中等农业学校試用教科書

数学

中册

江苏省句容农业学校主编

农牧类各专业用

农业出版社

中等农业学校試用教科書

数　　学

中　冊

江苏省句容农业学校主編

农牧类各专业用

农　业　出　版　社

主　編　江苏省句容农业学校

編著者　江苏省句容农业学校　　覃景星

陕西省安康农业学校　　郭尔康

安徽省鳳阳农业学校　　李碩德

安徽省宿县农业学校　　張公愚

中等农业学校試用教科書

數　　学

中　　册

江苏省句容农业学校主編

农　业　出　版　社　出　版

北京市西总布胡同七号

（北京市書刊出版業营業許可証出字第106号）

新华書店科技發行所發行　　各地新华書店經售

北京市印刷一厂印刷裝訂

統一書号　16144.88

1960年7月北京原人数型	开本	787×1092毫米
1960年8月初版		三十二分之一
1961年6月北京第二次印刷	字数	118千字
印数　1—50,000册	印張	五又十六分之一
原人数型一版一次印数3万册	定价	(7)三角七分

中 册 目 录

第八章　一次函数和直綫

一、正比例和一次函数

§74　正比例　在算术里已經講过，如果两个量中，一个量扩大(或縮小)几倍，另一个量跟着也扩大(或縮小)同样的倍数，这样两个量之間的关系叫正比例关系。我們也已經知道，如果两个量成正比例，那末一个量的任意两个数值的比、等于另一个量的两个对应值的比。

設 x 和 y 是正比例的量，而且当 x 等于 1 的时候，y 等于 k；那末根据正比例关系的性质，对 x 的任何一个値和与它对应的 y 的値之間，都有下面的关系式：

$$x:1=y:k,$$

或
$$y=kx.$$

現在我們把算术里正比例的定义加以推广。

变量 x 和 y 間的函数关系，如果能用公式 $y=kx(k\neq0)$ 来表示，那末这种函数关系叫做正比例关系，式中的 k，叫做变量 y 和 x 間的比例系数。

例如：在前面所举的公式 $c=2\pi r$ 中，2π 是常量，所以圓的周长 c 和半徑 r 間的关系是正比例关系，它們的比例系数是 2π。

又如，在栽种作物的时候，如果行距 a 寸是常量，株距 x 寸是变量，那末每株所占有的平均土地面积 y 可用公式

$$y=ax(\text{平方寸})$$

計算。因此，如果行距为常量，那末每株所占有的平均土地面积和株距間的函数关系是正比例关系，行距就是它們的比例系数。

又如，如果数 y 是数 x 和 (-3) 的乘积，那末就得

$$y=(-3)x.$$

数 y 和数 x 的函数关系也是正比例关系，它們的比例系数是 -3。

因为比例系数 k 可以是除零以外的任何正数或負数，所以这个定义比算术里的定义来得广泛。

§75 函数 $y=kx$ 的图象 用 §63 所講的方法，可以作出函数 $y=kx$ 的图象。

例如：要作 $y=3x$ 的图象，可以先給 x 的一些任意的正数值或負数值，求出 y 的各对应值。

x:	$\cdots-3$	-2	-1	0	1	2	$3\cdots$,
$y=3x$:	$\cdots-9$	-6	-3	0	3	6	$9\cdots$.

把上面的各組对应值做点的坐标，在坐标平面上作出这些点，如图 81 中的 $M_1(1,3)$、$M_2(2,6)$、$M_3(-1,-3)\cdots$。可以看出这些点連成一条通过原点 O 和 $(1,3)$ 点的直綫。

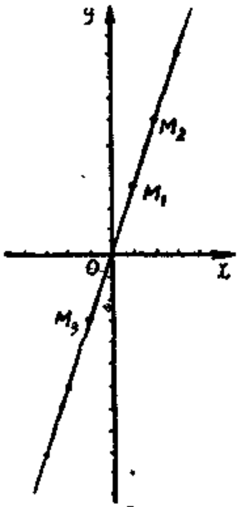


图 81

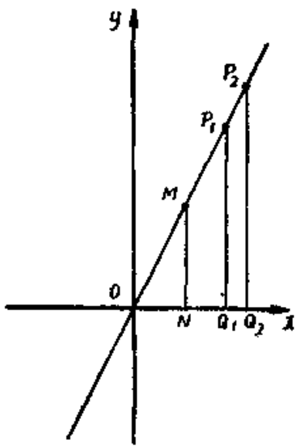


图 82

現在我們来証明 $y=kx$ 的图象，总是一条通过原点和点 $(1,k)$

的直綫。为了簡便起見，我們假定 k 是正数。

設 $x=0$，那末 $y=0$；設 $x=1$，$y=k$，因此原点 O 和 M 点 $(1,k)$ 在图象上(图 82)。連結直綫 OM。

現在我們来証明 $y=kx$ 的图象就是直綫 OM。

首先証明直綫上的任意点 $P_1(x_1,y_1)$ 都是函数 $y=kx$ 图象上的点，为了証明这个問題，只要証明 P_1 点的坐标 (x_1,y_1) 适合函数式 $y=kx$ 就可以了。

