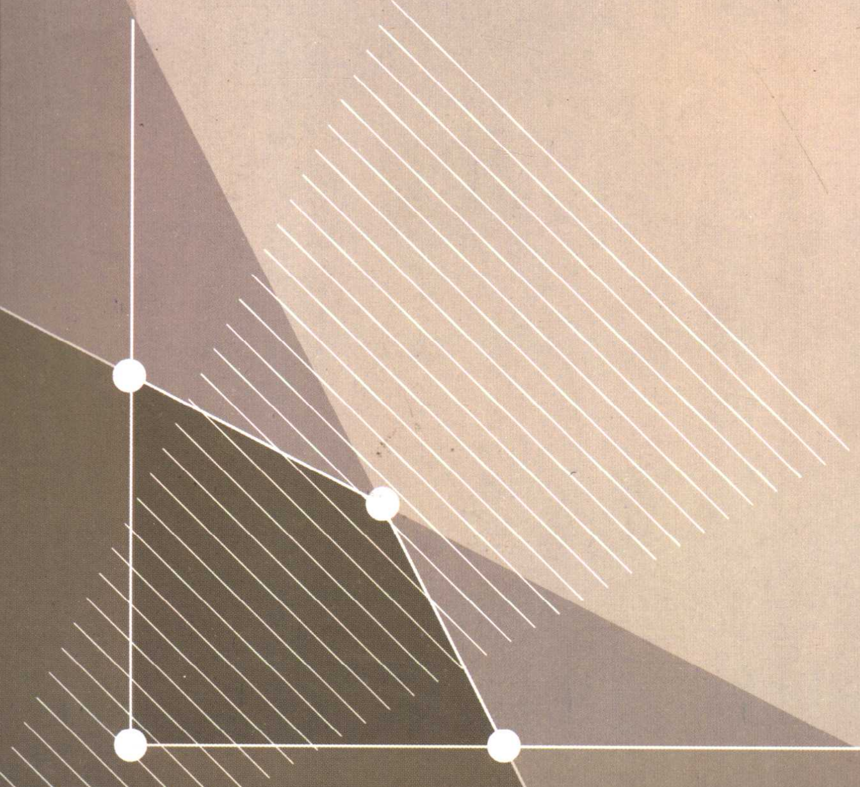
江道琪　何建坤　陈松华　编著

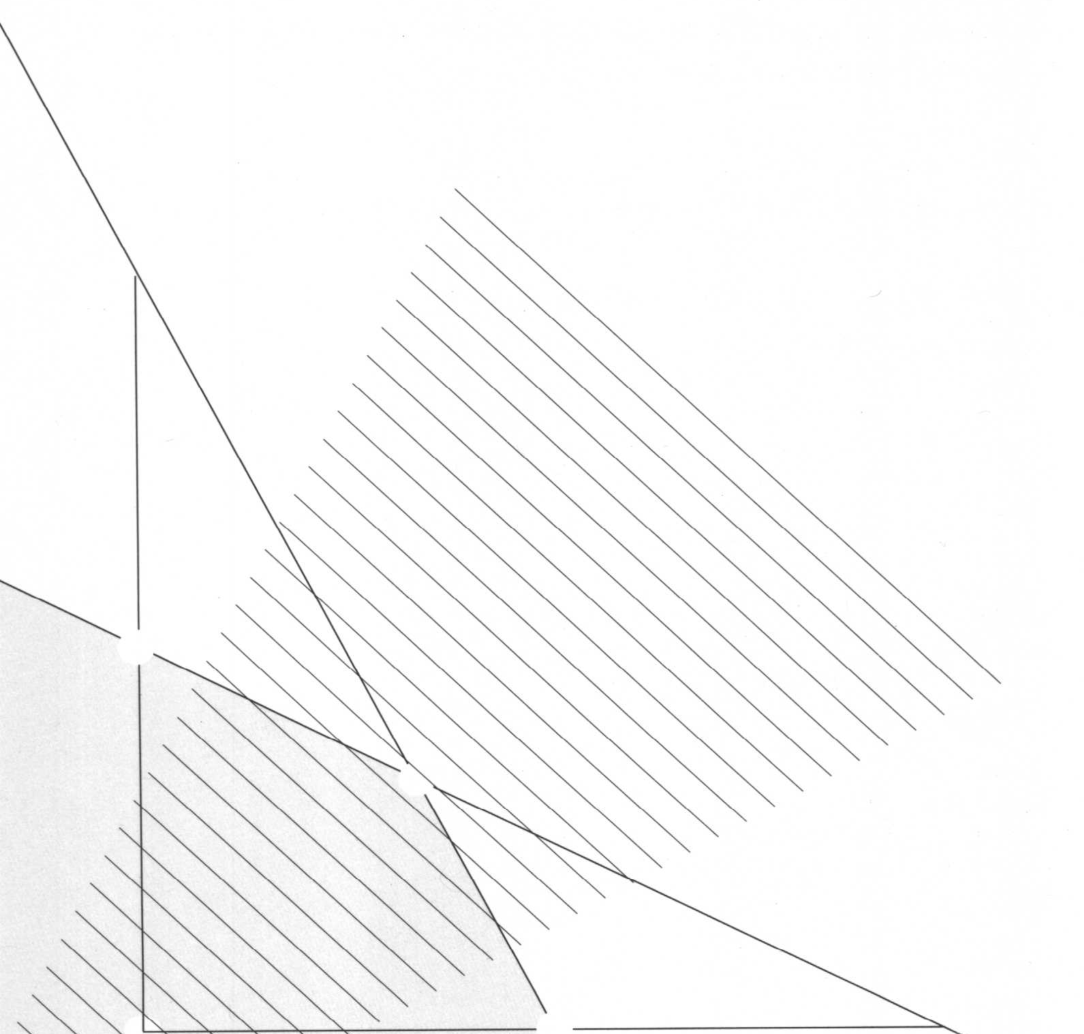
实用线性规划
方法及其支持系统



清华大学出版社

江道琪　何建坤　陈松华　编著

实用线性规划
方法及其支持系统



清华大学出版社

内 容 简 介

本书介绍了以单纯形算法为基础的 7 种规划方法（线性规划、目标规划、运输问题、混合整数规划、多目标规划、模糊线性规划和模糊多目标规划）。本书从实用的角度出发，主要介绍各种方法的基本原理和应用，并且列举了一些从实用模型简化而来的应用模型案例。全书内容力求深入浅出、通俗易懂，理论推导也尽量求简并侧重于实际应用。

由于求解线性规划模型的计算过程繁杂，作者根据多年的规划工作实践，自主开发了适用于 Windows 环境下的“多功能规划方法支持系统——MFPS”（其教学版见随书光盘），该支持系统采用方便灵活的交互式方法求解上述各种线性规划问题模型。MFPS 不仅可以用来进行模型求解，提供大量的计算结果分析信息，还可以针对求解过程中出现的异常问题指导读者进行模型调试，并且可以自动生成模型优化方案的分析报告。

本书适用于从事规划计划制定、企业管理的读者，可作为科技人员的培训或自学教材，也可供相关专业的科技人员、大学高年级学生、研究生和教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

实用线性规划方法及其支持系统/江道琪，何建坤，陈松华编著. —北京：清华大学出版社，2006.4
ISBN 7-302-12432-9

