UMSS

大学数学科学丛书 —11

孤子引论

陈登远 编著

科学出版社
www.sciencep.com

大学数学科学丛书　11

孤 子 引 论

陈登远　编著

上海市研究生教育专项经费资助教材

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书结合物理与几何的背景，以 Lax 可积为主线，系统论述孤子系统的共同性质，其中包括等谱流与非等谱流，无穷守恒律与 Hamilton 结构等，全面介绍近年发展起来的求非线性波动方程多孤子解的方法，如双线性导数法，Bäcklund 变换，反散射变换与 Wronski 行列式技术. 利用强加在拟微分算子的约束初步揭示高维与低维孤子系统的内在联系，并引出约束系统的谱问题. 本书内容翔实，论述简明，推理严谨，范例丰富，便于读者阅读.

本书可作为大学数学系、物理系的研究生和高年级本科生学习非线性科学的教材，也为有关的科技工作者提供了一本实用的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

孤子引论/陈登远编著. —北京：科学出版社，2006
(大学数学科学丛书，11/李大潜主编)
ISBN 7-03-016467-9

I. 孤… II. 陈… III. 孤立子-研究 IV. O572.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005) 第 133157 号

责任编辑：吕 虹／责任校对：包志虹
责任印制：安春生／封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2006 年 4 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2006 年 4 月第一次印刷 印张：20 1/4
印数：1—3 500 字数：388 000

定价：38.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

作 者 简 介

陈登远，男，1938年10月生，四川成都人．1959年毕业于云南大学数学系．1988年任中国科技大学数学系教授，1989年在德国巴特波恩大学数学系任高级访问学者．1991年任上海科技大学数学系教授，现任上海大学理学院教授、博士生导师．1991年至1995年为国家教委高等学校数学与力学教学指导委员会成员．长期从事孤子理论的教学与研究，在线性谱问题的规范变换、非线性发展方程的等价类、Lax可积系统的流与对称的代数结构、高维系统的约化、新多孤子解等研究领域有系统工作，其中“孤立子与非线性演化方程”获1986年中国科学院科技进步二等奖；“非线性发展方程的转换算子及等价类”获安徽省1985~1986年度优秀学术论文一等奖．

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法，数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学．从恩格斯那时到现在，尽管数学的内涵已经大大拓展了，人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系，但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括，科学地反映了数学这一学科的内涵．正由于忽略了物质的具体形态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界，数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点，具有特殊的公共基础地位，其重要性得到普遍的认同．

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的．作为一种先进的文化，数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，而且是人类文明的一个重要的支柱．数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视．数学教育本质是一种素质教育；学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要着重领会到数学的精神实质和思想方法．在大学学习高等数学的阶段，更应该自觉地去意识并努力体现这一点．

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材，教学参考书或课外读物的系列，本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，力求为各专业的大学本科生或研究生（包括硕士生及博士生）走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助，并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材，相信并希望在各方面的支持及帮助下，本丛书将会愈出愈好．

李大潜

2003 年 12 月 27 日

序　言

孤子的发现应追溯到 1834 年的夏日，英国科学家 J.S.Russel 骑马正沿着一条运河岸道旅行，偶然发现在狭窄的河床中行走的船突然停止前进，被船体带动的水团积聚在船头周围并剧烈地翻动着. 不久，一个圆形且轮廓分明的巨大孤立波峰开始形成，并急速离开船头向前运动. 波长约 10 米，高约 0.5 米，在行进中波的形状和速度并无明显变化，以后高度逐渐下降. 在跟踪二至三公里后，终于消失在蜿蜒的河道上. 这次发现的奇特景观促使 Russel 开始广泛的水波实验研究. 他认为这类波应是流体运动的一个稳定解，并称它为孤波. 但他始终未能从理论上证实孤波的存在. 结果导致 Russel 向英国皇家科学院提交的报告引起当时物理学界的激烈争论. 直到 1895 年，荷兰著名数学家 Korteweg 和他的学生 de Vries 在对孤波进行全面分析后指出这种波可近似为小振幅的长波，并以此建立了浅水波运动方程

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau}=\sqrt{\frac{g}{h}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{3}{4}\eta^2+\alpha\eta+\frac{\sigma}{2}\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2}\right), \tag{1}$$

$$\sigma=\frac{1}{3}h^3-\frac{Th}{\rho g},$$

其中 η 为波面高度， h 为水深， g 为重力加速度， ρ 是水的密度， α 是与水的匀速流动有关的小常数， T 是水的表面张力. 此后 Korteweg 和 de Vries 利用行波法求出与 Russel 描述一致的孤波解，争论才告终止.