从 M 和 P_1 分别引 Ox 軸的垂綫 MN 和 P_1Q_1，就得相似直角三角形 OMN 和 OP_1Q_1，其中

$$OQ_1=x_1,\ \ P_1Q_1=y_1,\ \ ON=1,\ \ MN=k;$$

由相似三角形的性質得

$$\frac{P_1Q_1}{OQ_1}=\frac{MN}{ON}，\ 或者写成\frac{y_1}{x_1}=\frac{k}{1},$$

也就是

$$y_1=kx_1.$$

这就説明了 P_1 点是函数 $y=kx$ 图象上的点。

其次我們来証明函数 $y=kx$ 图象上的点都在直綫 OM 上。

設 $P_2(x_2,y_2)$ 是函数图象上的点，把它和原点 O 連接，并从这点作 Ox 軸的垂綫 P_2Q_2，就得直角三角形 OP_2Q_2，其中 $OQ_2=x_2$，$P_2Q_2=y_2$。因为 P_2 点在函数 $y=kx$ 的图象上，所以

$$y_2=kx_2\ \ 或\ \frac{y_2}{x_2}=\frac{k}{1},$$

因此得

$$\frac{P_2Q_2}{OQ_2}=\frac{MN}{ON}.$$

这样，直角三角形 OP_2Q_2 和 OMN 是相似形。由于 O 是它們的共同一个頂点，而且直角边 ON 和 OQ_2 重合，所以斜边 OM 和 OP_2 必定重合，因此 P_2 在直綫 OM 上。

由此証得，函数 $y=kx$ 的图象，是一条通过原点和点 $(1,k)$ 的直綫。以后，函数 $y=kx$ 的图象，也叫做直綫 $y=kx$。

在决定直綫 $y=kx$ 的两点中,原点的位置是固定的,点$(1,k)$的位置也只决定于比例系数 k, 所以直綫 $y=kx$ 的位置是由 k 决定的。

現在我們来研究在比例系数 k 变化的时候, 直綫 $y=kx$ 的位置怎样变化。

(1) 如果 $k>0$, 那末点$(1,k)$在第一象限,直綫 $y=kx$ 就在第一和第三象限內。

图 83 在同一坐标平面里作出了三条直綫 $y=\frac{1}{3}x$, $y=x$ 和 $y=3x$,它們的比例系数分别等于$\frac{1}{3}$、1 和 3。

从图中看出: 这些直綫向上的方向和 Ox 軸正方向所成的角(通常叫做直綫的傾斜角)都是銳角,而且 k 的数值愈大,这个銳角也就愈大。这些直綫都是从左向右逐漸上升的。因此函数是递增的。