Ⅰ.实…　Ⅱ.①江…　②何…　③陈…　Ⅲ.线性规划　Ⅳ.O221.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 005689 号

出 版 者：清华大学出版社　　地　　址：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　客户服务：010-62776969
组稿编辑：丁　岭
文稿编辑：徐跃进
印 装 者：清华大学印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：185×260　印张：27　字数：669 千字
版　　次：2006 年 4 月第 1 版　2006 年 4 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-302-12432-9/TP·7972
印　　数：1～3000
定　　价：48.00 元(含光盘)

前　言

在现代管理决策中，人们通常把决策分为战略决策、战术决策和业务决策 3 个层次。第 1 层，战略决策，是属于与管理总的方针及企业发展所需资源有关的决策，是对企业发展具有深远影响的长远规划，决策过程要考虑很多不确定因素，特别是风险的因素；第 2 层，战术决策，是在对物质资源、设备等决策之后，规划如何最有效地分配所得到的资源（如生产能力、资金、劳动力、原材料等），以便获得最大的效益；第 3 层，业务决策，是在资源合理分配后进行日常业务和计划的决策。运筹学中的线性规划模型方法适用于解决上述决策问题，尤其适用于解决战术决策方面的问题，如解决诸如劳动力、生产能力及各种有限资源的合理分配；制定运输和任务指派的优选方案；制定年度生产计划、季节性生产计划，优化库存管理方案；以及投资方案的选择、配料、选址、下料等许多问题的优化。

