表示非负整数集合与实数集合, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, 并且我们恒假设 $a \wedge b = \min\{a,b\}$, $a \vee b = \max\{a,b\}$. 进一步地, 我们将带有角标的字母 $C$ 或 $c$ 表示依赖于角标的正常数, 并且在不同的位置它们的值可以不同.

假设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 为一给定的完备概率空间. 考虑 $\mathscr{F}$ 的部分 $\sigma$- 代数构成的类 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, 如果以下条件成立:

(1) 当 $s \leqslant t$ 时, $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$;

(2) 对所有的 $t \geqslant 0$, $\mathscr{F}_t = \cap_{s>t}\mathscr{F}_s$;

则我们称这个类为 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的一个流, 流 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 被称为满足通常条件, 如果 $\mathscr{F}_0$ 包含所有概率等于零的集合. 今后我们总假设这个通常条件成立. 直观地讲, $\mathscr{F}_t$ 是到时刻 $t$ 为止, 能够观测到的事件的全体.

定义在这个概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的随机过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 被称为适应于流 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 的, 如果对于每一个 $t \geqslant 0$, $X_t$ 是 $\mathscr{F}_t$- 可测的, 记为 $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$. 赋予流 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 的概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P, (\mathscr{F}_t))$ 被称为带流概率空间或漏斗空间.

**定义 1.1.1** 定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的 $(\mathscr{F}_t)$- 适应过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 被称为鞅, 如果下面的条件成立:

(1) 对于每一个 $t \geqslant 0$, $E[|X_t|] < \infty$;

(2) 对于所有的 $s, t \geqslant 0$, $s \leqslant t$, $E[X_t|\mathscr{F}_s] = X_s$.

如果定义中 (2) 的等号分别换成 $\leqslant$ 或 $\geqslant$, 则分别称 $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 为下鞅或上鞅. 当 $(\mathscr{F}_t)$ 固定时, 我们可以略去这个流. 一个鞅 $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 称为 $L^p\,(p \geqslant 1)$-有界鞅 (或上鞅、下鞅), 如果

$$\sup_{0\leqslant t<\infty} E\left[|X_t|^p\right] < \infty.$$

**定义 1.1.2** 概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的过程 $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 称为连续的, 如果对几乎所有的 $\omega \in \Omega$, 样本函数 $t \to X_t$ 是连续的, 即存在 $\Omega' \subset \Omega$, $P(\Omega') = 1$ 使得对所有 $\omega \in \Omega'$,

$$\lim_{s\to t} X_s(\omega) = X_t(\omega), \quad 0 \leqslant \forall t < \infty.$$

**注** 本书仅讨论连续鞅, 除特别声明外所涉及的过程都是连续的.

**例 1.1.1** 假设随机变量 $U \in L^1(P)$ 又 $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 为一流. 定义随机过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 如下:

$$X_t = E[U|\mathscr{F}_t], \qquad t \geqslant 0,$$

则 $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 是一连续鞅.

**定义 1.1.3** 定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P, (\mathscr{F}_t))$ 上满足下列条件的适应随机过程 $B$ 被称为 (实值)Brown 运动:

(1) 对几乎所有的 $\omega \in \Omega$, 样本函数 $t \to B_t$ 是连续的并且 $B_0 = 0$;

(2) 对所有满足 $0 \leqslant s \leqslant t$ 的实数 $s, t$, 有 $B_t - B_s$ 与 $\mathscr{F}_s$ 独立;

(3) 当 $0 \leqslant s \leqslant t$ 时, $B_t - B_s$ 服从均值为 0, 方差是 $t - s$ 的正态分布 $N(0, t-s)$.

从 Brown 运动的定义我们不难看出对所有的正数 $\alpha$ 随机过程 $(B_{\alpha+t} - B_\alpha, \mathscr{F}_{\alpha+t})_{t\geqslant 0}$ 和 $(\alpha B_{t/\alpha^2}, \mathscr{F}_{t/\alpha^2})_{t\geqslant 0}$ 都是 Brown 运动. 进一步地, 过程

$$W_0 = 0, \quad W_t = tB_{1/t}, \quad t > 0$$

也是 Brown 运动.

**定理 1.1.1** 假设 $B = (B_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 为一 Brown 运动. 对任意的 $a \in \mathbb{R}$, 令

$$\mathscr{E}_t(aB) = \exp\left(aB_t - \frac{1}{2}a^2 t\right), t \geqslant 0,$$

则 Brown 运动本身, $(B_t^2 - t)_{t\geqslant 0}$ 和 $(\mathscr{E}_t(aB))_{t\geqslant 0}$ 都是 $(\mathscr{F}_t)$ 鞅.