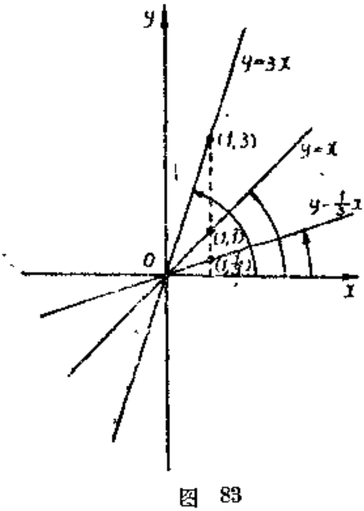


图 83

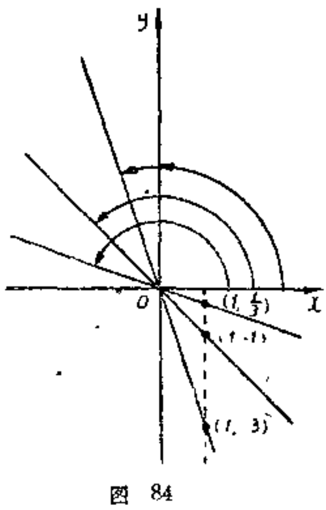


图 84

(2) 如果 $k<0$, 那末点$(1,k)$在第四象限,直綫就在第二和第四象限內。

图 84 作出了比例系数等于 $-\frac{1}{3}$、-1 和 -3 的三条直綫 $y=-\frac{1}{3}x, y=-x$ 和 $y=-3x$。

从图中看出：这些直綫的傾斜角都是鈍角，而且 k 的值愈大(絕对值愈小)，这些鈍角就愈大。这些直綫都是从左到右逐漸下降的，因此函数是遞减的。

总之，比例系数 k 指出了直綫 $y=kx$ 的傾斜角的大小，也就表明了直綫对 Ox 軸的傾斜程度。因此比例系数 k 叫做直綫 $y=kx$ 的斜率。

很明显的，直綫 $y=kx$ 的斜率 k，就是直綫上任何一点(除原点外)的縱坐标和横坐标的比。

当 $k>0$，即直綫 $y=kx$ 在第一和第三象限，根据銳角三角函数的定义，斜率 k 就是直綫的傾斜角的正切，設这个交角为 α，就得

$$\operatorname{tg}\alpha=k.$$

实际上，当我們以后把三角函数的概念扩大到任意大小的角以后，当 $k<0$，即直綫 $y=kx$ 在第二和第四象限的时候，这个关系式仍旧成立。

§76 一次函数 在实际問題里，常常遇到 $y=kx+b$，这种形式的函数。

例如：某公社已积堆肥 30000 担，以后每天积堆肥 500 担，那末 x 天后該社共积堆肥数是

$$y=500x+30000.$$

式中 500 和 30000 是常量，x 是自变量，y 是 x 的函数。

两个变量 x 和 y 間的函数关系，如果能用公式 $y=kx+b$ ($k\neq0$) 来表示，那末 y 叫做 x 的一次函数。如果 $b=0$，函数 $y=$

$=kx+b$，就成为 $y=kx$，所以正比例关系是一次函数的特例。

在初中代数里，我們把含有两个未知数 x 和 y 的并且未知数的項的次数都是一次的方程叫做二元一次方程。如果我們把 x 当作自变量，那末我們可以看出，当 x 的值改变了，y 的值也随着改变，在这种情况下，x 和 y 都是变量，y 是自变量 x 的函数。因为任何一个二元一次方程都能化为 $y=kx+b$ 的形式，所以任何一个二元一次方程，都可以看做一次函数的表达式。

§77　函数 $y=kx+b$ 的图象　为了研究函数 $y=kx+b$ 的图象，我們先就函数 $y=2x+5$ 和 $y=2x$ 来比較。

任意取一些 x 的值，計算和这些值对应的两个函数的值，列在下面表里，并作出直綫 $y=2x$。

x	……	-3	-2	-1	0	1	2	3	……
$y=2x$	……	-6	-4	-2	0	2	4	6	……
$y=2x+5$	……	-1	1	3	5	7	9	11	……

从表中看出，对于 x 的同一个值，函数 $y=2x+5$ 的对应值总比函数 $y=2x$ 的对应值多 5。实际上，不管 x 取什么值，都得到同样的結果。

如果把这些对应值在坐标平面上描点，那末函数 $y=2x+5$ 的各对对应值所描出的点的縱坐标，总比直綫 $y=2x$ 上有相同横坐标的各点的縱坐标多 5(图 85)，更一般地說，函数 $y=2x+5$ 图象上任何点的縱坐标都比直綫 $y=2x$ 上有相同横坐标的点的縱坐标多 5，因此只要把直綫 $y=2x$，向上平移 5 个单位，就得到函数 $y=$ $=2x+5$ 的图象。由此可知函数 $y=2x+5$ 的图象也是一条直綫，而且和直綫 $y=2x$ 平行，不过它和 Oy 軸的交点不在原点，而在坐标是(0, 5)的点。

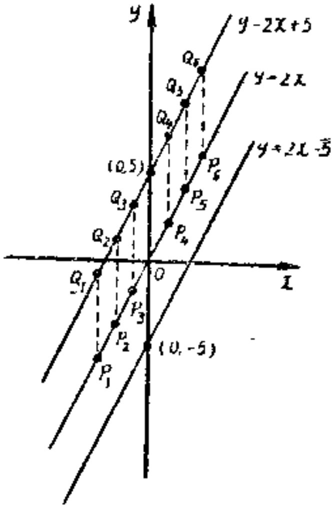


图　85

同样可以說明只要用直綫 $y=2x$，向下平移 5 个单位，就可以得到函数 $y=2x-5$ 的图象（图 85）。因此函数 $y=2x-5$ 的图象也是一条和直綫 $y=2x$ 平行的直綫，但它和 Oy 軸的交点在点 $(0,-5)$。