长期以来，作者先后组织和参与了一些涉及农业规划、区域规划、能源规划等方面的规划研究项目，通过对许多规划方法的研究和应用，深深体会到这些科学方法对于辅助决策的实用性和重要性。近年来，运筹学及其线性规划方法已经从研究生课程变为大学课程和管理培训的课程，这反映了线性规划方法得到空前的普及和应用。

20 年前，为了推介这种有效实用的方法，也为了在清华大学核能技术研究所承办的能源规划与管理训练中心和国家计委计划管理干部培训班上授课，作者编写并出版了《实用线性规划及计算机程序》一书，收到了很好的效果。该书主要内容包括 3 个部分：一是求解线性规划问题的单纯形算法、对偶原理、敏感性分析及应用模型；二是整数规划问题的求解方法及应用模型；三是用于求解线性规划和混合整数规划模型的计算机程序。

近年来，随着数学规划理论和方法研究成果的不断出现，数学规划（特别是线性规划）问题的计算方法和计算手段也得到较大的发展，结合作者在该领域研究工作的经验和体会，本书在原书基础上进行较大范围的修改补充后并推出作者自主开发的基于 Windows 环境的求解支持系统，以利于读者方便地进行模型的求解。

为了让读者比较全面系统地了解当今线性规划模型求解方法，本书介绍了以单纯形方法为基础的 7 种常用的线性规划方法，分别是线性规划（LP）、目标规划（GLP）、运输问题（TP）、混合整数规划（MIP）、多目标规划（MLP）、模糊线性规划（FLP）和模糊多目标规划（FMLP）。我们仍遵从原来的写作风格，力求深入浅出、通俗易懂，理论推导也尽量简化并侧重于实际应用，站在实际应用者的角度分别介绍各种方法的基本原理和具体应用步骤，并把一些实际规划问题简化后形成的各种应用模型案例介绍给读者，以更有利于读者学习、掌握和使用这些线性规划方法。

利用线性规划方法处理实际问题时，在掌握求解原理和构造模型技术之后，还要经历一个计算过程。现在这一过程都是由计算机程序完成。而编写这样的计算机程序属于另一知识范畴，虽然不需要每个处理实际问题的人都懂得程序设计，但该计算过程不可省略。为了解决这一必需的计算工具，作者结合自己多年规划工作实践，自主开发了适用于 Windows 环境下的“多功能规划方法支持系统——MFPS”，该支持系统可以采用方便灵活的交互式

方法求解上述线性规划问题模型。该系统不仅可以用来进行模型求解，提供大量的计算结果分析信息，还可以针对求解过程中出现的异常问题指导读者进行模型调试，并且可以自动生成模型优化方案的分析报告。MFPS1.1版(教学版)将随本书一道奉献给广大读者。

全书分三篇共12章：第一篇包括第1章～第7章，讨论有关单个目标线性规划(线性规划、模糊线性规划、整数规划和运输问题)的基本原理及其应用模型；第二篇包括第8章～第10章，讨论有关多个目标线性规划(多目标线性规划、目标规划和模糊多目标规划)问题的数学模型、求解方法和应用实例；第三篇包括第11章～第12章，分别介绍了“多功能规划方法支持系统——MFPS”的功能、操作使用方法和有关文档说明。

笔者本意是向在校研究生和本科高年级学生以及实际从事经济管理、编制规划、资源优化配置和企业管理等工作的科技人员和管理干部提供一个有效、实用的工作手册和工具，但由于理论水平和实践经验有限，恐难达到目的，恳请大家提出批评和意见，以便我们进一步改进。如有建议或交流信息请发邮件至电子信箱 csh@mx.cei.gov.cn 和我们联系。

作　者

2006年2月

目　　录

第一篇　单目标线性规划

第二篇 多目标线性规划

第三篇　MFPS系统使用方法

第一篇　单目标线性规划

第1章 线性规划模型与图解

线性规划是当代用途最广泛的运筹学方法之一。诸如工业、农业、运输、资源配置、军事及经济管理等许多领域的问题都可以转换成线性规划模型来求解。随着电子计算机技术的普及和发展，线性规划方法在实际应用中发挥着越来越大的作用。本章首先介绍一些线性规划的基本概念。