如果作变换

$$t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{h\sigma}}\tau,\quad x=-\frac{\xi}{\sqrt{\sigma}},\quad u=\frac{1}{2}\eta+\frac{1}{3}\alpha, \tag{2}$$

则方程 (1) 可写成标准的形式

$$u_t+u_{xxx}+6uu_x=0. \tag{3}$$

后人为了纪念这两位伟大的学者对孤波作出的贡献将 (1) 或 (3) 称为 KdV 方程.

时间跨越了 70 年，转眼之间来到 1965 年，美国数学家 Kruskal 和 Zabusky 利用先进的计算机通过数值计算详细研究了 KdV 方程两波相互作用的全过程. 他们对作用前后所得的数据进行对比，发现孤波的形状和速度保持不变而具有弹性散射的性质，所以 Kruskal 和 Zabusky 又将这种稳定的孤波称为孤子. 从此一个研究非线性发展方程与孤子的热潮在学术界蓬勃地开展起来.

随着研究的深入，大批具有孤子解的非线性波动方程在物理的各领域不断被揭示出，其中包括等离子体中的非线性 Schrödinger 方程、振子运动的 Toda 链与二维流体流动的 KP 方程等. 研究的结果表明，这些方程具有共同的性质. 例如它

们都存在 Lax 对与无穷守恒律，都存在等谱流与非等谱流，且相关的等谱方程族构成无穷维 Hamilton 系统等. 此外在这一时期求解技术也取得长足的发展. 除反散射变换外还产生出 Hirota 双线性导数方法，Bäcklund 变换与 Wronskian 技术. 现在孤子已经形成了自己独特的理论和研究方法，并且几乎在自然科学的各领域中寻觅到它应用的踪迹.

本书作为新世纪研究生教材将以 Lax 对为主线，系统讲述孤子系统的共同性质，全面介绍近年发展起来的寻求非线性波动方程多孤子解的各种方法；利用强加在拟微分算子的约束揭示经典孤子系统的内在联系. 为使研究生能接近孤子领域的前沿，本书还包括作者近年来在这一领域上潜心研究的成果.

全书共分九章. 第 1 章说明 KdV 、 KP 方程与 sine-Gordon 方程的力学与几何背景. 第 2 章通过一些经典的非线性波动方程介绍求多孤子解的双线性导数直接法，并对 n 孤子相互作用的弹性散射性质给出严格的数学解释. 第 3 章引入孤子方程的线性谱问题及时间发展式 (Lax 对), 从其相容性条件导出等谱或非等谱的 KdV 方程族，修正 KdV 方程族与 AKNS 方程族，研究这些方程族的相互关系. 第 4 章利用谱问题存在的规范变换及联系不同位势间的广义 Miura 变换，讨论 JM 系统、 KN 系统、 Heisenberg 系统与 AKNS 系统方程的等价性. 第 5 章讲述 KdV 系统与 AKNS 系统的 Darboux 变换及相关的 Bäcklund 变换. 证明 KdV 方程与 sine-Gordon 方程其它形式的 Bäcklund 变换等价于双线性导数形式的 Bäcklund 变换. 由此给出这两个方程 n 孤子解的 Wronski 行列式表示. 第 6 章介绍 KdV 系统、 AKNS 系统与 Toda 链的正散射问题与反散射问题，并将位势的恢复归结为求解 GLM 积分方程. 第 7 章借助逆辛算子的概念建立无穷维实 Hamilton 系统与 Liouville 可积的理论. 根据所给出的判断准则验证 KdV 系统、修正 KdV 系统、AKNS 系统与离散 Toda 链系统的 Hamilton 结构. 第 8 章是从拟微分算子的 Lax 方程出发构造 KP 系统与修正 KP 系统的方程族. 通过强加于拟微分算子上的约束生成低维的约束系统. 后者包括经典的 AKNS 系统、带导数的 Schrödinger 系统和新的 3×3 可积系统. 第 9 章研究 KP 系统的 Bäcklund 变换及线孤子解的 Wronski 行列式. 利用 Green 函数与 $\bar{\partial}$ 定理求解 KPI 方程与 KPII 方程正散射问题与反散射问题.