同样道理，我們可以知道函数 $y=-2x+3$ 是和直綫 $y=-2x$ 平行的直綫，它和 Oy 軸相交于点 $(0,3)$。

一般地說：

一次函数 $y=kx+b$ 的图象，是和直綫 $y=kx$ 平行的一条直綫，它和 Oy 軸相交于点 $(0,b)$。

一次函数 $y=kx+b$ 的图象，以后也簡称直綫 $y=kx+b$。

函数 $y=kx+b$ 中的常数項 b，也就是直綫 $y=kx+b$ 和 Oy 軸交点的縱坐标，叫做直綫 $y=kx+b$ 的截距。

直綫 $y=kx+b$，既和直綫 $y=kx$ 平行，那末这两条直綫的傾斜角是相等的，所以直綫 $y=kx+b$ 的斜率也等于 k。

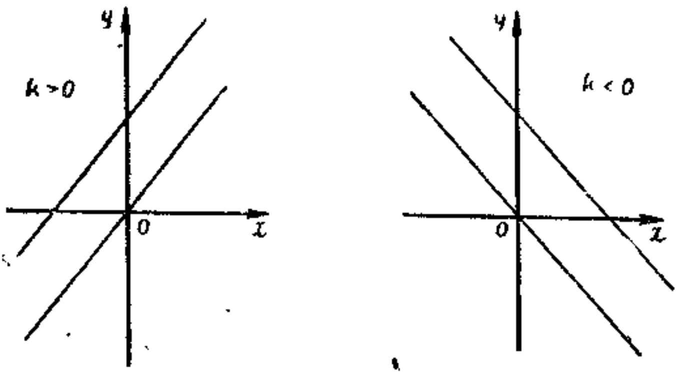
§78　一次函数 $y=kx+b$ 随着 x 而变化的情况　我們知道，直綫 $y=kx+b$，平行于直綫 $y=kx$，所以，当 $k>0$ 时，直綫 $y=kx+b$，是上升的（图 86a），就是說，函数 $y=kx+b$ 是遞增的，当 $k<0$ 时，直綫 $y=kx+b$ 是下降的（图 86b），就是說，函数 $y=kx+b$ 是遞减的。

其次，如果我們在直綫 $y=kx+b$（图 87），$k>0$ 上任意取两点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$，那末就有

$$y_2=kx_2+b, \tag{1}$$

和

$$y_1=kx_1+b, \tag{2}$$



(a) (b)

图 86

用(1)式减去(2)式得

$$y_2-y_1=kx_2-kx_1$$

或者 $$y_2-y_1=k(x_2-x_1)$$

这个关系式說明直綫上任意两点的縱坐标的差 y_2-y_1 和它們的横坐标的差 x_2-x_1 成正比例，比例系数等于直綫 $y=kx+b$ 的斜率。

从图中看出，x_2-x_1 表示自变量 x 从 x_1 变化到 x_2 的增量，y_2-y_1 表示与自变量增量对应的函数的增量。

因此，函数 $y=kx+b$ 的增量和自变量 x 的增量成正比例，$y=kx+b$ 本身和自变量 x 并不成正比例。

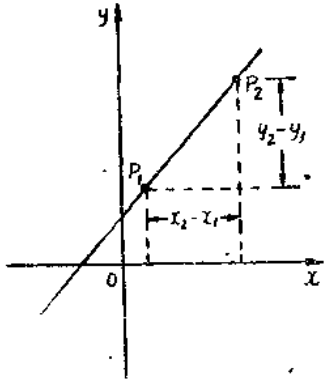


图 87

§79 一次函数的根 現在我們来研究直綫 $y=kx+b$ 和 Ox 軸交点的坐标。

例如：我們来求直綫 $y=2x-3$(图 88)和 Ox 軸的交点 M 的

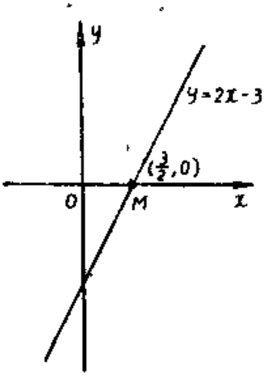


图　88

坐标(x, y)。因为交点在 Ox 軸上，所以它的縱坐标 $y=0$。

因为交点 M 在直綫 $y=2x-3$ 上，所以它的坐标应該适合等式

$$y=2x-3.$$

把 y 的值代入，就得方程：

$$2x-3=0.$$

解方程得：　　$x=\frac{3}{2}$.