1.1 线性规划模型示例与公式表示

人们在制定生产计划和进行生产管理的过程中，经常遇到如何合理地利用有限的人力、物力和财力等资源，以获取最大经济效果的问题。这类问题就可以表示成线性规划模型。下面举例说明。

[例 1.1] 某工厂在计划期内要安排生产Ⅰ、Ⅱ两种产品。产品Ⅰ每件可获利 6 元；产品Ⅱ每件可获利 4 元；生产这两种产品每件需机器台时数分别为 2 和 3 个单位，需劳动工时分别为 4 和 2 个单位。已知该厂在计划期内可提供 100 个单位的机器台时数和 120 个单位的劳动工时数，问如何安排生产计划，才能使该工厂获利最大？

下面用数学语言来描述这一问题。

令 x_1 和 x_2 分别表示在计划期内产品Ⅰ和产品Ⅱ的产量。该厂的目标是获取最大利润，用 Z 表示其所得利润，则可以用数学式子表示为：

$$\max \quad Z = 6x_1 + 4x_2$$

但是，该厂的生产要受到机器台时数和劳动工时数的限制，因而也要在数学上描述这些限制因素，使生产这两种产品对机器台时和劳动工时的消耗不得超过它们各自的可提供量。

机器台时数的限制因素可表示为：

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 100$$

与此类似，劳动工时数的限制因素也可以表示为：

$$4x_1 + 2x_2 \leqslant 120$$

当然还有一个限制因素，就是两种产品的产量均不能是负数，所以还要增加非负限制：

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$$

综合上述数学式子得到[例 1.1]的数学模型如下：

求 $\max \quad Z = 6x_1 + 4x_2$

满足

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 100$$
$$4x_1 + 2x_2 \leqslant 120$$

$x_1, x_2 \geqslant 0$

这就是一个标准的线性规划问题的数学表示式，通常称之为原实际问题的线性规划模型。所有线性规划问题在数学表达形式上都是一致的，它们具有如下共同特征：

- 每个问题都用一组未知数$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示某一种活动方案，这组未知数的一组特定值就代表一个具体方案。通常都要求这些未知数的取值非负。
- 存在一系列限制条件（一般称之为约束条件），这些限制条件可以用一组线性等式或不等式表示。
- 都有一个追求的目标，并且这一目标可以表示为一组未知数的线性函数（称为目标函数）。根据所研究问题的性质，要求目标函数实现最大化或最小化。

线性规划问题的一般形式为：

$$\max(\text{或} \min) \quad Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \tag{1.1}$$

$$\left.\begin{array}{c} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \leqslant (\text{或} =, \text{或} \geqslant) b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \leqslant (\text{或} =, \text{或} \geqslant) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \leqslant (\text{或} =, \text{或} \geqslant) b_m \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \tag{1.3}$$

其中，式(1.1)为目标函数，式(1.2)为约束条件，式(1.3)为非负条件。

对于实际应用问题的线性规划模型，往往省略式(1.3)，但都隐含着非负条件。

为了进一步认识线性规划模型和初步了解构造模型的方法，下面再举两个例子。

[例 1.2]　机器加工配套问题。

一所工厂有 4 台机器，每台都能生产 3 种类型的零件。它们生产这些零件时每小时所获利润额见表 1.1，生产不同零件的速度见表 1.2。预计下个月对第 1、2、3 种零件的需求量分别为 700、500 和 400 个单位；4 台机器可提供的工作时间分别为 90、75、90 和 80 小时。现在问该工厂应如何安排生产，才能使下个月获利最大？

表 1.1　机器生产零件的利润额　　单位：元/小时

零件种类	机器序号			
	1	**2**	**3**	**4**
1	5	6	4	3
2	5	4	5	4
3	6	7	2	8

表 1.2　机器生产零件的速度　　单位：件/小时

零件种类	机器序号			
	1	**2**	**3**	**4**
1	8	2	4	9
2	7	6	6	3
3	4	8	5	2

选择变量：令 x_{ij} 表示安排第 j 台机器生产第 i 种零件的小时数，则该问题的线性规划

模型可以表示为：

目标函数

$$\begin{aligned}\max \quad Z = \ & 5x_{11} + 6x_{12} + 4x_{13} + 3x_{14} \\ & + 5x_{21} + 4x_{22} + 5x_{23} + 4x_{24} \\ & + 6x_{31} + 7x_{32} + 2x_{33} + 8x_{34}\end{aligned}$$