**定义 1.1.4** 定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P, (\mathscr{F}_t))$ 上的随机过程 $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ 称为循序可测的, 简称为循序的, 如果对于每一个 $t \geqslant 0$, 映射

$$(s, \omega) \mapsto X_s(\omega), \quad 0 \leqslant s \leqslant t$$

是 $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t$- 可测的; 一个集合 $A \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$ 是循序的, 如果过程 $\mathbf{1}_A$ 是循序的.

可以容易地验证所有循序集合的类构成一个 $\sigma$- 代数, 一般称为循序 $\sigma$- 代数, 记成 $\mathscr{P}_g$. 这样, 一个过程是循序的等价于对每一个 $t \geqslant 0$, 映射 $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ 是 $\mathscr{P}_g$- 可测的. 进一步地, 我们可以验证下面的定理成立.

**定理 1.1.2** 考虑概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P, (\mathscr{F}_t))$ 上的子集类:

$\mathscr{P} = \sigma$(左连续适应过程);

$\mathscr{O} = \sigma$(右连续并有左极限的适应过程);

$\mathscr{O}_r = \sigma$(右连续适应过程);

$\mathscr{P}^* = \sigma$(左连续并有右极限的适应过程);

$\mathscr{P}^{**} = \sigma$(连续适应过程);

则我们有

$$\mathscr{P} \subset \mathscr{O} \subset \mathscr{O}_r \subset \mathscr{P}_g,$$

并且 $\mathscr{P} = \mathscr{P}^* = \mathscr{P}^{**}$.

**定义 1.1.5** 适应过程 $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 称为可料过程, 如果映射 $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ 是 $\mathscr{P}$ 可测的.

注意, 对于离散过程 $X = (X_n, \mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, 它是可料的当且仅当对于每一个 $n$, $X_n$ 是 $\mathscr{F}_{n-1}$ 可测的, 这里 $\mathscr{F}_{-1} = \{\Omega, \emptyset\}$.

**定义 1.1.6** 定义在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0})$ 上的非负随机变量 $T$ 称为 $(\mathscr{F}_t)$- 停时, 如果对每一个 $t \in [0,\infty]$,

$$\{T \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t.$$

**例 1.1.2** 假设 $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 为一连续过程. 对实数 $\lambda > 0$, 定义随机变量 $T_\lambda$:

$$T_\lambda(\omega) = \{t \geqslant 0 : |X_t(\omega)| \geqslant \lambda\}, \qquad \omega \in \Omega.$$

这里, 我们规定 $\inf\{\emptyset\} = \infty$. 则 $T_\lambda$ 是一个停时.

事实上, 对所有的 $t \geqslant 0$, 我们有

$$\{T_\lambda \leqslant t\} = \left\{\sup_{s\leqslant t} |X_s| \geqslant \lambda\right\} \in \mathscr{F}_t.$$

从停时的定义, 我们容易证明下面的命题.

**命题 1.1.1** $T$ 是一个 $(\mathscr{F}_t)$- 停时当且仅当对所有的 $t \geqslant 0$,$\{T < t\} \in \mathscr{F}_t$.

**命题 1.1.2** 假设 $T, S$ 是两个 $(\mathscr{F}_t)$- 停时. 则下面的随机变量都是停时:

$$S \wedge T, \quad S \vee T, \quad S + T, \quad \alpha S\,(\alpha > 0).$$

**定义 1.1.7** 假设 $T$ 是一个 $(\mathscr{F}_t)$- 停时, 令

$$\mathscr{F}_T = \{A \in \mathscr{F} \mid A \cap \{T \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t, \ \text{对于所有的} t \geqslant 0\},$$

则 $\mathscr{F}_T$ 是一个 $\sigma$- 代数, 并称之为前事件 $\sigma$- 代数.

容易直接验证: 上面定义中的 $\mathscr{F}_T$ 确为一 $\sigma$- 代数, 并且当 $T \equiv t$ 是常数时, $\mathscr{F}_T$ 与 $\mathscr{F}_t$ 重合.