这个数就是直綫 $y=2x-3$ 和 Ox 軸交点 M 的横坐标。

一般地説，直綫 $y=kx+b$ 和 Ox 軸的交点的坐标是 $\left(-\frac{b}{k}, 0\right)$，其中横坐标是方程 $kx+b=0$ 的根，也就是能使函数值 y 等于零的自变量 x 的值。

能使函数值 y 等于零的自变量 x 的值叫做函数的根。

对一次函数 $y=kx+b$ 来說，它的函数根就是直綫 $y=kx+b$ 和 Ox 軸交点的横坐标，也就是方程 $kx+b=0$ 的根。

习題十四

1. 下列各种关系里，那些是正比例函数关系，为什么？
   (1) 正方形的周长和它的一边的长；
   (2) 正方形的面积和它的一边的长；
   (3) 速度一定所走的距离和所需的时間；
   (4) 比重一定时，物体的重量和体积；
   (5) $x+3$ 和 x；
   (6) 亩产量一定时，亩数的多少和它的总产量；
   (7) 定圓內的弧的度数和这弧所对的圓心角的度数。
2. 在同一坐标系內作出下列各函数的图象：

(1) $y=\frac{1}{2}x$; $y=x$; $y=2x$;

(2) $y=-\frac{1}{2}x$; $y=-x$; $y=-2x$.

3. 在同一坐标系內作出下列各函数的图象:

(1) $y=3x$; $y=3x+2$; $y=3x-\frac{1}{2}$;

(2) $y=-3x$; $y=-3x+2$; $y=-3x-\frac{1}{2}$.

4. 作图求下列函数的根:

(1) $y=\frac{1}{2}x+1$;

(2) $y=3-x$;

(3) $y=-2x+3$.

5. 火車出 A 站 2 千米后,以 40 千米/小时的速度前进,設 t 小时后火車离 A 站的距离为 s 千米。

(1) 在表中塡上和所給 t 的値对应的 s 的値;

t (小 时)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
s (千 米)										

(2) 画出 s 和 t 間的函数的图象;

(3) 所得的图象与正比例关系的图象有那些相同的地方? 有那些不同的地方?

6. 已知 t 与 s 成正比例, 当 $t=2$、$s=10$, 求用公式表示它們之間的关系?

7. 已知圓面积与半徑的平方成正比例,当半徑为 5 厘米时,圓的面积約为78.5 厘米^2, 求圓面积公式。

二、直綫

§80 直綫的方程 一次函数图象的研究, 說明了方程

$y=kx+b$ 和直綫間的連系。

如果直綫和 Ox 軸、Oy 軸都相交，那末由它的斜率 k 和截距 l 就能确定它的方程是

$$y=kx+b. \tag{1}$$

方程(1)叫做直綫的斜截式方程。

要确定直綫的斜率，可測定直綫和 Ox 軸的交角 α，再求它的正切。或者从直綫上任何点 P 向 Ox 軸作垂綫 PM(图89)，再測定垂綫 PM 和綫段 NM 的长，就得 $K=\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{PM}{NM}$，如果直綫和 Ox 軸相交成鈍角(图 90)，那末它的斜率是負数，我們可以用 α 的补角 β 的正切加上負号来代替它，卽 $k=-\operatorname{tg}\beta$(証明从略)。

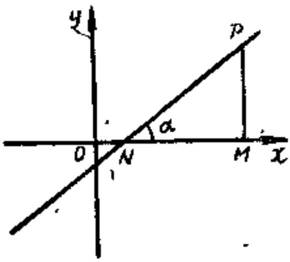


图 89

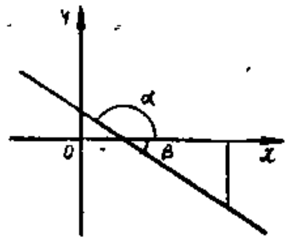


图 90

很明显，如果直綫通过原点，那末它的方程是

$$y=kx. \tag{2}$$

現在我們来研究和坐标軸平行的直綫的方程。

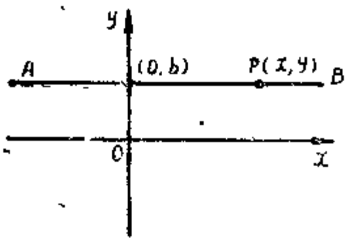


图 91

1 平行于 Ox 軸的直綫的方程 設直綫 AB 和 Oy 軸相交于 $(0, b)$，从图 91 看出，直綫上任意点的縱坐标都等于 b；反过来，凡是縱坐标等于 b 的点，不間它的横坐标等于什么数，都在直綫