并且要满足以下几类约束条件，

- 需求约束：

$$\begin{aligned}8x_{11} + 2x_{12} + 4x_{13} + 9x_{14} &= 700 \\ 7x_{21} + 6x_{22} + 6x_{23} + 3x_{24} &= 500 \\ 4x_{31} + 8x_{32} + 5x_{33} + 2x_{34} &= 400\end{aligned}$$

- 工时约束：

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{21} + x_{31} &\leqslant 90 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &\leqslant 75 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &\leqslant 90 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &\leqslant 80\end{aligned}$$

- 非负约束：

$$x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{34} \geqslant 0$$

［例 1.3］ 能源系统最优分配问题。

图 1.1 为一简单示例性的能源系统网络图。在图 1.1 中，圆圈内的 $A \sim G$ 表示各种能源材料或载体。初级能源资源从网络图的左端输入。A、B、C 分别代表 3 种未开采的地下初级能源，其最大可获取量分别用 S_A、S_B 及 S_C 表示。最终需求是网络图的输出。材料 F 和 G 所含能量的最终需求量用 D_F 和 D_G 表示。图 1.1 中方框内的 1～8 分别代表不同的能源转换工艺环节。第 j 个工艺环节生产单位能量产品的成本为 c_j，能量转换效率为 e_j。求最优的能源系统结构，即在保证最终能量需求的前提下，系统的供能成本最低。

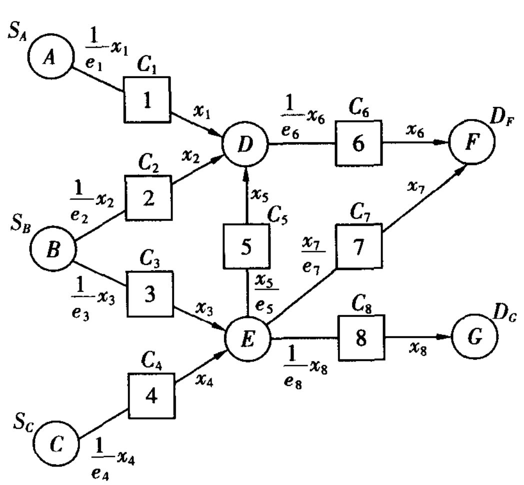


图 1.1

设 x_j 为第 j 种工艺环节生产的能源产品中所含的能量，用统一的能量单位来表示，如百万大卡或万吨标准煤。利用线性规划方法就可以相对于每个工艺环节（图 1.1 中的方框）设置一个变量；相对于每种能源材料（图 1.1 中的圆圈）建立一个约束条件；相对于每种初级能源资源（$A \sim C$）可以列出一个供应量限制约束条件；相对于每种最终需求能源材料（$F \sim G$）可以列出一个需满足的最小需求量约束条件；相对于中间能源产品（$D \sim E$），可以列出一个物料平衡的约束条件。为避免在目标函数中重复计算，各工艺环节的成本系数 c_j 只包含该环节的加工转换成本，不包括所输入能源材料的成本。因此，原问题的线性规划模型可以表示为：

目标函数

$$\min \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_8x_8$$

约束方程包括

• 供应约束，对 $A \sim C$

$$\frac{1}{e_1}x_1 \leqslant S_A$$

$$\frac{1}{e_2}x_2 + \frac{1}{e_3}x_3 \leqslant S_B$$

$$\frac{1}{e_4}x_4 \leqslant S_C$$

• 物料平衡，对 $D \sim E$

$$x_1 + x_2 + x_5 - \frac{1}{e_6}x_6 = 0$$

$$x_3 + x_4 - \frac{1}{e_5}x_5 - \frac{1}{e_7}x_7 - \frac{1}{e_8}x_8 = 0$$

• 需求约束，对 $F \sim G$

$$x_6 + x_7 \geqslant D_F$$

$$x_8 \geqslant D_G$$

• 非负约束：

$$x_1, x_2, \cdots, x_8 \geqslant 0$$

1.2　线性规划问题的图解法

图解法是求解线性规划问题的一种方法。虽然这种方法只适用于仅包含两个变量的问题，但因其简单直观，有助于了解线性规划问题求解的基本原理，所以在本节通过例题对这种方法做一简要介绍。