**命题 1.1.3** 假设 $T, S$ 是两个 $(\mathscr{F}_t)$- 停时, 则

(1) $T$ 为 $\mathscr{F}_T$- 可测;

(2) $S \leqslant T \Longrightarrow \mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$;

(3) $A \in \mathscr{F}_S \Longrightarrow A \cap \{S \leqslant T\} \in \mathscr{F}_T$;

(4) $S \leqslant T \Longrightarrow \mathscr{F}_S \subset \mathscr{F}_T$;

(5) $\{S < T\}, \quad \{S = T\}, \quad \{S > T\} \in \mathscr{F}_S \cap \mathscr{F}_T$.

**引理 1.1.1** 假设 $T, T_n, n = 0, 1, 2, \cdots$ 为一停时列, 如果 $T_n \downarrow T$ a.s., 则

$$\mathscr{F}_T = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T_n}.$$

**证明** 由于 $T \leqslant T_n, n = 1, 2, \cdots$, 则

$$\mathscr{F}_T \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{F}_{T_n}.$$

另一方面, 对任意的 $A \in \cap_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_{T_n}$, 我们有 $A \in \mathscr{F}_{T_n}$, $n = 1, 2, \cdots$, 并且

$$A \cap \{T < t\} = A \bigcap_{n=1}^{\infty} \{T_n \leqslant t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap \{T_n \leqslant t\}) \in \mathscr{F}_t.$$

而

$$A \cap \{T \leqslant t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \cap \{T \leqslant t + \frac{1}{n}\}) \in \mathscr{F}_{t+}.$$

注意 $(\mathscr{F}_t)$ 是右连续, 则 $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_{t+}$, 从而 $A \in \mathscr{F}_T$. □

**引理 1.1.2**　假设 $T$ 为一停时. 对于 $n = 1, 2, \cdots$, 我们令

$$T_n = \begin{cases} \dfrac{k}{2^n}, & \text{如果 } \dfrac{k-1}{2^n} \leqslant T < \dfrac{k}{n^2}, \\ \infty, & \text{如果 } T = \infty, \end{cases}$$

则对每一个 $n$, $T_n$ 是停时.

**证明**　由 $T_n$ 的定义知, 对所有的 $t \geqslant 0$,

$$\{T_n \geqslant t\} = \bigcup_{\{k:\, k2^{-n} \leqslant t\}} \left\{ \frac{k-1}{2^n} \leqslant T < \frac{k}{n^2} \right\}.$$

这个证明 $T_n$ 是停时. □

对于一个停时 $T$ 和一个过程 $X$, 我们可以获得一个被停止的过程 $X^T$:

$$X_t^T = X_{t \wedge T},$$

并且进一步地, 我们有

**定理 1.1.3**　假设 $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 为一右连续随机过程, 又设 $T$ 为一停时. 则随机变量 $X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$ 是 $\mathscr{F}_T$- 可测的.

**证明**　假设 $T_n, n = 1, 2, \cdots$ 是如引理 1.1.2 中所定义的停时列, 则由 $X$ 的右连续性知:

$$X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}} = \lim_{n\to\infty} X_{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n<\infty\}}.$$

进一步地, 对任意的 $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &\left\{X_{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n<\infty\}} \leqslant a\right\} \cap \{T_n \leqslant t\} \\ = &\bigcup_{\{k:\, k2^{-n} \leqslant t\}} \{X_{k2^{-n}} \leqslant a\} \cap \{T_n = k2^{-n}\} \in \mathscr{F}_t, \end{aligned}$$

从而, $X_{T_n} \mathbf{1}_{\{T_n<\infty\}}$ 是 $\mathscr{F}_{T_n}$- 可测的. 因此, $X_T \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}$ 是 $\mathscr{F}_T$- 可测的. □

**引理 1.1.3** 假设 $T$ 是一停时, 又设 $A \in \mathscr{F}_T$, 则

$$T_A(\omega) = \begin{cases} T(\omega), & \omega \in A; \\ \infty, & \omega \notin A \end{cases}$$

也是一停时.

**证明** 由 $\mathscr{F}_T$ 的定义知, 如果 $A \in \mathscr{F}_T$, 则对任意的 $t \geqslant 0$,

$$\{T_A \leqslant t\} = A \cap \{T \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t.$$

这个证明 $T_A$ 是一停时. □

**定理 1.1.4** 假设随机过程 $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 满足, 对任意的停时 $T$ 成立

$$X_T \in L^1, \qquad E[X_T] = 0,$$

则 $X$ 是一个鞅.