在编写过程中，作者与博士张大军、邓淑芳逐章逐节详细讨论，并对所列公式进行了认真复算. 张大军还将复算的资料整理存档，邓淑芳将文稿输入电脑并绘制图形. 因此本书的完成是与他们辛勤劳动不可分的. 书中部分章节在孤子理论讨论班上使用时，盛万成教授、王远弟副教授、博士后夏铁成、博士生张翼、宁同科、孙业朋、毕金钵、孙梅娜、姚玉芹、刘玉清、季杰、硕士生刘金、杜丛民、陈哲云、石教云、吕丽丽、郝宏海、尹付梅、陈鹏、王广胜等提出许多建设性的意见，这些意见作者在定稿时已加以采纳利用. 在此衷心感谢上海市教委和上海大学科研处

以及研究生部对本书的资助. 感谢科学出版社吕虹编审对本书的出版所给予的大力帮助.

孤子理论涉及学科广泛, 研究课题十分丰富而作者的水平有限, 谬误与疏漏之处实属难免, 恳请读者批评指正.

陈登远

2004 年 3 月 10 日于上海大学

目　　录

第 1 章　流体与几何中的孤子方程

孤波现象发生于流体力学的波动、等离子体波的传播、晶格的非线性振动等物理领域，并与几何中的负常曲率曲面密切相关. 它的数学形式表现为一非线性波动方程. 本章将分别利用流体力学中的 Euler 方程与微分几何中的 Gauss-Codazzi 方程导出经典的 KdV 方程、 KP 方程与 sine-Gordon 方程

1.1　弱非线性作用下的浅水波方程

1.1.1　流体在刚床中流动的定解问题

考察在空间一确定区域 V 中流动的流体. 设它在时刻 t, 点 (x,y,z) 处的速度为 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t,x,y,z)$. 以 $\rho=\rho(t,x,y,z)$ 表示流体的密度， $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(t,x,y,z)$ 表示作用在单位流体质量上的体力， $p=p(t,x,y,z)$ 是流体内部的压强，则流体的连续性方程 与 Euler 运动方程 为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\boldsymbol{v}=0, \tag{1.1.1a}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\boldsymbol{F}. \tag{1.1.1b}$$

假定流体不可压缩且在常重力的作用下为无旋运动 (例如浅水在河床中的流动)，则方程 (1.1.1) 化为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0, \tag{1.1.2a}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{v}^2=-\frac{1}{\rho}\nabla p-g\boldsymbol{k}, \tag{1.1.2b}$$

其中 g 是重力加速度， $\boldsymbol{k}$ 是 z 轴上的单位向量. 由于流体存在速度势 $\boldsymbol{v}=\nabla\tilde{\phi}$, 将其代入 (1.1.2a) 与 (1.1.2b), 容易得

$$\Delta\tilde{\phi}=0, \tag{1.1.3a}$$

$$\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\tilde{\phi})^2+gz+\frac{p}{\rho}=C(t). \tag{1.1.3b}$$

为避免任意函数 $C(t)$ 的出现可取

$$\phi=\tilde{\phi}-\int_0^t C(t)dt+\frac{p_0}{\rho}t \tag{1.1.4}$$

来代替速度势 $\tilde{\phi}$, 于是得

$$\Delta\phi = 0, \tag{1.1.5a}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + gz + \frac{p - p_0}{\rho} = 0, \tag{1.1.5b}$$

其中 p_0 表示流体自由面上的大气压力.

如果流体表面的方程设为

$$f(t, x, y, z) = 0, \tag{1.1.6}$$

则对此表面上的流线

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \tag{1.1.7}$$

我们有恒等式

$$f(t, x(t), y(t), z(t)) = 0. \tag{1.1.8}$$

由此推知

$$f_t + \phi_x f_x + \phi_y f_y + \phi_z f_z = 0. \tag{1.1.9}$$

当流体表面方程表达为显式 $z = h(t, x, y)$ 时特别有

$$h_t + \phi_x h_x + \phi_y h_y = \phi_z. \tag{1.1.10}$$

同样，在运动的刚性底面 $z = h_0(x, y)$ 上，流线的法向速度为零，即有

$$\phi_x h_{0,x} + \phi_y h_{0,y} - \phi_z = 0. \tag{1.1.11}$$

若底面为平面 $z = -h_0$, 则得刚性条件

$$\phi_z = 0. \tag{1.1.12}$$

这样一来，不可压缩流体在无限大刚床上的流动可抽象成如下定解问题：给出速度势 $\phi = \phi(t, x, y, z)$ 与表面 $z = h(t, x, y)$, 使其满足 Laplace 方程 (1.1.5a) 与自由面及刚床底面的边界条件

$$(h_t + \phi_x h_x + \phi_y h_y - \phi_z)_{z=h(t,x,y)} = 0, \tag{1.1.13a}$$

$$\left[\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) + gz\right]_{z=h(t,x,y)} = 0, \tag{1.1.13b}$$

$$\phi_z|_{z=-h_0} = 0. \tag{1.1.13c}$$