[例 1.4]　研究上一节[例 1.1]中给出的线性规划问题。

求　$\max \quad Z = 6x_1 + 4x_2$

满足

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 100$$

$$4x_1 + 2x_2 \leqslant 120$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

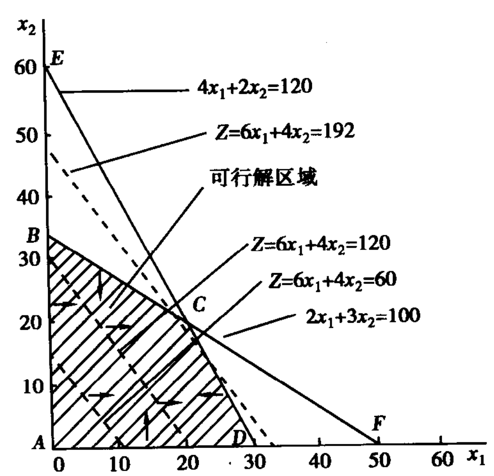


图　1.2

图 1.2 给出了该问题求解的细节，现将其求解步骤归纳如下：

第 1 步，把第 1 个约束条件作为等式约束并在图上画出，即得直线 $2x_1 + 3x_2 = 100$。

第 2 步，确定满足第 1 个约束条件（即 $2x_1 + 3x_2 \leqslant 100$）的点的集合。通过检验原点

(0,0)是否满足此约束条件就能找到这些点的集合，因为 $2\times0+3\times0=0<100$，因此直线 $2x_1+3x_2=100$ 以下的所有点都满足第 1 个约束条件。一般说来，如果约束条件的右边非负，则原点满足所有小于或等于的约束条件。

第 3 步，把第 2 个约束条件改为等式约束并在图上画出，即得直线 $4x_1+2x_2=120$。

第 4 步，确定满足第 2 个约束条件的点集。由于原点再次满足这一约束，所以直线 $4x_1+2x_2=120$ 以下的所有点必然满足该约束。

第 5 步，确定 $x_1\geqslant0$ 和 $x_2\geqslant0$ 的区域。

第 6 步，找出第 2、4 和 5 步所确定区域的公共区(如图 1.2 中的阴影部分)，这就是原线性规划问题的可行解区域。也就是说，该区域内的每一点都满足所有约束条件(包括非负约束)，因而都是提供最大利润的候选者。从图 1.2 可以看到，在该区域内含有无限多个可行解，现在的问题就是怎样才能把这些点的数目减少到可以处理的有限数目。

第 7 步，研究图 1.2 中的阴影部分，可以发现目标函数 $Z=6x_1+4x_2$ 只会在其角点(即图 1.2 上的 A、B、C、D)中的某一个上达到最大值。因此，在图 1.2 上画出两条直线。

$$Z=6x_1+4x_2=C_1$$
$$Z=6x_1+4x_2=C_2$$

其中，C_1、C_2 是两个不同的常数。通过这两条直线就可以观察到目标函数的斜率以及使 Z 值增加的移动方向。随着 Z 值增大，目标函数所通过的可行解区域的最后一个角点的坐标就表示最优解，此解使 Z 在可行解区域内取最大值。

在本例中，先作直线 $Z=6x_1+4x_2=60$。并注意到它在靠近 A 点处通过可行解区域。然后取 $C_1=120$，并让它增加到 $C_2=192$，可以看到，目标函数的这两条直线 $Z=6x_1+4x_2=120$ 和 $Z=6x_1+4x_2=192$ 的斜率和直线 $Z=6x_1+4x_2=60$ 的斜率仍然相同，只是直线在向 C 点的方向平行移动。由此可知，对任意一个常数 d，都会得到一条平行于直线 $Z=6x_1+4x_2=120$ 的直线 $Z=6x_1+4x_2=d$，并且如果 d 小于 120，所得直线平行于 $Z=6x_1+4x_2=120$，且都位于此直线左方；如果 d 大于 120，所得直线也与 $Z=6x_1+4x_2=120$ 平行且在它的右方；如果 d 增大得很多，得到的直线就会平移到可行解区域之外。这样，对不同的 d 值分别画出不同的 $Z=6x_1+4x_2=d$ 的直线，观察这些直线的斜率以及当 d 值增大时直线运动的方向，就可以确定目标函数最大值(或最小值)出现在可行解区域的哪个角点上。此例中目标函数直线 $Z=6x_1+4x_2$ 将在点 C 处取得最大值，而 C 点就是直线 $2x_1+3x_2=100$ 和 $4x_1+2x_2=120$ 的交点。因此，这两个线性方程的联立解就是使目标函数 $Z=6x_1+4x_2$ 取最大值的 x_1 和 x_2 的值。