**证明** 特别地, 当我们考虑 $T = \infty$ 时, $E[X_\infty] = 0$ 并且对于每一个 $A \in \mathscr{F}$, 我们有

$$E[X_\infty : A] = -E[X_\infty : A^c].$$

据此由引理 1.1.3 知, 对于任意的 $A \in \mathscr{F}_t$, $t_A$ 是一停时. 同时,

$$E[X_{t_A}] = 0,$$

即

$$E[X_t : A] + E[X_\infty : A^c] = 0,$$

从而,

$$E[X_t : A] = E[X_\infty : A].$$

换句话说, 对于所有的 $t \geqslant 0$, $E[X_t] = E[X_\infty | \mathscr{F}_t]$. □

**定理 1.1.5**(Doob 停止定理) 假设 $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 为 (下) 鞅, 又设 $T$ 为停时. 则过程 $X^T = (X_{t \wedge T}, \mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$ 也是一个 (下) 鞅.

**证明** 仅就 $X$ 是鞅的场合证明, 同理人们能证明下鞅的情况.

如前所述, $X_{t \wedge T}$ 是 $\mathscr{F}_t$- 可测的. 其次, 假设停时 $\{T_n\}$ 如引理 1.1.2 中所定义的停时列. 由于 $|X|$ 是下鞅, 则我们有

$$\begin{aligned} E[|X_T| : T < t] &\leqslant \lim_{n \to \infty} \sum_{\{k:\, k2^{-n} \leqslant t\}} E\left[|X_{k2^{-n}}| : \frac{k-1}{2^n} \leqslant T < \frac{k}{2^{-n}}\right] \\ &\leqslant \lim_{n \to \infty} \sum_{\{k:\, k2^{-n} \leqslant t\}} E\left[|X_t| : \frac{k-1}{2^n} \leqslant T < \frac{k}{2^{-n}}\right] \\ &\leqslant E[|X_t|]. \end{aligned}$$

因此,

$$E[|X_{t\wedge T}|] = E[|X_t| : T \geqslant t] + E[|X_T| : T < t] \leqslant 2E[|X_t|] < \infty,$$

从而, $X_{t\wedge T}$ 是可积的.

另一方面, 对于 $s < t$, 我们有

$$\begin{aligned} E[X_{t\wedge T}|\mathscr{F}_s] &= E\left[X_t\mathbf{1}_{\{s<T\}} + X_T\mathbf{1}_{\{s\geqslant T\}}|\mathscr{F}_s\right] \\ &= \mathbf{1}_{\{s<T\}}E\left[X_t|\mathscr{F}_s\right] + X_T\mathbf{1}_{\{s\geqslant T\}} \\ &= \mathbf{1}_{\{s<T\}}X_s + X_T\mathbf{1}_{\{s\geqslant T\}} = X_{s\wedge T}. \end{aligned}$$

因此, $X^T$ 是鞅. □

**注**　假设 $X = (X_t, \mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ 为一连续鞅. 定义停时列 $\{T_n\}$:

$$T_n = \inf\{t : |X_t| \geqslant n\}, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

则 $T_n$ 严格增加地趋向于 $\infty$, 并且对于每一个 $n$, 有

$$\sup_{t\geqslant 0} |X_{t\wedge T_n}| \leqslant n.$$

这样对于每一个 $n$, $X^{T_n}$ 是有界鞅, 从而在连续鞅的讨论中我们可以假设它们是有界的或 $L^2$ 有界的.

## 1.2　Doob 收敛定理与一致可积性

众所周知, 随机变量族 $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 是一致可积的, 如果

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup_{\lambda\in\Lambda} E[|X_\lambda| : |X_\lambda| > \alpha] = 0.$$

显然, 一致可积的随机变量族是 $L^1$ 有界的. 事实上, 如果

$$\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$$

是一致可积的, 则存在 $\alpha_0$ 使得

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} E[|X_\lambda| : |X_\lambda| > \alpha_0] \leqslant 1,$$

从而, 对任意 $\lambda \in \Lambda$, 有

$$E[|X_\lambda|] \leqslant E[|X_\lambda| : |X_\lambda| > \alpha_0] + E[|X_\lambda| : |X_\lambda| \leqslant \alpha_0] < \alpha_0 + 1,$$

即 $\sup_{\lambda\in\Lambda} E[|X_\lambda|] < \infty$; 反之, 如果存在 $p > 1$ 使得

$$C_p = \sup_{\lambda\in\Lambda} E[|X_\lambda|^p] < \infty,$$

则

$$\begin{aligned}
E\left[|X_\lambda| : |X_\lambda| > \alpha\right] &\leqslant E\left[|X_\lambda|^p\right]^{1/p} P(|X_\lambda| > \alpha)^{1/q} \\
&\leqslant C_p^{1/p}\left(\frac{E\left[|X_\lambda|^p\right]}{\alpha^p}\right)^{1/q} \\
&\leqslant \frac{C_p}{\alpha^{p-1}} \to 0 \quad (\alpha \to \infty),
\end{aligned}$$

其中, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, 即 $\{X_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ 是一致可积的. 在一致可积性的研究中, 下面的结果是重要的, 然而证明是困难的, 其证明可在文献 [23] 中找到也可查阅其他专著.