第 8 步，根据上述讨论，这一步任务就是要解如下的联立方程组：

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=100\\4x_1+2x_2=120\end{cases}$$

将第 1 个方程两边同乘以(−2)，再加到第 2 个方程上，结果得到：

$$\begin{array}{rr}&-4x_1-6x_2=-200\\+)&4x_1+2x_2=120\\\hline&-4x_2=-80\end{array}$$

因此得到

$$x_2=20$$

将此 $x_2=20$ 代入原来第 1 个方程，则有：

$$2x_1 + 3 \times 20 = 100$$

因此得到 $$x_1 = 20$$

以此 x_1 和 x_2 的值代入目标函数，得到

$$Z = 6x_1 + 4x_2 = 6 \times 20 + 4 \times 20 = 200$$

由此可知，该工厂为了获取最大利润，应该生产产品Ⅰ和产品Ⅱ各 20 个单位，这样所得的最大利润为 200 元。

这里事先说明一下，在第 2 章将介绍求解线性规划问题最常用的单纯形方法。从几何图解的意义上来说，单纯形方法的求解步骤就是从可行解区域的一个角点开始，然后移向下一个相邻的角点的过程，只要移动后的目标函数值不减小，这个过程就要继续进行下去，直到不能实现不减小目标函数值的向邻近角点移动就达到最优解（对于求最大值问题）。因此，图解法有助于从几何意义上理解单纯形算法的步骤。

1.3　几种特殊情况的图解过程

线性规划问题在求最优解的过程中，有时会出现一些特殊情况。

1.3.1　有多个最优解的情况

[例 1.5]　将[例 1.1]的线性规划模型改为如下形式：

求　max　$Z = 4x_1 + 6x_2$

满足

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leqslant 100 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leqslant 120 \\ x_1, x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

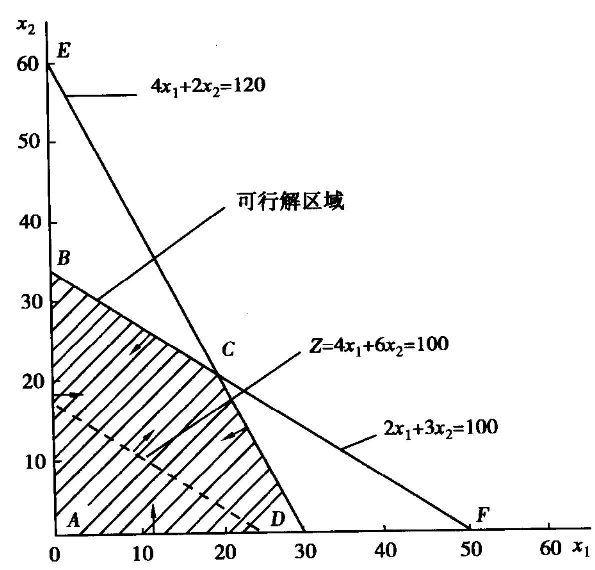


图　1.3

根据 1.2 节的讨论知道，由于目标函数系数都是正值，显然应当把目标函数直线 $Z=4x_1+6x_2$ 向右上方推移才会尽可能增大 Z 值。现在取 $Z=100$ 来作目标函数 $Z=4x_1+6x_2=100$ 的直线图，由图 1.3 可见，它与其中一个约束条件改为等式的直线 $2x_1+3x_2=100$ 相平行。这样当 Z 取值大于 100 并逐渐增大时，目标函数直线就逐渐接近直线 $2x_1+3x_2=100$。当 Z 增大到 200 时，直线 $Z=4x_1+6x_2=200$ 就和直线 $2x_1+3x_2=100$ 相重合。由于重合直线的一部分 BC 线段属于可行解区域，而线段 BC 上有无穷个点，所以说，在这种情况下就出现了直线 $2x_1+3x_2=100$（或等价于 $Z=4x_1+6x_2=200$）上从 B 到 C 的每个点都是最优解，即有无穷多个最优解的情况。