**引理 1.2.1** 假设随机变量族 $\{X_t, t \in \Lambda\}$ 是一致可积的, 则存在可积随机变量 $X$ 与序列 $\{t_n\} \subset \Lambda$ 使得对任意有界的随机变量 $Y$, 有

$$\lim_{n\to\infty} E\big[X_{t_n} Y\big] = E[XY].$$

**定理 1.2.1**(Doob 收敛定理) 如果鞅 $f = (f_n, \mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E\left[|f_n|\right] < \infty,$$

则存在可积随机变量 $f_\infty$ 使得 $\lim_{n\to\infty} f_n = f_\infty$ a.s.

这个定理称为 Doob 收敛定理, 其证明方法有多种, 这里我们采用 Garsia-Bishop 在 1970 年给出的方法.

假设 $\varphi$ 为定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数并且在 $[0, \infty)$ 上单调减少, 令

$$\Phi(x) = \int_0^t (x - t)\varphi(t)\mathrm{d}t, \quad x \in \mathbb{R},$$

则 $\Phi$ 是 $\mathbb{R}$ 上的凸函数并且由简单的计算我们可以证明下列引理成立.

**引理 1.2.2** 假设 $\Phi$ 与 $\varphi$ 如上, 则不等式

$$\frac{1}{8}(y - x)^2\varphi(|x| \vee |y|) \leqslant \Phi(x) + \Phi(y) - 2\Phi\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

对任意的 $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leqslant y$ 成立.

**定理 1.2.1 的证明** Garsia-Bishop 证明方法的核心是由

$$\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

定义凸函数 $\Phi$, 然后利用 Jensen 不等式. 据此,

$$\Phi(x)=\int_0^x (x-t)\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}x,$$

并且 $\Phi$ 也是偶函数. 对于这个函数 $\Phi$, 我们有

$$\Phi(f_n)\leqslant \frac{\pi}{2}|f_n|,$$

即对每一个非负整数 $k$,

$$E\left[\Phi(f_k)\right]\leqslant \frac{\pi}{2}\sup_{n\in\mathbb{N}} E\left[|f_n|\right]<\infty.$$

令 $Z_k=\max_{0\leqslant j\leqslant k}|f_{m+j}-f_m|$, $k=0,1,2,\cdots$, 则 $Z_k$ 是 $\mathscr{F}_{m+k}$- 可测的. 进一步地, 对于 $\varepsilon>0$ 假设

$$A_j=\{Z_{j-1}\leqslant\varepsilon, Z_j>\varepsilon\}=\{Z_{j-1}\leqslant\varepsilon, |f_{m+j}-f_m|>\varepsilon\},$$

$$B_m=\left\{\sup_{m\leqslant n<\infty}|f_n-f_m|>\varepsilon\right\},$$

则

$$B_m=\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j,\quad A_i\cap A_j=\emptyset\quad(i\neq j).$$

其次, 取

$$X_k=\sum_{j=1}^{k}\mathbf{1}_{A_j}f_{m+j}+\left(1-\sum_{j=1}^{k}\mathbf{1}_{A_j}\right)f_{m+k},\quad k=1,2,\cdots.$$

由于 $X_k\leqslant f^*$, 于是我们获得

$$\varphi(|f_m|\vee|X_k|)\geqslant\frac{1}{1+(f^*)^2}.$$

注意引理 1.2.2 蕴含

$$\frac{1}{8}E\left[\frac{(X_k-f_m)^2}{1+(f^*)^2}\right]\leqslant E\left[\Phi(X_k)+\Phi(f_m)-2\Phi\left(\frac{f_m+X_k}{2}\right)\right].\tag{1.2.1}$$

而由 Jensen 不等式可以证明

$$E\left[\Phi(f_m)\right]\leqslant E\left[\Phi(f_{m+k})\right],\tag{1.2.2}$$